ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ЗВУКОВОЙ ЛИНИИ ВЕКТОРУ СКОРОСТИ

В. И. ФИДРУС, Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

В [1] методом, аналогичным [2], исследовалось плоское вихревое течение в окрестности точки K ортогональности звуковой линии вектору скорости при условии ограниченности ускорения $\partial\lambda / \partial s_1$ в этой точке. В настоящей заметке изучается течение в окрестности подобной точки в осесимметричном вихревом течении. В отличие от плоского случая, здесь существенно различать точку K, расположенную на оси симметрии, и точку K, расположенную вне оси симметрии. Точка K, расположенная на оси симметрии, существует, например, в сверхзвуковой перерасширенной струе, если за ударной волной имеет место переход дозвукового течения, примыкающего к ударной волне, в сверхзвуковое. Точка K, расположенная вне оси симметрии, по-видимому, существует при обтекании тел с отошедшей ударной волной в некотором диапазоне чисел M_∞ набегающего потока, как об этом свидетельствуют, например, численные результаты работы [3].

Уравнения газовой динамики в системе координат, линиями которой являются линии тока $\psi = \text{const}$ и ортогональные к ним траектории $\varphi = \text{const}$, могут быть записаны в виде

$$(M^2 - 1)\frac{\partial \ln \lambda}{\partial s_1} = \frac{\partial \beta}{\partial s_2} + \frac{\sin\beta}{y}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \frac{\partial \ln\lambda}{\partial s_2} + \frac{1}{kRM^2}\frac{dS}{ds_2} \tag{1}$$

Здесь y — расстояние от рассматриваемой точки до оси симметрии по нормали к оси симметрии; β — угол между вектором скорости и осью симметрии, отсчитываемый против часовой стрелки; λ — коэффициент скорости; M — число Маха; S — энтропия; k — показатель адиабаты; R — газовая постоянная; $\partial / \partial s_1 = h_1^{-1}\, \partial / \partial\varphi$ — производная по направлению линии тока $\mathbf{n}_1$; $\partial / \partial s_2 = h_2^{-1}\, \partial / \partial\psi$ — производная по направлению нормали к линии тока $\mathbf{n}_2$; h_1, h_2 — коэффициенты Ламэ; вектор $\mathbf{n}_2$ повернут относительно вектора $\mathbf{n}_1$ на угол $^1/_2\pi$ против часовой стрелки.

Пользуясь формулами дифференциальной геометрии, выражающими кривизну координатной линии через коэффициенты Ламэ, из системы (1) можно получить

$$h_1\lambda \exp \int_{s_0}^{s} \frac{dS}{kRM^2} = \Phi(\varphi), \qquad h_2 q(\lambda) y = F(\psi), \tag{2}$$

Здесь $F(\psi)$, $\Phi(\varphi)$ — произвольные функции; интеграл вычисляется вдоль линии $\varphi = \text{const}$.

$$q(\lambda) = \lambda\left[\frac{(k+1)}{2} - \frac{\lambda^2(k-1)}{2}\right]^{1/k-1}$$

1. Выведем из уравнений (1) и (2) приближенные уравнения вихревого трансзвукового течения, имеющего место в окрестности произвольной точки O звуковой линии, не лежащей на оси симметрии.

Поместим начало координат в точку O. Будем считать, что в некоторой окрестности точки O энтропия $S(\psi)$ является достаточно гладкой функцией, так что

$$S = S'\psi + {}^1/_2 S''\psi^2 + o(\psi^2) \qquad (S' = [dS / d\psi]_K, \quad S'' = [d^2S / d\psi^2]_K). \tag{3}$$

Положим

$$\psi = \varepsilon y_0 \psi^\circ; \quad \varphi = \varepsilon^2\varphi^\circ; \quad \lambda(\varphi, \psi) = 1 - \frac{u(\varphi, \psi)}{k+1} = 1 - \varepsilon^2\frac{U(\varphi^\circ, \psi^\circ)}{k+1}$$

$$\beta(\varphi, \psi) = \beta_0 + \frac{v(\varphi, \psi)}{k+1} = \beta_0 - \varepsilon\psi^\circ\frac{\sin\beta_0}{y_0} - \varepsilon^2\varphi^\circ\frac{y_0 S'}{kR} +$$

$$+ \varepsilon^2(\psi^\circ)^2\frac{3}{4}\frac{\sin 2\beta_0}{y_0^2} + \varepsilon^2\frac{V(\varphi^\circ, \psi^\circ)}{k+1} \tag{4}$$

где y_0, β_0 — значения y и β в точке O.

Легко видеть, что $y(\varphi, \psi)$ можно представить в виде

$$y(\varphi, \psi) = y_0 + \int_0^\varphi \sin\beta\, ds_1 + \int_0^\psi \cos\beta\, ds_2 = y_0 + \int_0^\varphi h_1 \sin\beta\, d\varphi + \int_0^\psi h_2 \cos\beta\, d\psi \qquad (5)$$

Здесь интегралы по φ и ψ вычисляются соответственно вдоль линии $\psi = \mathrm{const}$ и $\varphi = \mathrm{const}$.

Положим в (2) $\Phi(\varphi) = 1$, $F(\psi) = 1$. Подставляя (4) в (2), (5) и (1), получим при $\varepsilon \to 0$ систему уравнений для $U(\varphi°, \psi°)$, $V(\varphi°, \psi°)$

$$U\frac{\partial U}{\partial \varphi°} = \frac{\partial V}{\partial \psi°} + D\varphi° + E(\psi°)^2, \qquad \frac{\partial V}{\partial \varphi°} + \frac{\partial U}{\partial \psi°} = G\psi°$$

$$D = (k+1)\left(\frac{S'\cos\beta_0}{kR} - \frac{2\sin^2\beta_0}{y_0^2}\right), \qquad E = \frac{k+1}{2y_0^3}(12\sin\beta_0 - 15\sin^3\beta_0)$$

$$G = \frac{k+1}{kR}\left[S''y_0^2 + S'\cos\beta_0 - \frac{(y_0S')^2}{kR}\right]$$

Для этой системы можно построить точное решение, аналогичное точному решению в [1, 2], описывающее течение в окрестности точки K ортогональности звуковой линии вектору скорости. Возвращаясь к зависимым переменным u, v, определенным в (4), и независимым переменным φ, ψ, получим

$$u = A\varphi - \frac{A^2 - G - D}{2y_0^2}\psi^2 \qquad \left(A = -(k+1)\left(\frac{\partial\lambda}{ds_1}\right)_K\right) \qquad (6)$$

$$v = (k+1)\left[\frac{y_0S'}{kR}\varphi - \frac{\sin\beta_0}{y_0^2}\psi + \frac{3}{4}\frac{\sin 2\beta_0}{y_0^4}\psi^2\right] + \frac{A^2 - D}{y_0}\varphi\psi +$$

$$+\left[\frac{A(A^2 - G - D)}{6} + \frac{E}{3}\right]\frac{\psi^3}{y_0^3}$$

Здесь параметры G, D, E вычисляются теперь не в произвольной точке звуковой линии, а в точке K, в которой звуковая линия ортогональна вектору скорости.

Первая формула (6) имеет тот же вид, что и первая формула (6) в [1]. Поэтому картина расположения характеристик в плоскости φ, ψ в окрестности точки K в данном случае имеет такой же вид, как и в плоском вихревом течении при соответствующих значениях параметров (уравнение характеристик в плоскости φ, ψ имеет вид $(d\varphi / d\psi)^2 = -u$).

2. Рассмотрим теперь течение в окрестности точки пересечения звуковой линии с осью симметрии. В этой точке звуковая линия ортогональна вектору скорости. Поместив начало координат в эту точку K, положим

$$\varphi = \varepsilon^2\varphi°, \qquad \psi = \varepsilon\psi°$$

$$\lambda(\varphi, \psi) = 1 - \frac{u(\varphi, \psi)}{k+1} = 1 - \varepsilon^2\frac{U(\varphi°, \psi°)}{k+1}, \quad \beta(\varphi, \psi) = \frac{v(\varphi, \psi)}{k+1} = \varepsilon^3\frac{V(\varphi°, \psi°)}{k+1} \qquad (7)$$

Положим в (2) $\Phi(\varphi) = 1$, $F(\psi) = \psi$. Будем считать, что формула (3) также имеет место в окрестности точки K; при этом из условия симметрии вытекает, что $dS / d\psi = 0$ при $\psi = 0$. Подставляя (7) в (2), получим при $\varepsilon \to 0$

$$h_1 = 1 + O(\varepsilon^2), \qquad h_2 = \psi y^{-1}(1 + O(\varepsilon^4)) \qquad (8)$$

Используя (7), (8), получим

$$y(\varphi, \psi) = \int_0^\varphi \sin\beta\, ds_1 + \int_0^\psi \cos\beta\, ds_2 = \varepsilon^2\int_0^{\varphi°} h_1\sin\beta\, d\varphi° +$$

$$+ \varepsilon\int_0^{\psi°} h_2\cos\beta\, d\psi° = \varepsilon^2\int_0^{\psi°}\frac{\psi°}{y}\, d\psi° + O(\varepsilon^5)$$

Отсюда следует, что

$$y = \varepsilon\psi^\circ + O(\varepsilon^4) \tag{9}$$

Подставляя (7), (8), (9) в (1), получим систему уравнений для $U(\varphi^\circ, \psi^\circ)$, $V(\varphi^\circ, \psi^\circ)$

$$U\frac{\partial U}{\partial\varphi^\circ} = \frac{\partial V}{\partial\psi^\circ} + \frac{V}{\psi^\circ}, \qquad \frac{\partial V}{\partial\varphi^\circ} = -\frac{\partial U}{\partial\psi^\circ} + G\psi^\circ \qquad \left(G = \frac{k+1}{kR}S'' \text{ в точке } K\right)$$

Эта система также имеет точное решение, аналогичное [1, 2]. Переходя к зависимым переменным u, v (7) и к независимым переменным φ, ψ, получим

$$u = A\varphi - \frac{A^2 - 2G}{4}\psi^2, \quad v = \frac{A^2}{2}\varphi\psi - \frac{A^3 - 2AG}{16}\psi^3 \qquad \left(A = -(k+1)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s_1}\right)_K\right)$$

Легко видеть, что асимптотический характер течения здесь, вообще говоря, такой же, как и в [1]. Однако если точка K расположена за ударной волной, перед которой поток равномерный, энтропия $S(\psi)$ на оси симметрии имеет максимум. Поэтому $S'' \leqslant 0$ в точке K, откуда вытекает, что в этом случае звуковая линия всегда обращена выпуклостью в сторону сверхзвукового течения.

Поступило
7 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин Э. Г. Плоское вихревое течение в окрестности точки ортогональности звуковой линии вектору скорости. МЖГ, 1966, № 6.
2. Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
3. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел с отошедшей ударной волной с малой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.

ЗАКОН СОПРОТИВЛЕНИЯ НЬЮТОНА ДЛЯ ТЕЛ, ОБРАЗОВАННЫХ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ПОВЕРХНОСТЯМИ

А. Л. ГОНОР

(Москва)

Теория ньютоновского ударного слоя для гладких поверхностей развита в работах [1–7]. Однако, если тело состоит из двух пересекающихся поверхностей, на каждой из которых имеется регулярный ударный слой, то на линии пересечения эти два слоя будут взаимодействовать. Учитывая, что ударный слой является гиперзвуковым, можно к соударению частиц со второй поверхностью снова применить схему Ньютона. В результате на линии пересечения возникнут сосредоточенные силы. Указание на возможность появления таких сил имеется в работе [2]. Ниже дается метод расчета сосредоточенных сил и указывается, аналогом какого реального течения они являются.

1. Определение сил с учетом вторичного соударения. Пусть тело (фиг. 1), состоящее из двух поверхностей (*1* и *2*), пересекающихся вдоль линии OL, обтекается со скоростью $\mathbf{U}$ в бесконечности. Около каждой поверхности образуется регулярный ударный слой, толщина которого $\sim\varepsilon$ ($\varepsilon = (\varkappa - 1) / (\varkappa + 1)$, $\varkappa$ — показатель адиабаты) в ньютоновско-буземановском приближении стремится к нулю. Для наглядности на фиг. 1 показан только один ударный слой. Пунктиром показаны линии тока, идущие от ударной волны. Обозначим через Δs элементарный отрезок вдоль линии пересечения OL и построим на этом отрезке в направлении $\mathbf{n}_1$ (единичного вектора нормали к поверхности *1*) площадку до пересечения с поверхностью ударной волны. Попутно обозначим через $\mathbf{n}_2$ единичный вектор нормали к поверхности *2*, а через $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор, касательный к линии OL. Все три вектора отложим из одной точки S.

Предположим, что распределение параметров (скорости $\mathbf{v}$, плотности ρ и т. д.) внутри ударного слоя нам известно (эта задача решена в указанных выше работах [1–7]). В частности, в точке S даны значения функций $\mathbf{v}(n_1)$ и $\rho(n_1)$. Тогда нетрудно