

Отсюда следует, что

$$y = \varepsilon\psi^0 + O(\varepsilon^4) \quad (9)$$

Подставляя (7), (8), (9) в (1), получим систему уравнений для $U(\varphi^0, \psi^0)$, $V(\varphi^0, \psi^0)$

$$U \frac{\partial U}{\partial \varphi^0} = \frac{\partial V}{\partial \psi^0} + \frac{V}{\psi^0}, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi^0} = -\frac{\partial U}{\partial \psi^0} + G\psi^0 \quad \left(G = \frac{k+1}{kR} S'' \text{ в точке } K \right)$$

Эта система также имеет точное решение, аналогичное [1, 2]. Переходя к зависимым переменным u, v (7) и к независимым переменным φ, ψ , получим

$$u = A\varphi - \frac{A^2 - 2G}{4} \psi^2, \quad v = \frac{A^2}{2} \varphi\psi - \frac{A^3 - 2AG}{16} \psi^3 \quad \left(A = -(k+1) \left(\frac{\partial \lambda}{\partial s_1} \right)_K \right)$$

Легко видеть, что асимптотический характер течения здесь, вообще говоря, такой же, как и в [1]. Однако если точка K расположена за ударной волной, перед которой поток равномерный, энтропия $S(\psi)$ на оси симметрии имеет максимум. Поэтому $S'' \leq 0$ в точке K , откуда вытекает, что в этом случае звуковая линия всегда обращена выпуклостью в сторону сверхзвукового течения.

Поступило
7 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ш и ф р и н Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. МЖГ, 1966, № 6.
2. Ф а л ь к о в и ч С. В. К теории сопла Лавалья. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Г и л и н с к и й С. М., Л е б е д е в М. Г. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел с отошедшей ударной волной с малой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.

ЗАКОН СОПРОТИВЛЕНИЯ НЬЮТОНА ДЛЯ ТЕЛ, ОБРАЗОВАННЫХ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ

А. Л. ГОНОР

(Москва)

Теория ньютоновского ударного слоя для гладких поверхностей развита в работах [1-7]. Однако, если тело состоит из двух пересекающихся поверхностей, на каждой из которых имеется регулярный ударный слой, то на линии пересечения эти два слоя будут взаимодействовать. Учитывая, что ударный слой является гиперзвуковым, можно к соударению частиц со второй поверхностью снова применить схему Ньютона. В результате на линии пересечения возникнут сосредоточенные силы. Указание на возможность появления таких сил имеется в работе [2]. Ниже дается метод расчета сосредоточенных сил и указывается, аналогом какого реального течения они являются.

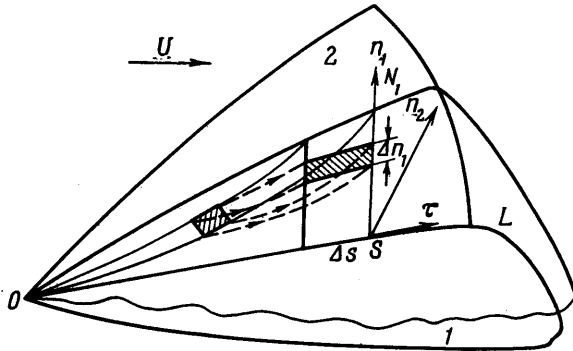
1. **Определение сил с учетом вторичного соударения.** Пусть тело (фиг. 1), состоящее из двух поверхностей (1 и 2), пересекающихся вдоль линии OL , обтекается со скоростью U в бесконечности. Около каждой поверхности образуется регулярный ударный слой, толщина которого $\sim \varepsilon$ ($\varepsilon = (\kappa - 1) / (\kappa + 1)$, κ — показатель адиабаты) в ньютоновско-бузмановском приближении стремится к нулю. Для наглядности на фиг. 1 показан только один ударный слой. Пунктиром показаны линии тока, идущие от ударной волны. Обозначим через Δs элементарный отрезок вдоль линии пересечения OL и построим на этом отрезке в направлении n_1 (единичного вектора нормали к поверхности 1) площадку до пересечения с поверхностью ударной волны. Попутно обозначим через n_2 единичный вектор нормали к поверхности 2, а через τ — единичный вектор, касательный к линии OL . Все три вектора отложим из одной точки S .

Предположим, что распределение параметров (скорости v , плотности ρ и т. д.) внутри ударного слоя нам известно (эта задача решена в указанных выше работах [1-7]). В частности, в точке S даны значения функций $v(n_1)$ и $\rho(n_1)$. Тогда нетрудно

вычислить поток импульса в единицу времени через элементарную площадку, опирающуюся на отрезок Δs (фиг. 1) и нормаль n_1 . Действительно, если единичный вектор нормали к данной площадке обозначить через $t_1 = n_1 \times \tau$, то соответствующая величина потока определяется выражением

$$\Delta \Pi_1 = \Delta s \int_0^{N_1} \rho v_{t_1} v dn_1$$

Для дальнейшего расчета необходимо сделать несколько гипотез о характере вторичного соударения ударных слоев. В качестве первой гипотезы будем считать, что



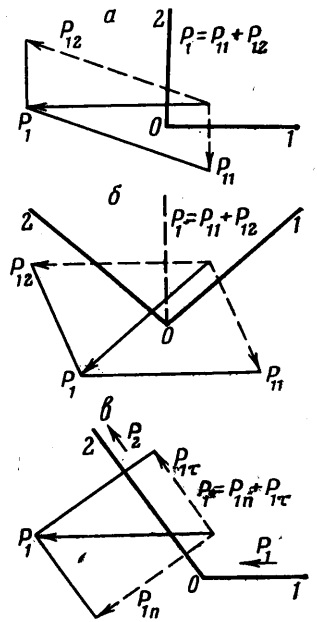
Фиг. 1

вторичное столкновение происходит в бесконечно тонком слое согласно схеме абсолютного неупругого удара. Второе предположение сделаем о величине импульса, теряющегося при ударе о вторую поверхность. На первый взгляд, можно предположить, что, как при первом столкновении, так и при втором теряется только нормальная к поверхности составляющая потока импульса. Однако это не всегда так. Рассмотрим для пояснения фиг. 2. На ней показаны схемы поперечного течения в плоскости, нормальной к поверхности 1 и 2 меньше

линии пересечения. Пусть вогнутый угол пересечения или равен прямому. Тогда импульс ударного слоя на поверхности 1 в направлении, нормальном к линии пересечения, целиком передается составляющей импульса поперечного потока P_1 на направление нормалей к поверхностям 1 и 2 обе составляющие импульса должны обращаться в нуль. На фиг. 2, а, эти составляющие P_{11} и P_{12} показаны пунктиром. Аналогичное положение возникает и при рассмотрении обтекания двух симметрично расположенных поверхностей с любым углом излома, на которых образуются одинаковые ударные слои. Это легко можно показать, если плоскость симметрии (фиг. 2, б) принять за непроницаемую перегородку. В общем случае, когда угол излома больше прямого и ударные слои разные, соударение поперечных потоков в зависимости от конкретных условий будет происходить различным образом. Например, если угол больше прямого и на одной поверхности скорость в ударном слое направлена от линии пересечения (фиг. 2, с), то сосредоточенная сила будет направлена по нормали к этой поверхности и определяется составляющей импульса P_{1n} от ударного слоя, натекающего на линию пересечения. Аналогичная ситуация может возникнуть, когда обе поперечные скорости направлены к линии пересечения, но один ударный слой, перетекая на другую поверхность, вытесняет второй ударный слой. Таким образом, в первых двух случаях (фиг. 2, а и б), когда оба ударных слоя натекают на линию пересечения, теряется составляющая потока импульса каждого ударного слоя в направлениях, определяемых соответственно векторами t_1 и t_2 . На поверхности 1 эта составляющая определяется величиной

$$\Delta s \int_0^{N_1} \rho v_{t_1}^2 dn_1$$

вторичное столкновение происходит в бесконечно тонком слое согласно схеме абсолютного неупругого удара. Второе предположение сделаем о величине импульса, теряющегося при ударе о вторую поверхность. На первый взгляд, можно предположить, что, как при первом столкновении, так и при втором теряется только нормальная к поверхности составляющая потока импульса. Однако это не всегда так. Рассмотрим для пояснения фиг. 2. На ней показаны схемы поперечного течения в плоскости, нормальной к поверхности 1 и 2 меньше



Фиг. 2

которая при $\epsilon \rightarrow 0$ дает величину сосредоточенной силы, приложенной к отрезку Δs . Обозначая эту элементарную силу через ΔF_1 и, интегрируя вдоль всей линии OL ,

получим, что на линию пересечения со стороны ударного слоя 1 действует сила

$$F_1 = \int_0^L t_1(s) ds \int_0^{N_1} \rho v_{t_1}^2 dn_1 \quad (1.1)$$

Аналогично, со стороны ударного слоя 2 действует сила

$$F_2 = \int_0^L t_2(s) ds \int_0^{N_2} \rho v_{t_2}^2 dn_2, \quad t_2 = \tau \times n_2 \quad (1.2)$$

Складывая F_1 и F_2 , получим полную силу, действующую на тело. Интегралы, входящие в выражения (1.1), (1.2), удобно представить в других переменных. Действительно, если учесть, что переменная $n_1 \sim \varepsilon$, а плотность потока в ударном слое $\sim \varepsilon^{-1}$, то естественно за новую переменную принять произведение $\rho n_1 = dm_1$. Величина dm_1 имеет простой физический смысл — это масса частиц, заключенных в столбике, расположенном вдоль нормали n_1 , с поперечным сечением, равным единице, и высотой dn_1 . При изменении переменной n_1 от 0 до N_1 переменная m_1 изменяется от 0 до M_1 , где M_1 — масса столбика, вырезанного из ударного слоя по нормали n_1 , с поперечным сечением, равным единице. В результате этой замены формулы (1.1), (1.2) примут вид

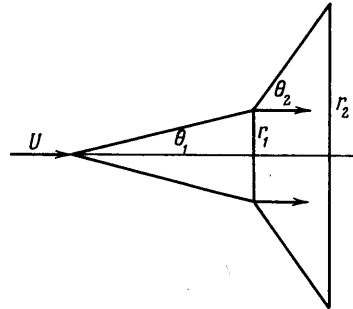
$$F_1 = \int_0^L t_1(s) ds \int_0^{M_1} v_{t_1}^2 dm_1, \quad F_2 = \int_0^L t_2(s) ds \int_0^{M_2} v_{t_2}^2 dm_2 \quad (1.3)$$

Расчет сил по полученным формулам для произвольных поверхностей связан с рядом трудностей. Основная из них — это определение зависимости $v(m)$.

2. Примеры расчета. Первым примером рассмотрим обтекание ступенчатого конуса (фиг. 3). Поток импульса P , протекающий через концевое сечение ударного слоя первого конуса, определяется выражением

$$P = \int_0^{2\pi r_1} t_1(s) ds \int_0^{y^*} u^2(n) \rho(n) dn$$

Здесь u — тангенциальная скорость, y^* — расстояние по нормали до ударной волны, r_1 — радиус миделя первого конуса. Согласно результатам работы [1], для параметров потока на первом конусе имеем



Фиг. 3

$$u = U \cos \theta_1, \quad \rho = \frac{\rho^0}{\varepsilon(1 + \delta)},$$

$$\delta = \frac{2}{(\kappa - 1)M_\infty^2 \sin^2 \theta_1}, \quad y^* = \frac{\rho^0 U}{2\rho \cos \theta_1}$$

Здесь U , ρ^0 , M_∞ — скорость, плотность и число Маха набегающего потока, θ_1 — полуугол раствора первого конуса. Отсюда находим, что результирующая сосредоточенных сил и коэффициент дополнительного сопротивления, отнесенный к площади миделя S соответственно равны:

$$F = -(P \cdot n_2)n_2 = \rho^0 U^2 n_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \cos \theta_1 \pi r_1^2$$

$$\Delta C_x = 2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_2 \cos \theta_1 S_1 / S, \quad S_1 = \pi r_1^2$$

Прибавляя к величине ΔC_x сопротивление по уточненной формуле Ньютона, получим коэффициент сопротивления тела в виде

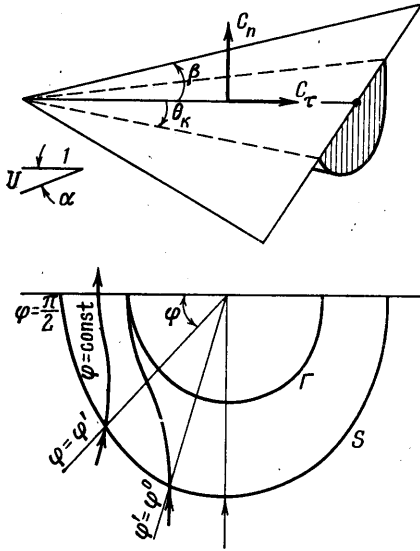
$$C_x^0 = c_p^{(1)} \frac{S_1}{S} + c_p^{(2)} \left(1 - \frac{S_1}{S}\right) + 2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_2 \cos \theta_1 \frac{S_1}{S} \quad (2.1)$$

Коэффициенты давления $c_p^{(1)}$ и $c_p^{(2)}$ определяются по таблицам Копала или по формуле $2 \sin^2 \theta_i$ ($i = 1, 2$). Представляет интерес сравнить результаты расчета (2.1) с точными значениями, полученными численным методом в работе [8]. Согласно приведенным в этой работе данным, расчет при $M_\infty > 4$ и $\kappa = 1.4$ был выполнен для трех конусов. Приводим данные, принятые для расчета, числа Маха и значения со-

противления.

| M_∞ | θ_1 | θ_2 | r_2/r_1 | $C_x^{(n)}$ | C_x° | C_x | $\Delta \%$ |
|------------|------------|------------|-----------|-------------|-------------|-------|-------------|
| 6.1 | 20° | 35° | 1.45 | 0.498 | 0.631 | 0.648 | 2.7 |
| 4.1 | 20° | 35° | 1.65 | 0.556 | 0.659 | 0.670 | 1.8 |
| 4.1 | 15° | 35° | 1.78 | 0.547 | 0.666 | 0.667 | 0.3 |

Как видно из сопоставления результатов, формула (2.1) дает C_x° , весьма близкое к точному значению, тогда как сопротивление по уточненной формуле Ньютона $C_x^{(n)}$ отличается примерно на 20%. Хорошее совпадение данных позволяет сформулировать следующее правило подобия: при больших числах Маха и λ , близких к единице, для всех ступенчатых конусов



Фиг. 4

крылу, есть w_0 , а плоскость крыла определяется значениями $\varphi = \pm 1/2\pi$. Выражение (1.1) для силы, действующей на линию сопряжения (пунктир на фиг. 4), имеет вид

$$F_1 = \int_0^L t_1 dr \int_{\theta_k}^{\theta_k + \pi} w_0^2 \rho r d\theta = \frac{t_1 h^2}{2 \cos^2 \theta_k} \int_{\varphi''}^{\varphi'} w_0^2 \rho_0 \theta_{\varphi'} d\varphi'$$

Здесь φ' — точка пересечения линии тока с ударной волной. При интегрировании вдоль линии $\varphi = \text{const}$ (см. фиг. 4) между координатами θ и φ' имеется взаимно однозначное соответствие, которое устанавливается при помощи соотношений [9]

$$\frac{\rho_0 \theta_{\varphi'}}{w_0} = \frac{\rho_0' \theta_{\varphi'}}{w_0'}, \quad \theta_{\varphi'} = -\frac{v_0'}{w_0'} \sin \theta_k, \quad \rho_0' = \rho^0$$

$$u_0' = \cos \alpha \cos \theta_k + \sin \alpha \sin \theta_k \cos \varphi'$$

$$v_0' = -\cos \alpha \sin \theta_k + \sin \alpha \cos \theta_k \cos \varphi', \quad w_0' = -\sin \alpha \sin \varphi'$$

Учитывая также, что

$$w_0 = \Delta \cos \left[\frac{\pi}{2} \sin \theta_k + \alpha(\varphi') \right], \quad \Delta = -\sqrt{(u_0')^2 + (w_0')^2}$$

$$\alpha(\varphi') = \text{arctg} \frac{u_0'}{w_0'} - \varphi' \sin \theta_k$$

получим для дополнительного коэффициента нормальной силы, отнесенного к пло-

$$\Phi = \lambda$$

$$\Phi = \left[C_x - c_p^{(1)} \frac{S_1}{S} - c_p^{(2)} \left(1 - \frac{S_1}{S} \right) \right] \frac{S}{S_1}$$

$$\lambda = 2 \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin \theta_2 \cos \theta_1$$

Отметим еще, что, если в (2.1) положить $\theta_2 = 1/2\pi$, то сопротивление ступенчатого конуса совпадает с сопротивлением диска. Этот результат можно получить непосредственно из теоремы об изменении потока импульса.

Перейдем теперь к рассмотрению обтекания тела, представляющего компоновку треугольного плоского крыла с полуконусом (фиг. 4). Принимаем, что длина тела равна h , угол атаки, отсчитываемый от плоскости крыла, равен α , угол полуконуса θ_k и угол при вершине крыла 2β . Рассчитаем вначале силу, действующую на тело в направлении, нормальном к крылу. Для расчета параметров ударного слоя на конусе воспользуемся результатами работы [9]. В сферической системе координат (r, θ, φ) , принятой в [9], имеем, что составляющая скорости, нормальная

пади крыла в плане, следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Delta C_n &= \frac{2 \operatorname{tg} \theta_k}{\cos \theta_k \operatorname{tg} \beta} \int_{1/2\pi}^{\varphi} \frac{v_0' w_0^3}{w_0'^2} d\varphi' = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \theta_k \sin \alpha}{\cos \theta_k \operatorname{tg} \beta} \int_{1/2\pi}^{\varphi} (1+z^2)^{3/2} \sin \varphi' \cos^3 \left[\left(\varphi' - \frac{\pi}{2} \right) \sin \theta_k + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \right] (\cos \alpha \sin \theta_k - \sin \alpha \cos \theta_k \cos \varphi') d\varphi' \\ z &= \frac{\cos \alpha \cos \theta_k + \sin \alpha \sin \theta_k \cos \varphi'}{\sin \alpha \sin \varphi'} \end{aligned}$$

Верхний предел интегрирования φ° есть корень уравнения

$$\varphi^\circ = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sin \theta_k} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin \alpha \sin \varphi^\circ}{\cos \alpha \cos \theta_k + \sin \alpha \sin \theta_k \cos \varphi^\circ}$$

Нетрудно показать также, что дополнительный коэффициент осевой силы ΔC_τ , возникающий от действия ударного слоя со стороны крыла, есть

$$\Delta C_\tau = \frac{\sin 2\alpha \sin^3 \theta_k \sin(\beta - \theta_k)}{\operatorname{tg} \beta \sin \beta \cos^2 \theta_k}$$

Зная коэффициенты ΔC_n и ΔC_τ , легко можно найти коэффициенты ΔC_x и ΔC_y .

Рассмотрим теперь пример на обтекание тела в виде треугольного V-образного крыла, составленного из двух плоскостей (фиг. 5). Крыло симметрично относительно плоскости XY и имеет длину, равную единице. Параметры, характеризующие геометрию крыла, следующие: γ — угол между направлением скорости и линией пересечения внутренних поверхностей крыла, α — полуугол раскрытия крыла, π/n — угол, определяющий положение внешней грани крыла. Через эти величины определяются все необходимые параметры, входящие в выражение (1.1).

После вычислений имеем

$$\begin{aligned} n_1 &(-\sin \gamma_1, \cos \gamma_1 \sin \alpha, -\cos \gamma_1 \cos \alpha), & \operatorname{tg} \gamma_1 &= \operatorname{tg} \gamma \sin \alpha \\ t_1 &[\sin \gamma \cos \gamma_1 \cos \alpha, -\cos \gamma \cos \gamma_1 \cos \alpha, -(\sin \gamma \sin \gamma_1 + \cos \gamma \cos \gamma_1 \sin \alpha)] \\ v_{t_1} &= U \sin \gamma \cos \gamma_1 \cos \alpha, & \tau &(\cos \gamma, \sin \gamma, 0) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Согласно (2.2), скорость v_{t_1} и вектор t_1 — постоянны, поэтому формула (1.3) значительно упрощается и принимает вид

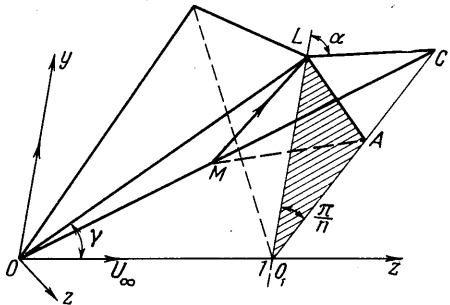
$$F_1 = v_{t_1}^2 G t_1, \quad G = \int_0^L M_1(s) ds \quad (2.3)$$

Для дальнейшего заметим, что произведение $v_{t_1} G$ представляет поток массы, протекающей в единицу времени через ударный слой, опирающийся на линию OL. Из условия сохранения массы эта величина равна массе потока, набегающего на часть крыла OML (точка M на фиг. 5 соответствует линии тока, проходящей через точку L). Отсюда

$$v_{t_1} G = \rho_\infty U_n S_{\Delta OML} = \rho_\infty U \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma \cos \alpha \sin(\pi/n)}{2 \cos(\alpha - \pi/n)}$$

Подставляя это значение в (2.3), получим

$$F_1 = t_1 \frac{\rho U^2 \sin \gamma \operatorname{tg}^2 \gamma \cos^2 \alpha \sin(\pi/n)}{2 \cos(\alpha - \pi/n) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma \sin^2 \alpha}} \quad (2.4)$$



Фиг. 5

Соотношение (2.4) определяет сосредоточенную силу F_1 , обусловленную одной половинкой крыла. В силу симметрии, сила F_2 имеет такое же значение, направленное в сторону вектора t_2 . Введем в рассмотрение половину площади миделя крыла, определяемую соотношением

$$S_1 = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma \sin \alpha \sin(\pi/n)}{2 \sin(\alpha - \pi/n)}$$

Тогда коэффициент дополнительного сопротивления от сосредоточенной силы будет равен

$$\Delta C_x = \frac{2 \sin^2 \gamma \operatorname{tg}(\alpha - \pi/n)}{\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sec^2 \gamma)}$$

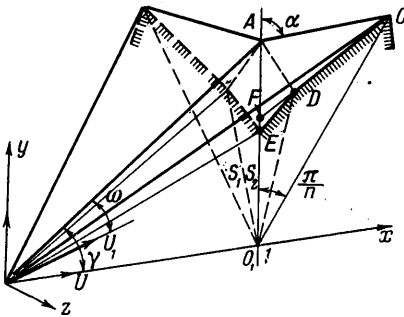
Прибавляя теперь сюда обычное сопротивление по Ньютону, получим

$$C_x = \frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \sec^2 \gamma} \left[1 + \cos^2 \gamma \operatorname{ctg}^3 \alpha \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{n} \right) \right] \quad (2.5)$$

Второй член в формуле (2.5) есть добавок от сосредоточенной силы. Аналогичное выражение можно написать и для коэффициента подъемной силы. Полученные выше формулы — простейшие аппроксимации сил при интерференции, возникающей при обтекании гиперзвуковым потоком пространственных тел типа комбинации крыла и фюзеляжа, корпуса ракеты и рулей управления и т. д. Область применения этих соотношений так же, как и в теории обычного ударного слоя, может быть определена только в результате широкого сравнения с экспериментом.

3. Асимптотическое решение задачи гиперзвукового обтекания звездообразного тела. Обтекание одного класса звездообразных тел с поперечным сечением, составленным из отрезков прямых, рассмотрено в работе [9].

Замкнутое решение получено в простой аналитической форме и соответствует течению газа около звездообразного конического тела с регулярным пересечением плоских скачков. Если взять элемент звезды, состоящий из двух полуплестков с углом $2\pi/n$, то получится V-образное треугольное крыло (фиг. 6), подобное рассмотренному в предыдущем разделе. Изучим обтекание этого крыла в предельном случае, когда $M_\infty \rightarrow \infty$ и показатель адиабаты $\kappa \rightarrow 1$. Согласно фиг. 6, скачок, проходящий через начало координат, определяется углами α и γ (или вместо γ — углом γ_1 между плоскостью скачка и направлением скорости набегающего потока). Следуя [9], получим, что основные



Фиг. 6

характеристики асимптотического течения определяются из выражений

$$\begin{aligned} v_x &= \cos^2 \gamma_1 + O(\epsilon), & v_y &= 0.5 \sin 2\gamma_1 \sin \alpha + O(\epsilon), & v_z &= -0.5 \sin 2\gamma_1 \cos \alpha + O(\epsilon) \\ \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \gamma_1 (1 - \epsilon \sec^2 \gamma_1) + O(\epsilon^2), & M_1^2 &\sim 1/\epsilon, & M_{1n} &= M_1 \sin \omega \\ \sin^2 \omega &= 1 - \cos^2 \gamma / \cos^2 \gamma_1 + O(\epsilon) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь ω — угол между вектором скорости за скачком U_1 и линией пересечения скачков OA ; M_1 — число Маха за первым скачком. Введем теперь в рассмотрение угол отклонения потока θ , лежащий в плоскости, нормальной к ребру OA , и образованный проекциями отрезка O_1A и вектора скорости U_1 на эту плоскость. Для его величины получаем формулу $\cos \theta = \cos \gamma_1 \cos \alpha + O(\epsilon)$. Расположение второй волны (OAD на фиг. 6) можно определить теперь углом β , лежащим в плоскости θ , из условия, что задан поворот потока в этой плоскости. После этого угол β находится из соотношения на косом скачке

$$\operatorname{tg} \theta = 2 \operatorname{ctg} \beta \frac{\sin^2 \beta - M_{1n}^{-2}}{(\kappa + \cos 2\beta) + 2M_{1n}^2}$$

которое при помощи (3.1) преобразуется к виду ($\beta \neq 0$)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta} \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) имеет два решения. При условии $1 + \cos 2\beta \neq 0$ решение есть $\beta = \theta$, что соответствует слабому отраженному скачку. Если же $1 + \cos 2\beta = 0$, то решение определяется равенством $\beta = 1/2\pi$ — сильный отраженный скачок. Исследуем оба случая. Вычислим координату z_d в предположении, что $\beta = \theta + O(\epsilon)$. Соответствующий расчет дает

$$z_d = \frac{\sin \gamma \sec^2 \gamma_1 [1 - \operatorname{tg}(\alpha - \pi/n) \operatorname{ctg} \alpha] \epsilon + O(\epsilon^2)}{\operatorname{ctg}[O(\epsilon)] + \cos \gamma [\operatorname{ctg} \alpha + O(\epsilon)]} \sim O(\epsilon^2)$$

Переходим к вычислению сил. На стенку CD действует сила, вызванная давлением $c_p^{(1)} = 2 \sin^2 \gamma_1 + O(\epsilon)$. Стенка ED находится в области повышенного давления, величина которого

$$c_p^{(2)} = c_p^{(2)} + 2U_1^2 \frac{\sin^2 \omega \sin^2 \beta}{\epsilon} + O(1) \quad (3.3)$$

Коэффициент волнового сопротивления определяется по формуле

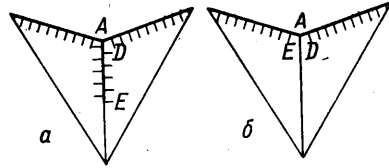
$$C_x = \frac{c_p^{(1)} S_1 + c_p^{(2)} S_2}{S_1 + S_2}, \quad S_2 = \frac{1}{2} y_e z_d \sim O(\epsilon^2)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} y_f (z_c - z_d) = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma \sin(\pi/n) \sin \alpha}{2 \sin(\alpha - \pi/n)} + O(\epsilon) \quad (3.4)$$

Отсюда, согласно (3.3), (3.4), коэффициент волнового сопротивления будет равен

$$C_x = 2 \sin^2 \gamma_1 + O(\epsilon)$$

Следовательно, предельное решение, соответствующее слабому отраженному скачку, определяется обычной ньютоновской формулой. Этот результат легко можно понять, если рассмотреть форму тела, получившегося в предельном случае. Дело в том, что при слабом отраженном скачке поперечное сечение тела не соответствует форме ударной волны AOC , так как точка E не стремится к точке A , а определяется координатой $y_e = \operatorname{tg} \gamma_1 \sin \alpha$, которая меньше $y_a = \operatorname{tg} \gamma$ (фиг. 7, а). Таким образом, тело в точке A имеет сток, через который происходит перетекание газа к точке E . Положение точки E таково, что потеря импульса в направлении, лежащем в плоскости симметрии $OA0_1$, больше не происходит (так как составляющая скорости в этой плоскости параллельна линии OE). В итоге предельный случай со слабым отраженным скачком не дает нужного для сравнения плоского V-образного крыла.



Фиг. 7

Перейдем теперь ко второму решению уравнения (3.2).

Полагая $\beta = 1/2\pi + O(\epsilon)$, получим

$$z_d = \frac{\operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg}(\pi/n)}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\pi/n)} \epsilon + O(\epsilon^2), \quad S_2 = \frac{\operatorname{tg}^2 \gamma \operatorname{tg}(\pi/n)}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\pi/n)}$$

Нетрудно показать, что теперь точка E стремится к точке A и предельная форма тела совпадает с V-образным крылом, рассмотренным выше (фиг. 7, б).

Подставляя снова все величины в (3.4), найдем

$$C_x = 2 \sin^2 \gamma_1 [1 + \operatorname{ctg}^3 \alpha \cos^2 \gamma \operatorname{tg}(\alpha - \pi/n)] \quad (3.5)$$

Согласно выражению (3.5), получаем, что асимптотика точного решения при $M_\infty \rightarrow \infty$ и $\kappa \rightarrow 1$ приводит к появлению конечной сосредоточенной силы. Значение ее, как видно из сравнения (2.5) и (3.5), совпадает с силой, полученной в первом разделе. Этот результат подтверждает правильность расчета на основе вторичных столкновений. Таким образом, можно ожидать, что учет сосредоточенных сил по формулам (1.3) будет давать реальную оценку силовому воздействию потока.

4. Звездообразные тела минимального сопротивления. Известно, что в ньютоновском приближении пространственные тела минимального сопротивления имеют звездообразную форму. Рассмотрим, как повлияет на эту форму учет сосредоточенных сил. Исследование ограничим классом тел, составленных из n лепестков, симметрично расположенных относительно оси. Каждый лепесток имеет плоские грани. В этих

предположениях вариационная задача сводится к отысканию минимума C_x , определяемого формулой (2.5), в предположении, что площадь миделя и характерный поперечный размер заданы. Для уменьшения выкладки рассмотрим только тонкие тела. Тогда угол $\gamma_1 \ll 1$ и расчетные формулы примут вид

$$C_x = 2r_1^2 \left[\gamma^2 + \frac{(1 - k^2\gamma^2)^{3/2}}{k^2 \sqrt{1 - \gamma^2}} \right], \quad \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{n} \right) = \frac{\gamma_1}{r_1} = \gamma, \quad \sin \alpha = k\gamma \quad (4.1)$$

$$S = 2nS_1 = \frac{r_1^2 n \sin(\pi/n)}{\sin \alpha} = \text{const}, \quad k = \sigma f, \quad f = \frac{n}{\pi} \sin \frac{\pi}{n}, \quad \sigma = \frac{\pi r_1^2}{s}$$

Здесь за характерный поперечный размер $r_1 = \text{const}$ принят радиус кольца, описывающего звезду в миделевом сечении. При вычислении площади миделя S использовалось соотношение (3.4). Заметим, что для больших значений n можно считать, что $f \approx 1$, тогда, согласно (4.1), величина $k \approx \sigma$. В этом предположении вычислим вариацию δC_x . Условие обращения вариации в нуль после элементарных преобразований примет вид

$$2x^3 - 9 \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 = 0, \quad x = \frac{k^2 - \gamma'^2}{1 - \gamma'^2} \quad (\gamma'^2 = k^2\gamma^2)$$

где γ' по смыслу всегда меньше единицы. Единственный действительный корень этого уравнения лежит несколько левее числа $1/3$, поэтому имеет место неравенство

$$\frac{k^2 - \gamma'^2}{1 - \gamma'^2} < \frac{1}{3}$$

из которого следует, что $\gamma' > 1$. Это приводит к противоречию, значит, вариация в нуль не обращается. Нетрудно установить теперь, что $\delta C_x > 0$ при $\delta \gamma > 0$, и, следовательно, начиная с некоторого значения n , сопротивление с увеличением последнего уменьшается, оставаясь, однако, конечной величиной. Составим отношение сопротивления звездообразного тела (4.1) к сопротивлению эквивалентного по длине и площади миделя круглого конуса. Соответствующее выражение имеет вид

$$\frac{C_x}{C_{x^0}} = \left[\gamma^2 + \frac{(1 - k^2\gamma^2)^{3/2}}{k^3(1 - \gamma^2)^{1/2}} \right] \sigma \quad (4.2)$$

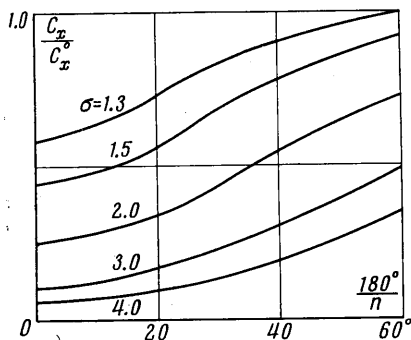
Наименьшее значение его достигается при $\gamma = 0$. В результате получаем, что $C_x / C_{x^0} \approx 1 / \sigma^2$. Из этого выражения видно, что при $\sigma \rightarrow 1$ и $n \rightarrow \infty$ сопротивление тела, имеющего волнистую поверхность с мелкими зубцами, совпадает с сопротивлением конуса. Этот результат означает, что парадокс, который имел место для звездообразных тел в обычной ньютоновской постановке, при учете сосредоточенных сил исчезает. С увеличением σ относительное сопротивление быстро падает. Рассмотрим теперь случай, когда число n

мало и надо варьировать параметр k . В этом случае проще воспользоваться непосредственно формулой (4.2), найдя из нее зависимость C_x / C_{x^0} от n при разных значениях σ . Для этого воспользуемся соотношением

$$\gamma^2 = \frac{\sin^2(\pi/n)}{[\sigma(n/\pi) \sin(\pi/n)]^2 - \sigma(n/\pi) \sin(\pi/n) + 1}$$

Подставляя это выражение в (4.2) и учитывая (4.1), найдем зависимость относительного сопротивления от n . Результаты расчета при разных σ представлены на фиг. 8. Как видно из построенных графиков, сопротивление с увеличением числа n падает.

При $\sigma > 1.5$ сопротивление звездообразного тела становится в несколько раз меньше сопротивления эквивалентного круглого конуса.



Фиг. 8

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
2. Хейз У., Пробстин Р. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.
3. Майкапар Г. И. Учет влияния центробежных сил на давление воздуха на поверхности тела произвольной формы, обтекаемой потоком с большой сверхзвуковой скоростью. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
4. Guiraud I. P. Newtonien flow over a surface Rech. aeronaut. 1959, No. 71.
5. Laval P. Ecoulements Newtoniens sur des surfaces coniques en incidence. Rech. aeronaut, 1959, No. 73.
6. Гонор А. Л. Обтекание конуса под углом атаки с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, ОН, 1958, № 7.
7. Гонор А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
8. Росляков Г. С., Дроздова Н. В. Численный расчет обтекания ступенчатого конуса. Сб. «Численные методы в газовой динамике», Изд. Московский ун-т, 1963, № 2.
9. Гонор А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.

ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА МАХА НА ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА С ПРИТУПЛЕННЫМИ КРОМКАМИ

А. В. КРАСИЛЬНИКОВ

(Москва)

В работе [1] в рамках простейшей двухслойной схемы течения получено приближенное решение задачи обтекания треугольной пластины с притупленными кромками под нулевым углом атаки совершенным газом с показателем адиабаты γ при числе Маха набегающего потока $M = \infty$. Ниже в той же постановке получено решение для конечного, но большого числа M (гиперзвуковая передняя кромка), основанное на учете членов порядка M^{-2} . В области, на некотором удалении от кромок (с постоянным s_x — сопротивлением поперечного сечения кромки), для пластины с углом 2θ при вершине найдены распределение давления по пластине, толщина высокоэнтропийного слоя, распределение средней скорости в нем и форма ударной волны.

1. Введем декартовую систему координат xuz с началом в носке пластины, ось x направлена вниз по потоку вдоль оси симметрии, а ось z — по нормали к пластине. Будем рассматривать следующие безразмерные величины: $1/2xc_xd$, $1/2yc_xd$, $1/2zc_xd$ — координаты; $1/2\delta c_xd$ и $1/2Rc_xd$ — толщина высокоэнтропийного слоя и форма ударной волны; uU , vU_n , v_zU_n — проекции скорости на оси x , y , z соответственно; $(1-w)U_n$ — проекция скорости на плоскость, перпендикулярную передней кромке; $\rho\rho_\infty$, $\rho\rho_\infty U_n^2$, iU_n^2 и aU_n — плотность, давление, энтальпия и скорость звука; $S = \sin^2 \beta / \sin^2 \theta$ — энтропийная функция; ρ_∞ и U — плотность и скорость набегающего потока; β — угол между плоскостью пластины и касательной плоскостью к ударной волне; d — толщина пластины; $M_n = M \sin \theta$; $U_n = U \sin \theta$.

На некотором удалении от носка можно выделить две области течения. В области А, прилегающей к кромке, течение эквивалентно обтеканию бесконечной пластины со скольжением. Решение здесь зависит от переменной $h = x \sin \theta - y \cos \theta$ и на достаточном удалении от кромок, где $1 \ll R \ll h$ и $p \ll 1$, справедливы соотношения

$$\begin{aligned} u &= 1 - w \sin^2 \theta, & v &= w \cos \theta \\ w &= 1 - [1 - 2i + 2(\gamma - 1)^{-1} M_n^{-2}]^{1/2} = i - (\gamma - 1)^{-1} M_n^{-2} + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

Область В, в которой нарушается такой характер течения в силу условия $v = 0$ при $y = 0$, прилегает к плоскости симметрии. Границей областей является предельная характеристическая поверхность, проходящая через окрестность носка.

Будем рассматривать течение только в высокоэнтропийном слое и при таких значениях p и γ , когда $\varepsilon = 2/3(\gamma - 1) / \gamma \ll 1$ и $i_0^2 \ll 1$ (здесь индекс ноль обозначает величины на поверхности пластины). За границу этого слоя принимаем поверхность тока с энтропией S_0 и расходом Ψ_0 в области А в направлении, перпендикулярном кромке. Течение в нем считаем одномерным с осредненными по толщине параметрами (ниже помечены индексом c) и эквивалентным расходом, определяемым в обла-