# О ТРАНСЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С ПРОТОКОМ

Ю. Б. ЛИФШИЦ, О. С. РЫЖОВ

*(Москва)*

Для исследования осесимметричных течений газа в трансзвуковом диапазоне скоростей Карман ввел безразмерные функции $v_x'$, $v_r'$ и независимые переменные $x'$, $r'$, которые связаны с компонентами скорости частиц $v_x$, $v_r$, плотностью $\rho$, удельным объемом $V = 1/\rho$, давлением $p$, скоростью звука $a$, удельной энтропией $s$ и цилиндрическими координатами $x$, $r$ при помощи соотношений [1]

$$v_x = a_*[1 + \varepsilon^{2/3}(2m_*)^{-1/3}v_x'], \qquad v_r = \varepsilon a_* v_r' \tag{1}$$
$$x = Lx', \qquad r = \varepsilon^{-1/3}L(2m_*)^{-1/3}r', \qquad m_* = (2\rho_*{}^3 a_*{}^2)^{-1}(\partial^2 p / \partial V^2)_s$$

Здесь $\varepsilon$ — малый параметр, $L$ — характерный размер, а звездочкой отмечено критическое состояние газа. Новые искомые функции $v_x'$ и $v_r'$ находятся в результате решения системы дифференциальных уравнений

$$-v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} = 0, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial x} \tag{2}$$

где для краткости опущены штрихи над всеми переменными.

В работе [2] рассмотрены частные решения системы уравнений (2) в форме многочленов по $r$

$$v_x = f_2(\xi)r^2 + f_0(\xi), \qquad v_r = g_3(\xi)r^3 + g_1(\xi)r, \qquad x = \xi r^2 + h_0(\xi) \tag{3}$$

Входящие в соотношения (3) функции параметра удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{df_2}{d\xi} = -\frac{4(\xi f_2 - g_3)}{f_2 - 4\xi^2}, \qquad \frac{dg_3}{d\xi} = \frac{2(f_2{}^2 - 4\xi g_3)}{f_2 - 4\xi^2}$$
$$\frac{df_0}{d\xi} = \frac{2g_1}{f_2 - 4\xi^2}, \qquad \frac{dg_1}{d\xi} = \frac{2(f_2 f_0 - 2\xi g_1)}{f_2 - 4\xi^2}, \qquad \frac{dh_0}{d\xi} = \frac{f_0}{f_2 - 4\xi^2} \tag{4}$$

Первые два уравнения из (4) отделяются от остальных. Их свойства были исследованы в работе [3], где они применялись для построения полей скоростей в соплах Лаваля с круглым поперечным сечением. Впервые решения вида (3) были указаны в работе [4] для уравнений коротких волн, которые описывают течения с небольшими, но резкими изменениями параметров газа в узких областях, прилегающих к фронтам ударных волн.

Частные решения (3) приводят к потоку с параболическим скачком уплотнения

$$x = \xi_2 r^2 + h_0(\xi_2), \qquad \xi_2 = \mathrm{const}$$

на фронте которого должны выполняться два граничных условия. К первому из них относится уравнение ударной поляры Буземана [5], второе состоит в требовании непрерывности тангенциальной к ударному фронту составляющей вектора скорости. Удовлетворение названных граничных условий приводит к задаче Коши [2]

$$f_2(\xi_2) = 8\xi_2{}^2, \qquad g_3(\xi_2) = -16\xi_2{}^3, \qquad f_0(\xi_2) = -v_{x\infty}, \qquad g_1(\xi_2) = 4v_{x\infty}\xi_2 \tag{5}$$

для функций, входящих в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4). Постоянная $v_{x\infty} > 0$ определяется скоростью набегающего равномерного сверхзвукового потока, величина $h_0(\xi_2)$ задает положение скачка.

Построим теперь при помощи решения (3) тело вращения с протоком, которое обтекается газом с небольшой сверхзвуковой скоростью. В качестве характерного размера $L$ в формулах (1) выберем радиус протока, а за малый параметр $\varepsilon$ возьмем угол $\vartheta_0$ острия обичайки, причем будем считать его настолько малым, что скачок уплотнения является присоединенным. Поместим начало координат на оси симметрии течения так, чтобы передней кромке обтекаемого тела соответствовало положение $x = 0$. Отсюда находим

$$h_0(\xi_2) = -\vartheta_0{}^{2/3}(2m_*)^{2/3}\xi_2 \tag{6}$$

Решение задачи Коши (5), (6) для системы уравнений (4) дает искомое поле скоростей. Форма контура $r = R(x)$ обтекаемого тела в исходных переменных (1) задается равенствами

$$R = L\left\{1 + \vartheta_0^{4/3}(2m_*)^{1/3}\int\limits_{\xi_2}^{\xi}[\vartheta_0^{2/3}(2m_*)^{2/3}g_3(\xi) + g_1(\xi)]\left[\vartheta_0^{2/3}(2m_*)^{2/3} + \frac{f_0(\xi)}{f_2(\xi) - 4\xi^2}\right]d\xi\right\}$$

$$x = L[\vartheta_0^{2/3}(2m_*)^{2/3}\xi + h_0(\xi)] \qquad (7)$$

Остается еще выразить параметр $\xi_2$ через величины $v_{x\infty}$ и $\vartheta_0$. Для этой цели проще всего использовать требование, чтобы скорость за скачком уплотнения на передней кромке обтекаемого тела была направлена вдоль его контура. Используя соотношения (1) и начальные данные (5), получаем для $\xi_2$ кубическое уравнение

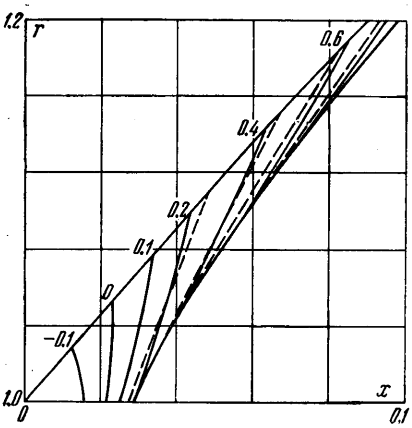
$$\xi_2^3 - \frac{v_{x\infty}}{4\vartheta_0^{2/3}(2m_*)^{2/3}}\xi_2 + \frac{1}{32\vartheta_0 m_*} = 0$$

В качестве решения последнего надо взять корень

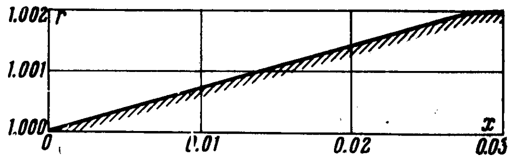
$$\xi_2 = \frac{v_{x\infty}^{1/2}}{3^{1/2}\vartheta_0^{1/3}(2m_*)^{1/3}}\cos\frac{\pi - \varphi}{3}, \qquad \cos\varphi = \frac{3^{3/2}}{4v_{x\infty}^{3/2}}$$

соответствующий более слабому из двух возможных скачков уплотнения, которые образуются при обтекании бесконечного клина с заданным полууглом раствора $\vartheta_0$.

Одно из полей течений приведено на фиг. 1, где выстроены линии постоянной скорости $v_x(x, r) = \text{const}$, ударная волна и наклоненные по направлению движения газа $C_+$ — характеристики. На фиг. 2 показано возмущающее поток тело вращения, его контур определялся согласно формулам (7). Число Маха $M_\infty$ набегающего потока в расчетах было принято равным 1.2 ($v_{x\infty} = 1.229$), угол заострения передней кромки тела $\vartheta_0 = 0.072$, а коэффициент $m^* = 1{,}2$ (что соответствует идеальному газу с показателем адиабаты Пуассона $\varkappa = 1.4$). При выбранных значениях параметров скорость на теле непосредственно за скачком уплотнения получается дозвуковой, затем постепенно она увеличивается до сверхзвуковой.




Фиг. 1




Фиг. 2

Наиболее интересной особенностью рассматриваемых течений является возникновение в сверхзвуковой области поля скоростей предельной линии (фиг. 1). Ее появление следует из того факта, что вдоль прямых $r = \text{const}$ координата $x(\xi)$ достигает максимума. В параметрическом виде предельная линия определяется формулами

$$x = h_0(\xi) - \frac{\xi f_0(\xi)}{f_2 - 4\xi^2}, \qquad r = \left(-\frac{f_0'(\xi)}{f_2 - 4\xi^2}\right)^{1/2} \qquad (8)$$

В точках кривой (8) производные составляющих вектора скорости по координатам обращаются в бесконечность, а радиус кривизны линий тока равен нулю. Предельная линия — одновременно огибающая кривых $v_x(x, r) = \text{const}$ и волн разрежения, которые сходят с нее и заканчиваются на скачке уплотнения. Рассматриваемая линия начинается на теле, где его контур имеет точку возврата, распространяется вниз по потоку и достигает ударного фронта, касаясь последнего. В точке касания скачка уплотнения с огибающей волн разрежения он вырождается в характеристику с нулевым значением избыточного давления.

Одновременно из точки пересечения контура тела с предельной линией исходит наклоненная вниз по потоку $C_+$ — характеристика, вплоть до которой поле скоростей задается аналитическими функциями. Дальнейшее аналитическое продолжение течения за указанную характеристику невозможно: оно не соответствует никакому реальному телу вращения. Кроме того, такое продолжение означало бы, что в сверхзвуковом потоке с $M_\infty > 1$ скачок, имеющий форму параболы $\xi = \xi_2 = \mathrm{const}$, должен выродиться в характеристику на конечном расстоянии от места возникновения. Но, как известно [6], затухание ударных волн происходит асимптотически при $r \to \infty$. Именно этот факт приводит к тому, что в решениях (3) содержится огибающая волн разрежения; аналогичную структуру должны иметь и поля плоскопараллельных течений, подробно рассмотренные в работе [2].

Поступило 15 V 1966

## ЛИТЕРАТУРА


1. Karman Th. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
2. Заславский Б. И., Клепикова Н. А. Об одном классе точных частных решений уравнений околозвуковых течений газа. ПМТФ, 1965, № 6.
3. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лаваля. ПММ, 1958, т. 22, вып. 4.
4. Березин О. А., Гриб А. А. Нерегулярное отражение плоской ударной волны в воде от свободной поверхности. ПМТФ, 1960, № 2.
5. Busemann A. Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. Liftfahrt — Forschung, 1942, Bd. 19, Lfg. 4.
6. Ландау Л. Об ударных волнах на далеких расстояниях от места их возникновения. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.


# РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЧАПЛЫГИНА В ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОМ ОКОЛОЗВУКОВОМ ТЕЧЕНИИ С ПРЯМЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

И. БИЙБОСУНОВ, Н. КАРЫБЕКОВ

*(Фрунзе)*

В работе [1] Ф. И. Франклем в случае, когда точное уравнение движения Чаплыгина заменяется уравнением Трикоми, был построен пример плоскопараллельного околозвукового течения с прямым скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения [1]. Это течение — аналог течения точечного вихря и имеет в качестве линии тока концентрические окружности, причем везде обеспечивается однозначная зависимость вектора скорости от декартовых координат. В данной работе указанный пример обобщен на случай уравнения Чаплыгина, причем скачок уплотнения считается прямым.

§ 1. Исходим из уравнения Чаплыгина в форме С. В. Фальковича [3]

$$\partial\varphi / \partial\theta = -B(\eta)\, \partial\psi / \partial\eta, \qquad \partial\varphi / \partial\eta = \eta\, B(\eta)\, \partial\psi / \partial\theta \tag{1.1}$$

Здесь $\varphi$ — потенциал скорости, $\psi$ — функция тока, $\theta$ — угол наклона скорости, $\eta$ — функция скорости, введенная Ф. И. Франклем ([4]).

Исключение потенциала скорости из (1.1) приводит к уравнению

$$\eta \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2} + b(\eta)\frac{\partial\psi}{\partial\eta} = 0, \qquad b(\eta) = \frac{d}{d\eta}\ln B(\eta) \tag{1.2}$$

В окрестности $\eta = 0$ имеем разложение

$$b(\eta) = b_0 + b_1\eta + b_2\eta^2 + \ldots + b_m\eta^m$$

$$\left(b_0 = -\frac{2\varkappa + 5}{5(\varkappa + 1)^{1/3}},\ b_1 = \frac{46\varkappa^2 + 10\varkappa + 125}{175(\varkappa + 1)^{2/3}}, \ldots\right) \tag{1.3}$$

[1] Впоследствии этот пример был обобщен И. Бийбосуновым с целью получения искривленного скачка уплотнения [2].