

ЛИТЕРАТУРА

1. Гинзбург И. П. Прикладная гидрогазодинамика. Изд. Ленингр. ун-та, 1958.
2. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. Физматгиз, 1962.
3. Васильев О. Ф., Хапилова Н. С. Уравнения движения тонкого слоя жидкости по поверхности вращающегося тела вращения. ПМТФ, 1965, № 3.
4. Сироткин Я. А. К постановке прямой задачи вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашине. Инж. ж., 1963, № 2.
5. Сироткин Я. А. К постановке двумерных задач вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашине. Инж. ж., 1964, № 2.
6. Logenz H. Neue Theorie und Berechnung der Kreisräder. Berlin, 1906.
7. Сироткин Я. А. К постановке обратной осесимметричной задачи вихревого течения идеальной несжимаемой жидкости в турбомашине. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДВУМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА
В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ**

В. И. ПОЛЕЖАЕВ (Москва)

Приводится разностная схема, излагаются результаты численного решения системы двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого вязкого теплопроводного газа. Решение стационарной задачи осуществляется в результате установления при $t \rightarrow \infty$.

Рассматриваются течение и перенос тепла при естественной конвекции в сжимаемом газе, заключенном в замкнутой прямоугольной области между двумя вертикальными стенками с различными температурами и теплоизолированными основаниями. В результате численного решения получены значения средней теплопередачи и картина возникновения и развития вторичных течений при больших числах Грасгофа.

1. Система двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого вязкого теплопроводного газа состоит из уравнений количества движения, неразрывности и энергии, которые запишем в следующем безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\kappa \rho C_M^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \\
 &+ \frac{1}{\rho C_R} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - C_{F_x} \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\kappa \rho C_M^2} \frac{\partial p}{\partial y} + \\
 &+ \frac{1}{\rho C_R} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \mu \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - C_{F_y} \\
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\kappa}{\rho c_v C_R P} \left(\frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \\
 &- \frac{\rho C_1}{\rho c_v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\mu C_e}{\rho c_v C_R} \Phi \\
 \Phi &= 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь t — время; u, v — проекции вектора скорости V на оси координат x, y соответственно; p — давление; ρ — плотность; T — температура; c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; μ — коэффициент динамической вязкости; k — коэффициент теплопроводности.

Безразмерные масштабные комплексы в системе (1.1) имеют вид

$$C_R = \frac{V_1 L \rho_1}{\mu_1}, \quad C_M = \frac{V_1}{\sqrt{\kappa p_1 / \rho_1}}, \quad \kappa = \frac{c_{p1}}{c_{v1}}, \quad P = \frac{\mu_1 c_{p1}}{k_1} \quad (1.2)$$

$$C_1 = \frac{p_1}{\rho_1 c_{v1} T_1}, \quad C_e = \frac{V_1^2}{c_{v1} T_1}, \quad C_{F_x} = \frac{XL}{V_1^2}, \quad C_{F_y} = \frac{YL}{V_1^2}$$

Здесь X, Y — проекции вектора внешних сил F на оси x, y соответственно; $V_1, \rho_1, T_1, p_1, L, \mu_1, k_1, c_{p1}, c_{v1}$ — соответственно масштабы скорости, плотности, температуры, давления, длины, вязкости, теплопроводности, удельной теплоемкости при постоянном давлении, удельной теплоемкости при постоянном объеме. За масштаб времени t_1 принята величина L/V_1 .

Для замыкания системы (1.1) задаются уравнения состояния и зависимости коэффициентов вязкости, теплопроводности и удельной теплоемкости от температуры

$$p = p(\rho, T), \quad \mu = \mu(T), \quad k = k(T), \quad c_v = c_v(T) \quad (1.3)$$

Рассматривается замкнутая область, граница Γ которой есть линия тока с заданным распределением скорости V_Γ и заданным тепловым режимом (первого, второго или третьего рода).

В начальный момент времени $t = 0$ заданы все неизвестные функции

$$u^0 = u(x, y, 0), \quad v^0 = v(x, y, 0), \quad \rho^0 = \rho(x, y, 0), \quad T^0 = T(x, y, 0) \quad (1.4)$$

2. Для численного решения системы (1.1) — (1.4) применяется разностная схема, которая строится по аналогии с известной схемой переменных направлений, предложенной в работах [1, 2] для решения уравнения теплопроводности. В этой схеме решение двумерной системы сводится к последовательному решению одномерных систем. Для решения одномерных систем здесь используется аналог схемы [3], в которой инерционные и вязкостные члены в уравнении количества движения вынесены на верхний, а давление — на нижний слой по времени. В этом случае решение одномерной системы сводится к последовательному решению систем разностных уравнений с трехдиагональными матрицами.

Введем пространственно-временную сетку с координатами узлов

$$x_i = ih, \quad y_j = jl, \quad t_n = n\tau \quad (i = 1, \dots, M; j = 1, \dots, N; n = 0, 1, \dots, K)$$

Здесь h, l — шаги сетки по координатам x, y соответственно, τ — шаг по времени. Обозначение функции в узлах сетки

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(ih, jl, n\tau) = \varphi_{ij}^n$$

Аппроксимирующая разностная схема имеет вид

$$\begin{aligned} (E - 1/2\tau L_{1u})u^{n+1/2} &= (E + 1/2\tau L_{2u})u^n + 1/2\tau f_u^{n+1/2} \\ (E - 1/2\tau L_{1v})v^{n+1/2} &= (E + 1/2\tau L_{2v})v^n + 1/2\tau f_v^{n+1/2} \\ (E - 1/2\tau L_{1\rho})\rho^{n+1/2} &= (E + 1/2\tau L_{2\rho})\rho^n \\ (E - 1/2\tau L_{1T})T^{n+1/2} &= (E + 1/2\tau L_{2T})T^n + 1/2\tau f_T^{n+1/2} \\ (E - 1/2\tau L_{2u})u^{n+1} &= (E + 1/2\tau L_{1u})u^{n+1/2} + 1/2\tau f_u^{n+1} \\ (E - 1/2\tau L_{2v})v^{n+1} &= (E + 1/2\tau L_{1v})v^{n+1/2} + 1/2\tau f_v^{n+1} \\ (E - 1/2\tau L_{2\rho})\rho^{n+1} &= (E + 1/2\tau L_{1\rho})\rho^{n+1/2} \\ (E - 1/2\tau L_{2T})T^{n+1} &= (E + 1/2\tau L_{1T})T^{n+1/2} + 1/2\tau f_T^{n+1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь E — единичный оператор. Разностные одномерные операторы $L_{1u}, L_{1v}, L_{1\rho}, L_{1T}, L_{2u}, L_{2v}, L_{2\rho}, L_{2T}$ имеют вид

$$L_{1u}u^{n+1/2} = \frac{4}{3\rho_{i,j}^n C_R} \frac{\mu_{i+1/2, j}^{n+1/2} u_{i+1, j}^{n+1/2} - (\mu_{i+1/2, j} + \mu_{i-1/2, j}) u_{i, j}^{n+1/2} + \mu_{i-1/2, j} u_{i-1, j}^{n+1/2}}{h^2} - u_{i, j}^n \frac{u_{i+1, j}^{n+1/2} - u_{i-1, j}^{n+1/2}}{2h}$$

$$\begin{aligned}
 L_{1v}v^{n+1/2} &= \frac{1}{\rho_{i,j}^n C_R} \frac{\mu_{i+1/2, j}^{n+1/2} v_{i+1, j}^{n+1/2} - (\mu_{i+1/2, j} + \mu_{i-1/2, j}) v_{i, j}^{n+1/2} + \mu_{i-1/2, j} v_{i-1, j}^{n+1/2}}{h^2} \\
 &\quad - u_{i, j}^{n+1/2} \frac{v_{i+1, j}^{n+1/2} - v_{i-1, j}^{n+1/2}}{2h} \\
 L_{1\rho}\rho^{n+1/2} &= - \frac{u_{i+1, j}^{n+1/2} \rho_{i+1, j}^{n+1/2} - u_{i-1, j}^{n+1/2} \rho_{i-1, j}^{n+1/2}}{2h} \\
 L_{1T}T^{n+1/2} &= \frac{\kappa}{\rho_{i,j}^{n+1/2} C_{v i, j} C_{R P}} \frac{k_{i+1/2, j} T_{i+1, j}^{n+1/2} - (k_{i+1/2, j} + k_{i-1/2, j}) T_{i, j}^{n+1/2} + k_{i-1/2, j} T_{i-1, j}^{n+1/2}}{h^2} \\
 &\quad - u_{i, j}^{n+1/2} \frac{T_{i+1, j}^{n+1/2} - T_{i-1, j}^{n+1/2}}{2h} \tag{2.2} \\
 L_{2u}u^{n+1} &= \frac{1}{\rho_{i,j}^{n+1/2} C_R} \frac{\mu_{i, j+1/2}^{n+1} v_{i, j+1}^{n+1} - (\mu_{i, j+1/2} + \mu_{i, j-1/2}) u_{i, j}^{n+1} + \mu_{i, j-1/2} u_{i, j-1}^{n+1}}{l^2} \\
 &\quad - v_{i, j}^{n+1/2} \frac{u_{i, j+1}^{n+1} - u_{i, j-1}^{n+1}}{2l} \\
 L_{2v}v^{n+1} &= \frac{4}{3\rho_{i,j}^{n+1/2} C_R} \frac{\mu_{i, j+1/2}^{n+1} v_{i, j+1}^{n+1} - (\mu_{i, j+1/2} + \mu_{i, j-1/2}) v_{i, j}^{n+1} + \mu_{i, j-1/2} v_{i, j-1}^{n+1}}{l^2} \\
 &\quad - v_{i, j}^{n+1/2} \frac{v_{i, j+1}^{n+1} - v_{i, j-1}^{n+1}}{2l} \\
 L_{2\rho}\rho^{n+1} &= - \frac{v_{i, j+1}^{n+1} \rho_{i, j+1}^{n+1} - v_{i, j-1}^{n+1} \rho_{i, j-1}^{n+1}}{2l} \\
 L_{2T}T^{n+1} &= \frac{\kappa}{\rho_{i,j}^{n+1} C_{v i, j} C_{R P}} \frac{k_{i, j+1/2} T_{i, j+1}^{n+1} - (k_{i, j+1/2} + k_{i, j-1/2}) T_{i, j}^{n+1} + k_{i, j-1/2} T_{i, j-1}^{n+1}}{l^2} \\
 &\quad - v_{i, j}^{n+1} \frac{T_{i, j+1}^{n+1} - T_{i, j-1}^{n+1}}{2l}
 \end{aligned}$$

Операторы правых частей f_u, f_v, f_T имеют вид

$$\begin{aligned}
 f_u^{n+1/2} &= - \frac{1}{\kappa \rho_{i,j}^n C_M^2} \frac{p_{i+1, j}^n - p_{i-1, j}^n}{2h} + \delta_v^n - C_{F_x} \\
 \delta_v^n &= \frac{1}{4hl_0^n C_R} \left[\left(\mu_{i, j+1} - \frac{2}{3} \mu_{i+1, j} \right) v_{i+1, j+1}^n + \left(\frac{2}{3} \mu_{i+1, j} - \mu_{i, j-1} \right) v_{i+1, j-1}^n + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{2}{3} \mu_{i-1, j} - \mu_{i, j+1} \right) v_{i-1, j+1}^n + \left(\mu_{i, j-1} - \frac{2}{3} \mu_{i-1, j} \right) v_{i-1, j-1}^n \right] \\
 f_v^{n+1/2} &= - \frac{1}{\kappa \rho_{i,j}^n C_M^2} \frac{p_{i, j+1}^n - p_{i, j-1}^n}{2l} + \delta_u^{n+1/2} - C_{F_v}
 \end{aligned}$$

$$\delta_u^{n+1/2} = \frac{1}{4hl\rho_{i,j}^n C_R} \left[\left(\mu_{i+1,j} - \frac{2}{3} \mu_{i,j+1} \right) u_{i+1,j+1}^{n+1/2} + \left(\frac{2}{3} \mu_{i,j-1} - \mu_{i+1,j} \right) u_{i+1,j-1}^{n+1/2} + \left(\frac{2}{3} \mu_{i,j+1} - \mu_{i-1,j} \right) u_{i-1,j+1}^{n+1/2} + \left(\mu_{i-1,j} - \frac{2}{3} \mu_{i,j-1} \right) u_{i-1,j-1}^{n+1/2} \right]$$

$$f_\tau^{n+1/2} = \frac{\mu_{i,j} c_e}{\rho_{i,j}^{n+1/2} c_{v,i,j}} \Phi^{n+1/2} - \frac{p_{i,j}^{n+1/2}}{\rho_{i,j}^{n+1/2} c_{v,i,j}} C_1 \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2l} \right)^{n+1/2} \quad (2.3)$$

$$\Phi^{n+1/2} = \left\{ 2 \left[\left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right)^2 + \left(\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2l} \right)^2 \right] + \left(\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2l} + \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2h} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2l} \right)^2 \right\}^{n+1/2}$$

$$p_{i,j}^n = p(\rho_{i,j}^n, T_{i,j}^n), \quad c_{v,i,j} = c_v(T_{i,j}^n), \quad k_{i,j} = k(T_{i,j}^n)$$

$$\mu_{i,j} = \mu(T_{i,j}^n), \quad \mu_{i+1/2,j} = \mu(T_{i+1/2,j}^n), \quad T_{i+1/2,j}^n = 1/2(T_{i+1,j}^n + T_{i,j}^n)$$

Аналогично определяются коэффициенты вязкости и теплопроводности с другими дробными индексами.

Порядок аппроксимации схемы (2.1)–(2.3) на целом шаге τ равен $O(\tau + h^2 + l^2)$. В расчетах, результаты которых рассматриваются ниже (п. 4), найдено достаточное условие устойчивости схемы в виде

$$\tau \leq \min \{h, l\} C_M \quad (2.4)$$

Здесь, как и в разностной схеме [3] для одномерной системы, шаг по времени не зависит от $C_R h^2$.

В процессе вычислений в оперативной памяти вычислительной машины хранятся поля величин $u_{i,j}$, $v_{i,j}$, $\rho_{i,j}$, $T_{i,j}$ на одном временном слое. Каждое из разностных уравнений (2.1) имеет трехдиагональную матрицу и решается методом прогонки; в промежуточных вычислениях в оперативной памяти хранятся две строки прогоночных коэффициентов. Первые 4 уравнения в системе (2.1) образуют блоки горизонтальных (B_x) прогонок, а последующие — блоки вертикальных (B_y) прогонок. Из них легко выделяются блоки для решения системы одномерных уравнений [3] и некоторых приближений к полной системе уравнений Навье — Стокса.

Стационарные решения системы (2.1)–(2.3) получаются как предел нестационарных в результате установления при $t \rightarrow \infty$. Такой подход к решению стационарных задач для системы уравнений газовой динамики без учета вязкости и теплопроводности газа осуществлялся в работе [4], а для системы уравнений, аналогичной (1.1), — в работе [5]. В экспериментальных расчетах получено, что на стационарном режиме решение (2.1)–(2.3) не зависит от шага по времени τ и имеет порядок аппроксимации $O(h^2 + l^2)$.

3. Рассмотрим задачу о течении и теплообмене сжимаемого вязкого теплопроводного газа при естественной конвекции в замкнутой прямоугольной области с отношением сторон H/L . Одна из боковых поверхностей поддерживается при постоянной по высоте H температуре T_{w2} , а другая — при T_{w1} ($T_{w2} > T_{w1}$), верхнее и нижнее основания теплоизолированы, сила тяжести направлена вертикально вниз. Газ предполагается совершенным с уравнением состояния $p = \rho RT$ (R — газовая постоянная).

Примем за масштаб температуры температуру холодной стенки T_{w1} , масштаб скорости V_1 — скорость звука при температуре T_{w1} , $V_1 = \sqrt{\kappa RT_{w1}}$, масштаб плотности ρ_1 — плотность на нагретой стенке ρ_{w2} , масштаб длины — ширину прямоугольной области L . Тогда в системе масштабных комплексов (1.2)

$$C_R \cong \frac{\sqrt{\kappa RT_{w1}} L \rho_{w2}}{\mu_{w1}}, \quad C_M = 1, \quad C_{F_x} = 0, \quad C_{F_y} = \frac{gL}{\kappa RT_{w1}}, \quad (3.1)$$

$$C_1 = \kappa - 1, \quad C_e = \kappa(\kappa - 1)$$

Удельные теплоемкости c_p , c_v и число Прандтля $P = \mu c_p / k$ примем постоянными; коэффициенты вязкости и теплопроводности зависят от температуры по формуле Сатерленда (в принятой нормировке)

$$\mu = k = T^{3/2} \frac{1 + C^+}{T + C^+} \quad \left(C^+ = \frac{C}{T_{w1}} \right) \quad (3.2)$$

Здесь C — константа Сатерленда.

Система определяющих критериев подобия принимается в виде

$$G, \frac{H}{L}, P, \frac{T_{w2}}{T_{w1}}, \kappa, \frac{C}{T_{w1}}, C_{FH} \quad \left(G = \frac{gL^3 \rho_{w2}^2}{\mu_{w1}^2} \frac{T_{w2} - T_{w1}}{T_{w1}}, C_{FH} = \frac{gH}{\kappa R T_{w1}} \right) \quad (3.3)$$

Здесь G — критерий Грасгофа, отнесенный к плотности на нагретой стенке, C_{FH} — критерий весовой сжимаемости. Эти два критерия выражаются через масштабные комплексы (1.2) в виде

$$G = C_R^2 C_F \frac{T_{w2} - T_{w1}}{T_{w1}}, \quad C_{FH} = C_F \frac{H}{L} \quad (3.4)$$

Система граничных условий имеет вид

$$\begin{aligned} x = 0, \quad 0 \leq y \leq H/L; & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_{w2} / T_{w1}, \\ x = 1, \quad 0 \leq y \leq H/L; & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad T = 1 \\ y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1; & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (\partial T / \partial y)_{y=0} = 0 \\ y = H/L, \quad 0 \leq x < 1; & \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (\partial T / \partial y)_{y=H/L} = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Плотность газа на границе не задана условиями задачи и находится из уравнения неразрывности (1.1) с учетом граничных условий (3.5) для составляющих скорости на границе. Например, для левой границы из (1.1) и (3.5) следует

$$\partial \rho / \partial t + \partial \rho u / \partial x = 0 \quad (x = 0, \quad 0 \leq y \leq H/L) \quad (3.6)$$

Это соотношение аппроксимируется на границе по формуле первого порядка

$$\frac{\rho_{1,j}^{n+1/2} - \rho_{1,j}^n}{1/2\tau} = - \frac{\rho_{1,j}^n u_{2,j}^{n+1/2}}{h}, \quad \text{или} \quad \rho_{1,j}^{n+1/2} = \rho_{1,j}^n - 1/2\tau \rho_{1,j}^n u_{2,j}^{n+1/2} \quad (3.7)$$

и включается в систему горизонтальных прогонок для уравнения неразрывности (2.1). Аналогично аппроксимируются соотношения на правой границе, верхнем и нижнем основаниях.

Условие равенства нулю теплового потока на верхнем и нижнем основаниях (3.5) аппроксимируется по трехточечной формуле второго порядка, например

$$\frac{3T_{i1} - 4T_{i2} + T_{i3}}{2L} = 0 \quad (y = 0, \quad 0 < x < 1) \quad (3.8)$$

Это оказывается существенным для исключения утечек тепла через контур.

Средний поток тепла определяется по распределению местного потока $q_w(y)$

$$q_{w+} = \frac{1}{H/L} \int_0^{H/L} q_w(y) dy \quad \left(q_w = k_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_w \right) \quad (3.9)$$

Первая производная в выражении для q_w аппроксимируется по трехточечной формуле, аналогичной (3.8), а интеграл (3.9) — по формуле трапеций. По среднему тепловому потоку вычисляется среднее число Нуссельта на стенке

$$N^+ = \frac{q_{w+} L}{k_{w1} (T_{w2} - T_{w1})} = \frac{k'}{k} \quad (3.10)$$

Здесь k' — эквивалентный коэффициент теплопередачи. На стационарном режиме проверяется выполнение интегральных балансов тепла и расхода

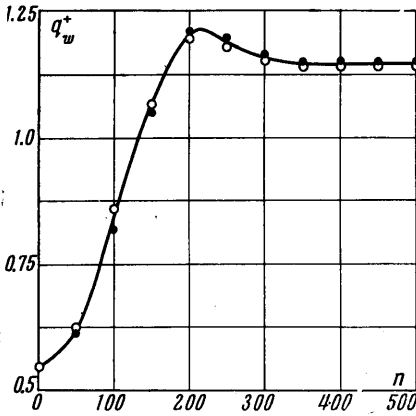
$$q_{w1+} = q_{w2+}, \quad \int_0^1 \rho v dx = 0, \quad \int_0^{H/L} \rho u dy = 0 \quad (3.11)$$

Из системы (1.1) при $u^0(x, y) = 0$, $v^0(x, y) = 0$ следует, что в неподвижном газе гидростатическое равновесие в поле силы тяжести при граничных условиях (3.5) невозможно, и должно возникнуть движение газа, приводящее к установлению гидро-

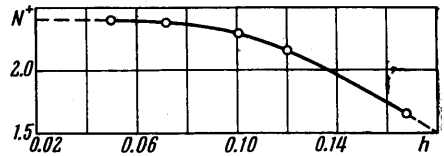
динамического равновесия. Процесс установления гидродинамического равновесия из произвольного начального поля p^0, ρ^0, T^0 неподвижного газа состоит из довольно сложной последовательности процессов распространения температурных и гравитационных волн, взаимодействия их друг с другом и со стенками. Для более быстрого выхода на стационарный режим (если он существует) желательно исключить из рассмотрения часть из этих процессов за счет выбора начального поля, в котором имеется частичное равновесие. Приведем два типичных случая рассматриваемой задачи.

1) Начальное поле — неподвижный газ в тепловом и гидростатическом равновесии при отсутствии силы тяжести

$$u^0 = 0, \quad v^0 = 0, \quad p^0 = \text{const}, \\ \rho^0 = p^0 / T^0$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь T^0 — решение уравнения теплопроводности с граничными условиями (3.5). Движение начинается из состояния равновесия при внезапно приложенной силе тяжести.

2) Начальное поле при наличии силы тяжести имеет равновесие в вертикальном направлении

$$u^0 = 0, \quad v^0 = 0, \quad \partial p^0 / \partial y = -\kappa \rho^0 C_F, \quad \rho^0 = p^0 / T^0$$

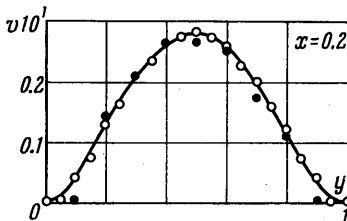
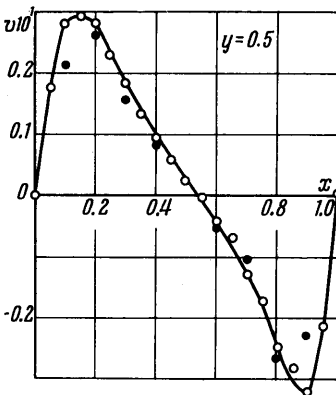
Здесь T^0 — решение уравнения теплопроводности с граничными условиями (3.5). Движение вызывается перепадом давления в горизонтальном направлении.

4. Результаты расчета одного варианта из состояния равновесия неподвижного газа при внезапно приложенной силе тяжести, значения критериев (3.3)

$$G = 1.25 \cdot 10^4, \quad H/L = 1, \quad P = 0.71 \\ T_{w2} / T_{w1} = 1.5, \quad \kappa = 1.405, \quad C / T_{w1} = 0.37 \\ C_{FH} = 0.05 \quad (4.1)$$

и соотношениях шагов сетки $\tau = h = l$ приводятся на фиг. 1—6. На фиг. 1 показан процесс установления среднего теплового потока q_w^+ на нагретой и холодной стенке (темные точки — q_{w2}^+ — нагретая стенка, светлые точки — q_{w1}^+ — холодная стенка) на сетке с числом узлов 11×11 . Зависимость среднего числа N^+ от шага разностной сетки, полученная на сетках с числом узлов $7 \times 7, 9 \times 9, 11 \times 11, 15 \times 15, 21 \times 21$, приведена на фиг. 2 ($h = l = 1 / (M - 1)$). Погрешность в числе N^+ , вызванная конечной величиной шага сетки, падает при $h \rightarrow 0$ и на сетке 21×21 , по-видимому, не превосходит 1%, а на сетке 11×11 составляет около 5%. Увеличение шага сетки всегда приводит к систематическому занижению средней теплопередачи. Сравнение местных значений вертикальной составляющей скорости, плотности и температуры, рассчитанных на сетках 11×11 и 21×21 , приводится на фиг. 3—5 (темные точки — сетка 11×11 , светлые точки — сетка 21×21).

На стационарном режиме невязки в интегральном балансе тепла по отношению к q_{w2}^+ и расхода через горизонтальное сечение при $y = 0.5$ по отношению к расходу $(\rho v)^+$ восходящего потока на сетке 21×21 равны соответственно 0.86 и 0.1%.



Фиг. 3

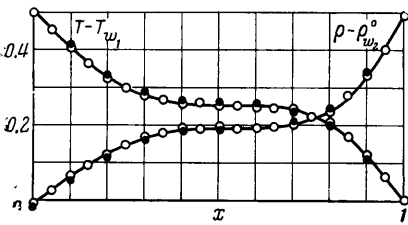
Для построения картины линий тока на стационарном режиме определялось поле функций тока $\psi(x, y)$, которое задается системой уравнений

$$\partial\psi / \partial x = -\rho v, \quad \partial\psi / \partial y = \rho u \quad (4.2)$$

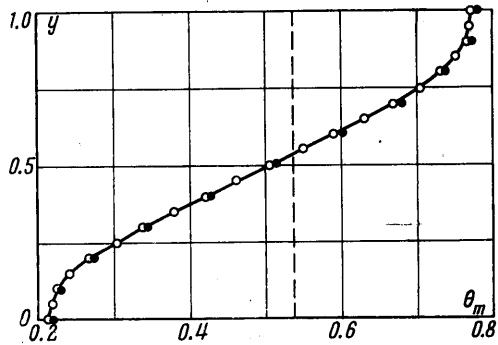
Дифференцируя первое из уравнений по x , второе по y и складывая, получаем краевую задачу

$$\partial^2\psi / \partial x^2 + \partial^2\psi / \partial y^2 = \omega^+ \quad (\omega^+ = \partial\rho u / \partial y - \partial\rho v / \partial x) \quad (4.3)$$

На контуре задано $\psi = 0$, значение ω^+ известно. По полю функций тока выстраиваются линии тока $\psi = \text{const}$, направление на которых определяется построением полного вектора скорости V . Линии тока для варианта (4.1) ($h = l = 0.05$) показаны на фиг. 6. Результаты, представленные на фиг. 3–6, относятся к режиму, в котором у



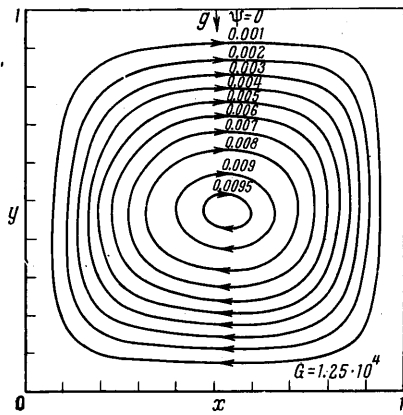
Фиг. 4



Фиг. 5

стенки сформировался температурный пограничный слой. Структура поля температур в этом режиме на моделях $H/L \geq 2.5$ исследовалась при помощи интерферометра в работе [6].

В состоянии гидродинамического равновесия конвективный перенос тепла осуществляется газом, циркулирующим по замкнутым траекториям (фиг. 6). Движение газа вызывается неравномерным распределением плотностей (и подъемных сил). Плотность газа у нагретой стенки меньше, чем у холодной (фиг. 4), и газ у нагретой стенки поднимается, а у холодной опускается (фиг. 3, 6). Основной перенос тепла в горизонтальном направлении при $G = 1.25 \cdot 10^4$ сосредоточен вблизи стенок, а в центральной части имеется область с постоянной температурой по оси x (фиг. 4). Струйки тока, притекающие от холодной стенки, понижают температуру у нижнего основания, а притекающие от нагретой стенки повышают температуру у верхнего основания, что вызывает переток тепла в вертикальном направлении. Профиль температуры θ_m по вертикали в центральном сечении $x = 0.5$ приводится на фиг. 5, где пунктиром показан профиль температуры при отсутствии движения среды, причем приняты обозначения $\theta_m = (T_m - T_{w1}) / (T_{w2} - T_{w1})$. T_m — распределение температуры в центральном сечении $x = 0.5$. Из-за влияния переменной теплопроводности профиль температуры при отсутствии движения среды смещен относительно линии $x = 0.5$.



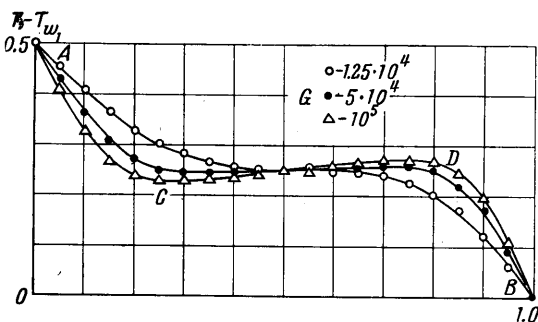
Фиг. 6

Давление в горизонтальном направлении постоянно, а в вертикальном направлении при $x = 0.5$ изменяется примерно по линейному закону. Из-за влияния переменной плотности на поле скорости, согласно балансу расхода (3.11), центр вихря смещен в сторону холодной стенки и нижнего основания.

Для изучения влияния числа Грасгофа на течение и теплопередачу проведена серия расчетов на сетке 21×21 при $G = 5 \cdot 10^4, 10^5, 5 \cdot 10^5, 10^6, 5 \cdot 10^6$ (остальные критерии в (4.1) не изменялись).

За начальное приближение в каждом из последующих вариантов этой серии выбиралось стационарное поле предыдущего варианта.

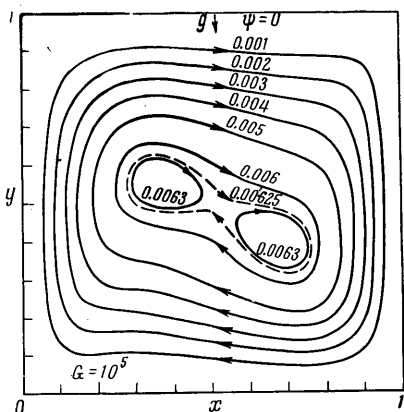
При увеличении числа Грасгофа температура во внешней части температурного слоя у нагретой стенки (C) понижается, а у холодной (D) повышается (фиг. 7). Теперь плотность газа в C выше, чем в D , и газ в точке C должен был бы опускаться по отношению к газу в точке D . Это направление движения обратно основному, в котором газ поднимается у нагретой стенки (A) и опускается у холодной (B). В результате при $G \sim 10^6$ внутри области возникают вторичные течения с замкнутыми линиями тока, образующие внутри области особенность типа «седла» (фиг. 8); их направление совпадает с направлением основного течения. В дальнейшем при



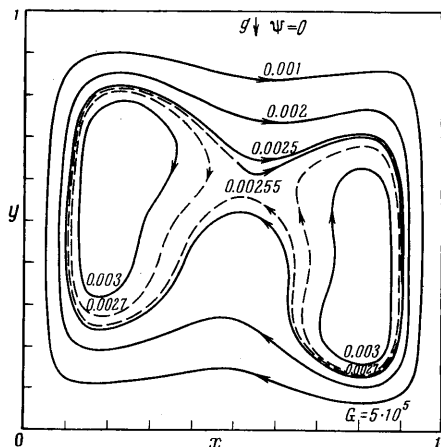
Фиг. 7

росте числа G размеры вихрей вторичного течения значительно возрастают, в образовании вторичных течений участвуют линии тока, близкие к линиям тока основного течения (фиг. 9). Особенность этой картины течения состоит в наличии градиентов скорости между линиями тока основного течения, примыкающими друг к другу сверху и снизу «седла». При росте числа Грасгофа такая картина течения значительно перестраивается (фиг. 10). Внутри области появляется система замкнутых линий тока с направлением, совпадающим с направлением основного течения и образующих внутри области особенность типа «центра». В левом и правом углах имеются по два вихря; направление внешнего вихря совпадает с направлением основного течения, а внутреннего — противоположно ему. Последняя картина течения качественно согласуется с полученной недавно Элдером [7] при наблюдении естественной конвекции на парафине и силиконовых маслах ($P = 1000$) на моделях $H/L = 10-20$.

При $G = 10^6 \div 5 \cdot 10^6$ качество разностного решения на сетке 21×21 ухудшается из-за значительных негладкостей в поле течения. Симметричная разностная ап-



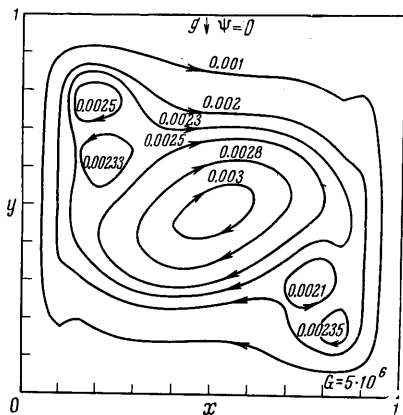
Фиг. 8



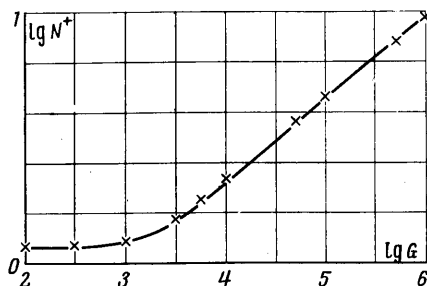
Фиг. 9

проксимация (2.2) дает при этом характерные пространственные «биения», которые затруднительно отделить от действительно имеющих градиентов в поле течения. Устойчивость разностной схемы при выполнении условия (2.4) сохранялась, однако, и при $G = 10^7$. Отметим, что из-за отсутствия аппроксимации решение на более грубых сетках 6×6 и 11×11 в этом диапазоне чисел G не сходится. В экспериментальных расчетах установлено, что, начиная с сетки 6×6 и числа $G \sim 10^4$, при увеличении G на полтора — два порядка для получения сходящегося решения шаг сетки по обоим пространственным переменным требуется уменьшать примерно вдвое.

Невязка в интегральном балансе тепла на стационарном режиме увеличивается при $G = 10^6 - 5 \cdot 10^6$ на сетке 21×21 до 12—18%, причем средний поток тепла на нагретой сетке больше, чем на холодной. В этом случае, учитывая, что погрешность, вызванная конечной величиной шага сетки, занижает средний поток тепла (фиг. 2), среднее число Нуссельта вычислялось по значению потока тепла q_{w2}^+ на нагретой стенке.



Фиг. 10



Фиг. 11

Зависимость среднего числа Нуссельта N^+ от числа Грасгофа G , вычисленная на сетке 21×21 в диапазоне $G = 10^2 - 10^6$ и остальных критериях, соответствующих (4.1), показана на фиг. 11. В диапазоне $G = 5 \cdot 10^3 - 10^6$ эта зависимость аппроксимируется формулой

$$N^+ = 0.115G^{0.32}, \quad N^+ = \frac{q_w^+ L}{k_{w1}(T_{w2} - T_{w1})}, \quad G = \frac{gL^3 \rho_w \nu^2}{\mu_{w1}^2} \left| \frac{T_{w2} - T_{w1}}{T_{w1}} \right| \quad (4.4)$$

В заключение автор благодарит Г. И. Петрова, В. Я. Лихущина и В. С. Авдуского за внимание к работе и полезные советы при ее выполнении.

Поступило 21 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Douglas J. On the numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ by implicit methods. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, vol. 3, No. 1.
2. Peaceman D. W., Rachford H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1955, vol. 3, No. 1.
3. Полежаев В. И. Численное решение системы одномерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
4. Годунов С. К., Забродин А. В., Прокопов Г. П. Разностная схема для двумерных нестационарных задач и расчет обтекания с отошедшей ударной волной. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 6.
5. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 5.
6. Eckert E. R., Carlson W. O. Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures. Internat. J. Heat and Mass Transfer, 1961, vol. 2, No. 1/2.
7. Elder J. W. Laminar free convection in a vertical slot. J. Fluid Mech., 1965, vol. 23, pt. 1.