Одновременно из точки пересечения контура тела с предельной линией исходит наклоненная вниз по потоку C_+ — характеристика, вплоть до которой поле скоростей задается аналитическими функциями. Дальнейшее аналитическое продолжение течения за указанную характеристику невозможно: оно не соответствует никакому реальному телу вращения. Кроме того, такое продолжение означало бы, что в сверхзвуковом потоке с $M_\infty > 1$ скачок, имеющий форму параболы $\xi = \xi_2 = \text{const}$, должен выродиться в характеристику на конечном расстоянии от места возникновения. Но, как известно [6], затухание ударных волн происходит асимптотически при $r \to \infty$. Именно этот факт приводит к тому, что в решениях (3) содержится огибающая волн разрежения; аналогичную структуру должны иметь и поля плоскопараллельных течений, подробно рассмотренные в работе [2].

Поступило 15 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman Th. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
2. Заславский Б. И., Клепикова Н. А. Об одном классе точных частных решений уравнений околозвуковых течений газа. ПМТФ, 1965, № 6.
3. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Березин О. А., Гриб А. А. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
5. Busemann A. Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. Liftfahrt — Forschung, 1942, Bd. 19, Lfg. 4.
6. Ландау Л. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ОКОЛОЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ С ПРЯМЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

И. БИЙБОСУНОВ, Н. КАРЫБЕКОВ

(Фрунзе)

В работе [1] Ф. И. Франклем в случае, когда точное уравнение движения Чаплыгина заменяется уравнением Трикоми, был построен пример плоскопараллельного околозвукового течения с прямым скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения [1]. Это течение — аналог течения точечного вихря и имеет в качестве линии тока концентрические окружности, причем везде обеспечивается однозначная зависимость вектора скорости от декартовых координат. В данной работе указанный пример обобщен на случай уравнения Чаплыгина, причем скачок уплотнения считается прямым.

§ 1. Исходим из уравнения Чаплыгина в форме С. В. Фальковича [3]

$$\partial\varphi / \partial\theta = -B(\eta)\, \partial\psi / \partial\eta, \qquad \partial\varphi / \partial\eta = \eta\, B(\eta)\, \partial\psi / \partial\theta \tag{1.1}$$

Здесь φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, θ — угол наклона скорости, η — функция скорости, введенная Ф. И. Франклем (4).

Исключение потенциала скорости из (1.1) приводит к уравнению

$$\eta \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + b(\eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, \qquad b(\eta) = \frac{d}{d\eta}\ln B(\eta) \tag{1.2}$$

В окрестности $\eta = 0$ имеем разложение

$$b(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \ldots + b_m\eta^m$$

$$\left(b_0 = -\frac{2\varkappa + 5}{5(\varkappa+1)^{1/3}},\quad b_1 = \frac{46\varkappa^2 + 10\varkappa + 125}{175(\varkappa+1)^{2/3}}, \ldots\right) \tag{1.3}$$

[1] Впоследствии этот пример был обобщен И. Бийбосуновым с целью получения искривленного скачка уплотнения [2].

Согласно [5], уравнение (1.2) преобразуем к следующему виду с введением новых переменных:

$$t(1-t)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{3-7t}{6}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\rho^2}{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{\rho}{3}\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=\frac{\eta b(\eta)}{6}\left(2t\frac{\partial\psi}{\partial t}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)$$

$$\rho=\sqrt{\theta^2+{}^4/{}_9\eta^3},\qquad t=\theta^2/\rho^2 \tag{1.4}$$

Из (1.4) следует, что $\eta=({}^3/{}_2)^{2/3}\rho^{2/3}(1-t)^{1/3}$, тогда

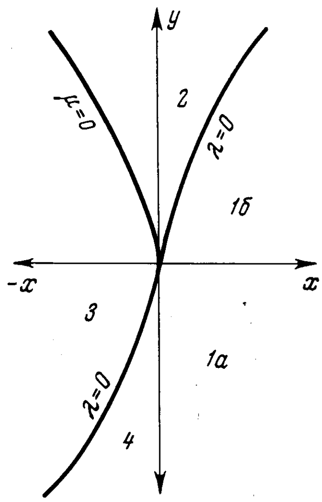
$$b(\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}b_m\eta^m=\sum_{m=0}^{\infty}b_m({}^3/{}_2)^{2/3m}\rho^{2/3m}(1-t)^{1/3m} \tag{1.5}$$

На основании (1.5) уравнение (1.4) имеет вид

$$t(1-t)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}-\frac{3-7t}{6}\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\rho^2}{4}\frac{\partial^2\psi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{3}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=$$
$$=\frac{1}{6}\left(2t\frac{\partial\psi}{\partial t}-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\times$$
$$\times\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3(2m+2)}\rho^{1/3(2m+2)}(1-t)^{1/3(m+1)} \tag{1.6}$$

§ 2. Решение уравнения (1.6) выражается в виде ряда см. [5]

$$\psi(\rho,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\rho^{\nu+2/3m}f_m(t) \tag{2.1}$$



После подстановки разложение (2.1) в уравнение (1.6) приходим к n неоднородным гипергеометрическим уравнениям, первые три уравнения которых при $\nu={}^2/{}_3$ имеют вид

$$t(1-t)f_0''+{}^1/{}_2(1-{}^7/{}_3t)f_0'+{}^1/{}_6f_0=0$$
$$t(1-t)f_1''+{}^1/{}_2(1-{}^7/{}_3t)f_1'+{}^5/{}_9f_1={}^1/{}_3b_0({}^3/{}_2)^{2/3}(1-t)^{1/3}(tf_0'-{}^1/{}_3f_0) \tag{2.2}$$
$$t(1-t)f_2''+{}^1/{}_2(1-{}^7/{}_3t)f_2'+{}^7/{}_6f_2={}^1/{}_3b_0({}^3/{}_2)^{2/3}(1-t)^{1/3}(tf_1'-{}^2/{}_3f_1)+$$
$$+{}^1/{}_3b_1({}^3/{}_2)^{4/3}(1-t)^{2/3}(tf_0'-{}^1/{}_3f_0)$$

Поскольку в нашем случае скачок уплотнения считается прямым, то будем рассматривать первые линейно-независимые частные решения этих уравнений, обеспечивающих четную зависимость функции тока ψ от θ, т. е. берем соответственно следующие частные решения уравнений (2.2):

$$f_0(t)=\alpha_0F(-{}^1/{}_3,\ {}^1/{}_2;\ {}^1/{}_2;\ t)=\alpha_0(1-t)^{1/3}$$
$$f_1(t)=\alpha_1F(-{}^2/{}_3;\ {}^5/{}_6;\ {}^1/{}_2;\ t)-{}^1/{}_2b_0({}^3/{}_2)^{2/3}(1-t)^{1/3}f_0(t) \tag{2.3}$$
$$f_2(t)=\alpha_2F(-1,\ {}^7/{}_6;\ {}^1/{}_2;\ t)-\alpha_1{}^1/{}_2b_0({}^3/{}_2)^{2/3}(1-t)^{1/3}F(-{}^2/{}_3;\ {}^5/{}_6;\ {}^1/{}_2;\ t)+$$
$$+({}^3/{}_2)^{1/3}(1-t)^{2/3}[{}^1/{}_{16}(5b_0^2-2b_1)f_0(t)+{}^1/{}_8(b_0^2+2b_1)tf_0'(t)$$

Поскольку число линий Маха, исходящих из конца скачка уплотнения, равняется трем, т. е. только в одном квадранте декартовых координат течения дозвуковое ($\eta>0$), а в остальных трех квадрантах течение сверхзвуковое ($\eta<0$), то физическую плоскость (фигура) разделим на четыре области: *1*, *2*, *3* и *4*. Тогда функция тока, согласно (2.1) и (2.3), определяется в следующем виде:

В областях $1a$ ($\eta > 0$) и $1б$ ($\eta < 0$)

$$\psi_1 = \psi_{01} + \psi_{11} + \psi_{21} + \ldots = \rho^{2/3} f_0(t) + \rho^{4/3} f_1(t) + \rho^2 f_2(t) + \ldots \tag{2.4}$$

$$\psi_{01} = \rho^{2/3}\alpha_{01}(t-1)^{1/3}$$

$$\psi_{11} = \rho^{4/3}(t-1)^{2/3}\left\{\alpha_{11}\left[AF_1\left(\frac{1}{1-t}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B(t-1)^{-3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] - \frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{01}\right\} \tag{2.5}$$

$$\psi_{21} = \rho^2(t-1)\left\{\frac{7}{3}\alpha_{21}\left(1 + \frac{4}{7}\frac{1}{t-1}\right) - \frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{11} \times\right.$$

$$\left.\times\left[AF_1\left(\frac{1}{1-t}\right) + B\left(\frac{1}{t-1}\right)^{3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\alpha_{01}\left(k_1 - k_2\frac{1}{t-1}\right)\right\}$$

$$A = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6)\Gamma(-1/3)}\,\frac{\Gamma(2/3)\Gamma(3/2)}{\Gamma(5/6)\Gamma(4/3)} - \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-1/3)}{\Gamma(-2/3)\Gamma(5/6)}\,\frac{\Gamma(4/3)\Gamma(3/2)}{\Gamma(5/3)\Gamma(7/6)} = -3$$

$$B = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/3)}{\Gamma(7/6)\Gamma(-1/3)}\,\frac{\Gamma(2/3)\Gamma(-3/2)}{\Gamma(-2/3)\Gamma(-1/6)} - \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-1/3)}{\Gamma(-2/3)\Gamma(5/6)}\,\frac{\Gamma(4/3)\Gamma(-3/2)}{\Gamma(-1/3)\Gamma(1/6)} = 0$$

$$k_1 = {}^1/_{48}(2b_1 - 17b_0^2), \qquad k_2 = {}^1/_{24}(2b_1 - b_0^2)$$

$$F_1\left(\frac{1}{1-t}\right) = F_1\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}; \frac{-1}{2}; \frac{1}{1-t}\right),$$

$$F_2\left(\frac{1}{1-t}\right) = F_2\left(\frac{5}{6}, \frac{7}{6}; \frac{5}{2}; \frac{1}{1-t}\right)$$

В области 2 ($\eta < 0$)

$$\psi_2 = \psi_{02} + \psi_{12} + \psi_{22} + \ldots, \qquad \psi_{02} = -\rho^{2/3}\alpha_{02}(1-t)^{1/3} \tag{2.6}$$

$$\psi_{12} = \rho^{4/3}(1-t)^{2/3}[\alpha_{12}(1-t)^{-2/3}F(-2/3;\ 5/6;\ 1/2;\ t) - {}^1/_2 b_0(3/2)^{2/3}\alpha_{02}]$$

$$\psi_{22} = -\rho^2(1-t)\left[\frac{7}{3}\alpha_{22}\left(1 - \frac{4}{7}\frac{1}{1-t}\right) - \frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{12} \times\right.$$

$$\left.\times(1-t)^{-2/3}F\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}; \frac{1}{2}, t\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\alpha_{02}\left(k_1 + k_2\frac{1}{1-t}\right)\right]$$

Причем вблизи характеристики $\lambda = 0$ функции тока определяются формулами

$$\psi_{02} = (-\rho^2)^{1/3}\alpha_{02}(1-t)^{1/3}$$

$$\psi_{12} = (-\rho^2)^{2/3}(1-t)^{2/3}\left\{\alpha_{12}\left[A_1F_1\left(\frac{1}{1-t}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B_1(1-t)^{-3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] - \frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{02}\right\} \tag{2.7}$$

$$\psi_{22} = -\rho^2(1-t)\left\{\frac{7}{3}\alpha_{22}\left(1 - \frac{4}{7}\frac{1}{1-t}\right) - \frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{12}\left[A_1F_1\left(\frac{1}{1-t}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + B_1(1-t)^{-3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right] - \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\alpha_{02}\left(k_1 + k_2\frac{1}{1-t}\right)\right\}$$

$$A_1 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/6)\Gamma(5/6)} = \frac{3}{2}, \qquad B_1 = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(-3/2)}{\Gamma(-2/3)\Gamma(-1/3)} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$$

Так как, когда вблизи характеристики $\lambda = 0$ функция ψ_2 приближается к ней слева, то $\rho^2 \to -0$ $(t \to -\infty)$, а вблизи характеристики $\mu = 0$ функции тока выражаются в виде

$$\psi_{02} = \rho^{2/3}\alpha_{02}(t-1)^{1/3} \tag{2.8}$$

$$\psi_{12} = \rho^{4/3}(t-1)^{2/3}\left\{\alpha_{12}\left[AF_1\left(\frac{1}{1-t}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B(t-1)^{-3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]-\frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{01}\right\}$$

$$\psi_{22} = \rho^2(t-1)\left\{\frac{7}{3}\alpha_{22}\left(1+\frac{4}{7}\frac{1}{t-1}\right)-\frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{12}\left[AF_1\left(\frac{1}{1-t}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B(t-1)^{-3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\alpha_{02}\left(k_1-k_2\frac{1}{t-1}\right)\right.$$

В области *3* $(\eta < 0)$

$$\psi_{(3)} = \psi_{03}+\psi_{13}+\psi_{23}+\ldots \tag{2.9}$$

$$\psi_{03} = D\alpha_{03}(\mu-\lambda)^{2/3}\int\limits_{\mu'}^{-\lambda'} t^{-1/6}(1-t)^{-1/6}dt \qquad \left(\lambda' = \frac{\lambda}{\mu-\lambda},\ \mu' = \frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)$$

$$\psi_{13} = (-\rho^2)^{2/3}(1-t)^{2/3}\left\{\alpha_{13}\left[A_1F_1\left(\frac{1}{1-t}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B_1(1-t)^{-3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]-\frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{03}\right\}$$

$$\psi_{23} = -\rho^2(1-t)\left\{\frac{7}{3}\alpha_{23}\left(1-\frac{4}{7}\frac{1}{1-t}\right)-\frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{13}\left[A_1F_1\left(\frac{1}{1-t}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B_1(1-t)^{-3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]-\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\alpha_{03}\left(k_1+k_2\frac{1}{1-t}\right)\right\}$$

$$D = \frac{\Gamma(5/3)}{\Gamma^2(5/6)}, \qquad \lambda = \theta-\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2}, \qquad \mu = \theta+\frac{2}{3}(-\eta)^{3/2} \tag{2.10}$$

(Здесь λ, μ — характеристические координаты)

В области *4* $(\eta < 0)$

$$\psi_{(4)} = \psi_{04}+\psi_{14}+\psi_{24}+\ldots, \qquad \psi_{04} = -\rho^{2/3}\alpha_{04}(t-1)^{1/3} \tag{2.11}$$

$$\psi_{14} = \rho^{4/3}(t-1)^{2/3}\left\{\alpha_{14}\left[AF_1\left(\frac{1}{1-t}\right)+BF_2\left(\frac{1}{1-t}\right)(t-1)^{-3/2}\right]-\frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{04}\right\}$$

$$\psi_{24} = -\rho^2(t-1)\left\{\frac{7}{3}\alpha_{24}\left(1+\frac{4}{7}\frac{1}{t-1}\right)-\frac{b_0}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{2/3}\alpha_{14}\left[AF_1\left(\frac{1}{1-t}\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+B(t-1)^{-3/2}F_2\left(\frac{1}{1-t}\right)\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}\alpha_{04}\left(k_1-k_2\frac{1}{t-1}\right)\right\} \tag{2.12}$$

§ 3. Постоянные коэффициенты α_{k1}, α_{k2}, α_{k3}, α_{k4} $(k = 0, 1, 2)$, входящие в уравнения (2.4)—(2.12), определятся следующими условиями: при прохождении через характеристики и через скачок уплотнения функция тока должна меняться непрерывно, т. е.

$$\lim_{\rho^2\to+0}\psi_{1k} = \lim_{\rho^2\to-0}\psi_{2k} \quad \text{на характеристике } \lambda = 0 \tag{3.1}$$

$$\lim_{\rho^2\to+0}\psi_{2k} = \lim_{\rho^2\to-0}\psi_{3k} \quad \text{на характеристике } \mu = 0 \tag{3.2}$$

$$\lim_{\rho^2\to-0}\psi_{3k} = \lim_{\rho^2\to+0}\psi_{4k} \quad \text{на характеристике } \lambda = 0 \tag{3.3}$$

$$\psi_{(4)}(0,\eta_2) = \psi_{(1)}(0,\eta_1) \quad \text{на скачке уплотнения [6]} \tag{3.4}$$

Здесь η_1 и η_2 — значения функции скорости η соответственно перед и за скачком уплотнения, причем скачку уплотнения соответствует ось η, т. е. $\theta = 0$, а между η_2 и η_1 имеет место соотношение

$$\eta_2 = c_1\eta_1 + c_2\eta_1^2 + c_3\eta_1^3 + c_4\eta_1^4 + \ldots \tag{3.5}$$

$$\left(c_1 = -1,\ c_2 = -\frac{2\varkappa}{5(\varkappa+1)^{1/3}},\ c_3 = -\frac{4\varkappa^2}{25(\varkappa+1)^{2/3}}, \ldots\right)$$

Из условий (3.1) — (3.4), на основании уравнений (2.4) — (2.12) и (3.5) соответственно, получим

$$\begin{aligned}
&\alpha_{01} - \alpha_{02} = 0, \quad 2\alpha_{11} + \alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{21} - \alpha_{22} = 0\\
&\alpha_{02} - \alpha_{03} = 0, \quad 2\alpha_{12} + \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{22} - \alpha_{23} = 0\\
&\alpha_{03} - \alpha_{04} = 0, \quad \alpha_{13} + 2\alpha_{14} = 0, \quad \alpha_{23} + \alpha_{24} = {}^3/_7 b_0 ({}^3/_2)^{2/3} A\alpha_{14} + \\
&\qquad\qquad + {}^6/_7 ({}^3/_2)^{1/3} k_1 \alpha_{04}\\
&\alpha_{01} - \alpha_{04} = 0, \quad \alpha_{11} - \alpha_{14} = ({}^3/_2)^{2/3} c_2 \alpha_{04} \,/\, AF_1(1)\\
&\alpha_{21} - \alpha_{24} = {}^3/_{11} ({}^3/_2)^{4/3} [({}^2/_3)^{2/3} 2 c_2 A F_1(1)\alpha_{14} - ({}^1/_2 b_0 c_2 + c_3)\alpha_{04}]
\end{aligned}$$

$$F_1(1) = \frac{\Gamma(-{}^1/_2)\Gamma({}^1/_2)}{\Gamma(-{}^1/_6)\Gamma({}^1/_6)} = \frac{1}{6}$$

Отсюда

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \alpha_{03} = \alpha_{04} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
&\alpha_{11} = -({}^2/_3)^{1/3} c_2 \alpha_{01}, \quad \alpha_{12} = 2({}^2/_3)^{1/3} c_2 \alpha_{02}\\
&\alpha_{13} = -4({}^2/_3)^{1/3} c_2 \alpha_{03}, \quad \alpha_{14} = 2({}^2/_3)^{1/3} c_2 \alpha_{04}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{21} &= ({}^3/_2)^{4/3} ({}^2/_7 k_1 - {}^2/_{11} c_2^2 - {}^{285}/_{308} b_0 c_2 - {}^3/_{22} c_3)\alpha_{01}\\
\alpha_{22} &= ({}^3/_2)^{4/3} ({}^2/_7 k_1 - {}^2/_{11} c_2^2 - {}^{285}/_{308} b_0 c_2 - {}^3/_{22} c_3)\alpha_{02}\\
\alpha_{23} &= ({}^3/_2)^{4/3} ({}^2/_7 k_1 - {}^2/_{11} c_2^2 - {}^{285}/_{308} b_0 c_2 - {}^3/_{22} c_3)\alpha_{03}\\
\alpha_{24} &= ({}^3/_2)^{4/3} ({}^2/_7 k_1 + {}^2/_{11} c_2^2 - {}^{243}/_{308} b_0 c_2 + {}^3/_{22} c_3)\alpha_{04}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Согласно (3.6), первые постоянные коэффициенты необходимо задавать произвольно, а остальные коэффициенты определяются однозначно формулами (3.7) и (3.8).

Итак, в данном случае, т. е. в случае плоскопараллельного околозвукового течения с прямым скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения (когда параметр $\nu = {}^2/_3$), решения уравнения находятся в форме ряда, первый член которого — автомодельное решение уравнения Трикоми [1].

Авторы благодарят С. В. Фальковича за обсуждения результатов работы и ценные советы.

Поступило 29 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И. Новый пример плоскопараллельного околозвукового течения с прямым скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. Изв. высш. учебн. завед., Математика, 1959, № 2.
2. Бийбосунов И. Пример плоскопараллельного околозвукового течения газа с искривленным скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения, с функцией тока. Докл. АН СССР, 1959, т. 126, № 5.
3. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
4. Франкль Ф. И. К теории сопел Лаваля. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9.
5. Фалькович С. В. Околозвуковые плоские течения газа с особыми точками на звуковой линии. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
6. Франкль Ф. И. Обтекание профилей потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.