НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ПОТОКОВ ГАЗА В ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Д. Д. МАЛЛИК

(Калькутта)

Рассматриваются плоские потоки бесконечно проводящего газа под действием перпендикулярного магнитного поля. Ю. П. Ладиков [1] решал эту задачу как специальный случай наиболее общего решения при определенном условии.

Показано, что, следуя методу, данному в [2], рассматриваемую задачу можно свести к определению неизвестной функции χ, удовлетворяющей дифференциальному уравнению в частных производных. Так как уравнение для χ очень сложно, были рассмотрены только два интересных случая, именно: 1) когда движение безвихревое и 2) когда давление постоянно вдоль линий тока.

1. Преобразование уравнений магнитной газодинамики. Принимая плоскость движения за плоскость xy и используя обычные обозначения, движение бесконечно проводящего газа в присутствии магнитного поля можно описать системой уравнений

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \qquad (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{4\pi\rho}[\operatorname{rot}\mathbf{H}, \mathbf{H}] \tag{1.1}$$

$$p = V^\gamma \rho^\gamma, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{rot}[\mathbf{v},\ \mathbf{H}] = 0$$

Из последнего уравнения (1.1) следует, что

$$v_x H_y - v_y H_x = \text{const} = a \neq 0 \tag{1.2}$$

Рассмотрим теперь случай, когда магнитное поле перпендикулярно полю скоростей. Это требует добавочного условия

$$(\mathbf{v}\cdot\mathbf{H}) = v_x H_x + v_y H_y = 0 \tag{1.3}$$

Из (1.2), (1.3) имеем

$$H_x = -\frac{a v_y}{v^2}, \qquad H_y = \frac{a v_x}{v^2}, \qquad H^2 = H_x^2 + H_y^2 = \frac{a^2}{v_x^2 + v_y^2} = \frac{a^2}{v^2} \tag{1.4}$$

Для того чтобы удовлетворить условию $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, имеем из (1.4)

$$0 = \frac{\partial}{\partial y}\frac{v_x}{v^2} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{v_y}{v^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{2}{v}\left[v_y\frac{\partial v}{\partial x} - v_x\frac{\partial v}{\partial y}\right] \tag{1.5}$$

Уравнение неразрывности $\operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$ ведет к соотношениям

$$\rho v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \rho v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \text{или} \quad d\psi = -\rho v_y\,dx + \rho v_x\,dy \tag{1.6}$$

Теперь заменим x и ξ и разрешим (1.6) относительно

$$dy = \frac{v_y}{v_x}d\xi + \frac{1}{\rho v_x}d\psi$$

Так что можно записать

$$dy / d\xi = v_y / v_x, \qquad dy / d\psi = 1 / \rho v_x \tag{1.7}$$

Исключая y из (1.7), имеем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\rho v_x}=\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{v_y}{v_x} \tag{1.8}$$

к которому сводится уравнение неразрывности в переменных ξ, ψ. В новых переменных ξ, ψ уравнение (1.5) и второе из уравнений (1.1) с учетом (1.4), (1.8) принимают следующие формы:

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi}-\rho v\frac{\partial v}{\partial \psi}=\frac{2}{v}\left[v_y\frac{\partial v}{\partial \xi}-\rho v^2\frac{\partial v}{\partial \psi}\right], \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{v_y}{v^2}=-\frac{\rho}{v}\frac{\partial v}{\partial \psi} \tag{1.9}$$

После использования (1.8) y-компонента уравнения движения дает

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi}+\frac{\partial p}{\partial \psi}=-\frac{a^2}{4\pi}\frac{v_y}{v^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\rho v^2} \tag{1.10}$$

Аналогично x-компонента дает

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial \xi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi}-v_y\frac{\partial p}{\partial \psi}=-\frac{a^2}{4\pi}\frac{v_x^2}{v^2}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\rho v^2} \tag{1.11}$$

Умножая (1.10) на v_y и складывая с (1. 11), имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{2}v^2\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi}=-\frac{a^2}{4\pi}\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\rho v^2} \tag{1.12}$$

что после интегрирования приводит к интегралу Бернулли

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{4\pi\rho}\frac{a^2}{v^2}=f(\psi), \quad \text{или} \quad \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\frac{H^2}{4\pi\rho}=f(\psi) \tag{1.13}$$

Здесь было использовано уравнение энергии $p=v^\gamma(\psi)\rho^\gamma$, причем γ — показатель адиабаты, а $f(\psi)$ — произвольная функция ψ. Этот результат согласуется с [1].

Уравнение (1.10) после использования (1.9) может быть записано в форме

$$\frac{\partial v_y}{\partial \xi}+\frac{\partial p}{\partial \psi}=-\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{a^2}{4\pi}\frac{v_y}{\rho v^4}\right)+\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{a^2}{8\pi v^2}\right)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left[v_y\left(1+\frac{a^2}{4\pi\rho v^4}\right)\right]=\frac{\partial}{\partial \psi}\left[\frac{a^2}{8\pi v^2}-p\right] \tag{1.14}$$

Уравнение (1.13) показывает, что

$$v_y\left(1+\frac{a^2}{4\pi\rho v^4}\right)=\frac{\partial \chi}{\partial \psi}, \qquad \frac{a^2}{8\pi v^2}-p=\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \tag{1.15}$$

Так как $\rho=v^{-1}p^{-1/\gamma}$, а из (1.15)

$$p=\frac{a^2}{8\pi v^2}-\frac{\partial \chi}{\partial \xi}$$

то, подставляя p и ρ в (1.13), получим уравнение для определения v^2

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}v\left(\frac{a^2}{4\pi v^2}-\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}+\frac{1}{2}v^2+\frac{a^2}{4\pi v^2}v\left(\frac{a^2}{4\pi v^2}-\frac{\partial \chi}{\partial \xi}\right)^{-1/\gamma}=f(\psi) \tag{1.16}$$

Далее, подставляя взятые из (1.15)

$$v_y = \frac{\partial\psi/\partial\psi}{1 + a^2/4\pi\rho v^4}, \qquad v_x = \sqrt{v^2 - v_y{}^2}$$

в (1.8), получим искомое дифференциальное уравнение для χ, в котором v и f считаются заданными функциями ψ. Определив функцию $\chi(\xi, \psi)$, можно затем найти $y(\xi, \psi)$ из (1.7). Линии тока в физической плоскости легко получить, если положить $\psi = \text{const}$ в функции $y = y(\xi, \psi)$. Поскольку уравнение для χ очень сложно, ограничимся рассмотрением частных случаев.

2. Частные случаи. 1°. Рассмотрим случай, когда движение безвихревое, т. е.

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial v_y}{\partial \xi} - \rho v \frac{\partial v}{\partial \psi} = 0 \tag{2.1}$$

Из (1.9) имеем также

$$v_y \frac{\partial v}{\partial \xi} - \rho v^2 \frac{\partial v}{\partial \psi} = 0 \tag{2.2}$$

Из (2.1) и (2.2) имеем

$$v_y \frac{\partial v}{\partial \xi} = v \frac{\partial v_y}{\partial \xi}, \quad \text{или} \quad v_y = v g(\psi) \tag{2.3}$$

Здесь $g(\psi)$ — произвольная функция ψ. Так как $v_y = v \sin\theta$, то $\sin\theta = g(\psi)$, и, следовательно,

$$\cos\theta \frac{d\theta}{d\psi} = g', \qquad \cos^2\theta = 1 - g^2 \tag{2.4}$$

Из (1.8) после подстановки $v_x = v\cos\theta$, $v_y = v\sin\theta$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\rho v} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial \psi}(\operatorname{tg}\theta) = \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{d\psi} = \frac{g'}{1-g^2}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho v} = \frac{g'\xi}{1-g^2} + S(\psi) \tag{2.5}$$

Здесь $S(\psi)$ — другая произвольная функция ψ.

Подставляя (2.5) либо в (2.1), либо в (2.2), имеем, используя (2.3),

$$-\frac{\partial v}{\partial \psi} + g\left(\frac{g'\xi}{1-g^2} + S(\psi)\right)\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \tag{2.6}$$

Характеристическое уравнение для (2.6) имеет вид

$$\frac{d\psi}{-1} = \frac{d\xi}{gg'\xi/(1-g^2) + gS} = \frac{dv}{0}$$

Интегралами его будут $v = \text{const}$ и решение уравнения

$$\frac{d\xi}{d\psi} + \frac{gg'}{1-g^2}\xi = -gS,$$

которое после интегрирования дает

$$\frac{\xi}{\sqrt{1-g^2}} + q(\psi) = \text{const}, \qquad q(\psi) = \int \frac{Sg}{\sqrt{1-g^2}}\,d\psi \tag{2.7}$$

Следовательно, общее решение (2.6) есть

$$v = \Phi\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-g^2}} + q(\psi)\right) \tag{2.8}$$

Здесь Φ — произвольная функция.

Таким образом, задача решена, и осталось лишь найти $S(\psi)$, $g(\psi)$. Для того чтобы определить их, воспользуемся уравнениями (1.10) и (1.12). При помощи (2.3), (2.5) и (2.8) получим

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = -g\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{a^2}{4\pi}\frac{g}{v}\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{v}\left\{\frac{g'\xi}{1-g^2}+S\right\}\right] = -\frac{g}{\sqrt{1-g^2}}\Phi' - \\ -\frac{a^2}{4\pi}\frac{gg'}{1-g^2}\frac{1}{\Phi^2}+\frac{a^2}{4\pi}\frac{g}{\sqrt{1-g^2}}\left(\frac{g'\xi}{1-g^2}+S\right)\frac{\Phi'}{\Phi^3} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{\Phi'}{(g'\xi/(1-g^2)+S)\sqrt{1-g^2}} - \frac{a^2}{4\pi}\frac{g'}{(g'\xi+S(1-g^2))}\frac{1}{\Phi^2}+\frac{a^2}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{1-g^2}}\frac{\Phi'}{\Phi^3} \tag{2.10}$$

Дифференцируя (2.9) по ξ, имеем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \psi} = -\frac{g}{1-g^2}\Phi'' + \frac{3a^2}{4\pi}\frac{gg'}{(1-g^2)^{3/2}}\frac{\Phi'}{\Phi^3} + \frac{a^2}{4\pi}\frac{g}{1-g^2}\left(\frac{g'\xi}{1-g^2}+S\right)\left(\frac{\Phi''}{\Phi^3}-\frac{3\Phi'^2}{\Phi^4}\right) \tag{2.11}$$

Дифференцируя (2.10) по ψ, имеем

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \psi \partial \xi} = -\frac{g}{1-g^2}\Phi'' + \frac{3a^2}{4\pi}\frac{gg'}{(1-g^2)^{3/2}}\frac{\Phi'}{\Phi^3} + \frac{a^2}{4\pi}\frac{g}{1-g^2}\left(\frac{g'\xi}{1-g^2}+S\right)\left(\frac{\Phi''}{\Phi^3}-\frac{3\Phi'^2}{\Phi^4}\right) + \\ + \frac{\Phi'}{\sqrt{1-g^2}}\frac{[\xi\{gg'^2+g''(1-g^2)\} - Sgg'(1-g^2)+S'(1-g^2)^2]}{\{g'\xi+S(1-g^2)\}^2} - \\ - \frac{a^2}{4\pi\Phi^2}\frac{[S\{g''(1-g^2)+2gg'^2\} - S'g'(1-g^2)]}{\{g'\xi+S(1-g^2)\}^2} \tag{2.12}$$

Сравнивая уравнения (2.11) и (2.12), заключаем, что

$$g''(1-g^2)+gg'^2=0, \qquad S'(1-g^2)-Sgg'=0 \tag{2.13}$$

$$S\{g''(1-g^2)+2gg'^2\} - S'(1-g^2)g' = 0 \tag{2.14}$$

Так как уравнение (2.14) сводится ко второму из уравнений (2.13), если использовать первое, то уравнение (2.14) можно отбросить.

Общее решение первого из уравнений (2.13) имеет вид

$$g(\psi) = \sin(\alpha\psi+\beta) \tag{2.15}$$

где α, β — постоянные интегрирования; уравнение для $S(\psi)$ имеет решение

$$S(\psi) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-g^2}} = \varepsilon \sec(\alpha\psi+\beta) \tag{2.16}$$

Здесь ε — еще одна постоянная интегрирования. Функция $q(\psi)$ определяется из (2.7) после подстановки величин g и S. Из уравнений (2.3), (2.15) имеем $\sin\theta = \sin(\alpha\psi+\beta)$; это означает, что безвихревое движение в физической плоскости отображается в плоскости годографа как радикальный поток из начала. Для нахождения линий тока в физической плоскости используем уравнение (1.7)

$$\partial y / \partial \xi = \operatorname{tg}\theta = \operatorname{tg}(\alpha\psi+\beta), \qquad \partial y / \partial \psi = (\varepsilon+\alpha\xi)\sec^2(\alpha\psi+\beta)$$

Решение этой системы дается выражением

$$y = \left(\xi+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)\operatorname{tg}(\alpha\psi+\beta) \tag{2.17}$$

Следовательно, линии тока в физической плоскости — радиальные линии, исходящие из точки $(-\varepsilon/\alpha, 0)$. Таким образом, приходим к выводу, что в безвихревом движении этот тип потока — единственно возможный.

2°. Рассмотрим случай, когда давление — функция только ψ. В таком случае из условия адиабатичности $p = v^\gamma(\psi)\rho^\gamma$ получаем, что ρ — функция только ψ, а из интеграла Бернулли (1.13) — что v — функция только ψ.

Из (1.9) имеем

$$-\rho = \frac{1}{\partial v/\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\xi}\sin\theta \tag{2.18}$$

Для того чтобы ρ была функцией только ψ, должно быть $\partial\sin\theta/\partial\xi = f_1(\psi)$, что после интегрирования дает

$$\sin\theta = \xi f_1(\psi) + g_1(\psi) \tag{2.19}$$

где $g_1(\psi)$ — произвольная функция ψ. Из (1.7) после использования (2.18) имеем

$$\frac{\partial y}{\partial\xi} = \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial\psi} = \frac{1}{\rho v\cos\theta} = -\sec^2\theta\,\frac{d\lg v/d\psi}{\partial\theta/\partial\xi} \tag{2.20}$$

Исключая y, получим

$$\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 + \left\{2\operatorname{tg}\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 - \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2}\right\}\frac{d\lg v}{\partial\psi} = 0 \tag{2.21}$$

Дифференцируя (2.19) дважды по ξ, имеем

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} = \operatorname{tg}\theta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2$$

Это сводит уравнение (2.21) к следующему:

$$\frac{d}{\partial\psi}\lg v + \frac{\partial}{\partial\psi}\lg\sin\theta = 0 \qquad \text{при} \quad \frac{\partial\theta}{\partial\xi} \neq 0 \tag{2.22}$$

Из последнего уравнения вытекает, что $\partial\lg\sin\theta/\partial\psi$ должно быть функцией только ψ. Для того чтобы выполнялось это условие, произвольная функция $g_1(\psi)$ в (2.19) должна быть равна $\delta f_1(\psi)$, где δ — константа, т. е.

$$\sin\theta = (\xi+\delta)f_1(\psi) \tag{2.23}$$

В результате уравнение (2.22) после интегрирования дает

$$vf_1 = \text{const} = \eta \tag{2.24}$$

С учетом (2.23) и (2.24) уравнения (2.20) приводятся в виду

$$\frac{\partial y}{\partial\xi} = \frac{(\xi+\delta)f_1}{\sqrt{1-(\xi+\delta)^2f_1^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial\psi} = \frac{f_1'}{f_1^2\sqrt{1-(\xi+\delta)^2f_1^2}} \tag{2.25}$$

Первое из них после интегрирования дает

$$y = h(\psi) - \frac{1}{f_1}\sqrt{1-(\xi+\delta)^2f_1^2}, \tag{2.26}$$

где $h(\psi)$ — произвольная функция ψ.

Если (2.26) подставить во второе из уравнений (2.25), получим

$$h' + \frac{f_1'}{f_1^2\sqrt{1-(\xi+\delta)^2f_1^2}} = \frac{f_1'}{f_1^2\sqrt{1-(\xi+\delta)^2f_1^2}}$$

Отсюда $h(\psi) = \text{const} = -b$. Следовательно, уравнение (2.26) становится ($\xi = x$)

$$(y+b)^2 + (x+\delta)^2 = f_1^{-2} = v^2\eta^{-2}$$

т. е. линии тока в физической плоскости — концентрические окружности. Наконец, если $\partial\theta/\partial\xi = 0$, т. е. $\theta = \theta(\psi)$, то из уравнения (1.9) следует $v = \text{const}$, что является тривиальным решением (2.6).

Поступило 23 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладиков Ю. П. Свойства плоского и осесимметричного стационарных потоков в магнитогазодинамике. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика, ч. 2, Физматгиз, 1963.