

На фиг. 6 приведены экспериментальные и теоретические значения коэффициента $\lambda^2/\rho r^3 \mu$ для случая сплошных перегородок. Теоретические данные изображены в виде кривых. Как и при определении собственных частот, рассмотрены два тона колебаний жидкости — радиальный 1 и ему перпендикулярный 2 — для четырех и восьми перегородок. Теоретические результаты хорошо согласуются с экспериментом.

В таблице приведены также экспериментальные значения безразмерных коэффициентов $\lambda_0^2/\rho r^4 \mu$ и $J/\rho r^5$ для восьми перегородок шириной $1/3$ радиуса и для случая $n = 0$.

h/r	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$n = 0, b = 0$	1.20	0.74	0.63	0.69	0.85	1.00	1.45	1.95	2.55	3.28
$n = 8, b = 1/3 r$	0.91	0.50	0.45	0.53	0.71	1.00	1.35	1.90	2.54	3.28
$n = 0, b = 0$	1.37	0.80	0.75	0.92	1.50	2.37	3.50	4.75	6.25	8.40
$n = 8, b = 1/3 r$	2.00	1.25	1.25	1.43	2.00	2.80	3.90	5.25	6.75	8.75

Коэффициенты $\lambda_0^2/\rho r^4 \mu$ и $J/\rho r^5$ даны относительно днища цилиндра. Для случая $n = 0$ экспериментальные значения практически совпадают с теоретическими.

Как видно из таблиц, значения коэффициентов $\lambda_0^2/\rho r^4 \mu$ и $J/\rho r^5$ также могут существенно отличаться от соответствующих значений для случая $n = 0$.

Поступило
II XI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович Б. И. и др. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостью, частично заполненной жидкостью. Космические исследования, 1965, т. 1, № 2.
2. Микишев Г. Н. и др. Об экспериментальном исследовании возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Космические исследования, 1965, т. 1, № 2.
3. Микишев Г. Н., Дорожкин Н. Я. Экспериментальное исследование свободных колебаний жидкости в сосудах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
4. Case K. M., Parkinson W. C. Damping of surface in an incompressible liquid. J. fluid Mech, 1957, vol. 2, part 2, Mach.
5. Мойсеев Н. Н., Петров А. А. Численные методы расчета собственных частот колебаний ограниченного объема жидкости. ВЦ АН СССР, 1966.
6. Miles I. W. Ring Damping of Free Surface Oscillations. J. Appl. Mech., 1958, vol. 25, No. 2.

О ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ЗА УДАРНОЙ ВОЛНОЙ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

М. Д. УСТИНОВ (Калинин)

Уравнения одномерного (с плоской симметрией) адиабатического движения идеального газа преобразуются к форме, удобной для изучения течений между движущимся поршнем и ударной волной переменной интенсивности. Построено решение уравнений движения, содержащее ударную волну, распространяющуюся по покоящемуся газу с переменной начальной плотностью и постоянным давлением. Это решение содержит четыре произвольные постоянные и, в частном случае, дает пример адиабатического безударного сжатия поршнем первоначально покоящегося газа.

1. Пусть $u_0(x, t)$, $p_0(x, t)$, $\rho_*(x, t)$ — параметры газа перед ударной волной, движущейся со скоростью $U_0 = U_0(t)$. Используя условия сохранения массы и импульса на ударной волне [1], нетрудно показать [2], что вдоль нее

$$d\xi + \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad \varphi(\tau) = \frac{p_0 + \rho_* u_0^2 - \rho_* U_0^2}{\rho_*(U_0 - u_0)} \quad (1.1)$$

где функции ξ и τ определяются из равенств

$$d\xi = \rho u dx - (p + \rho u^2) dt, \quad d\tau = \rho dx - \rho u dt, \quad ds = d\xi + \varphi(\tau) d\tau. \quad (1.2)$$

Примем τ и s за новые независимые переменные и преобразуем известные уравнения одномерного адиабатического движения идеального совершенного газа к виду

$$bw + \frac{\partial w}{\partial \sigma} + (w + 1) \frac{\partial w}{\partial s} - ap^{-1/\gamma} \frac{\partial p}{\partial s} = 0, \quad d\sigma = \varphi(\tau) d\tau \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma} + (w + 1) \frac{\partial p}{\partial s} - p \frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad u = \varphi(\tau) w$$

$$p = \rho^\gamma f^\gamma(\tau), \quad a = f(\tau) / \gamma \varphi^2(\tau), \quad b = \varphi'(\tau) / \varphi^2(\tau).$$

Здесь $f(\tau)$ — произвольная функция, γ — показатель адиабаты ($\gamma > 1$). Уравнения движения в форме (1.3) являются удобными при изучении течений в области ω между поршнем и ударной волной, так как функция тока τ сохраняет постоянное значение на поршне (стенке), а образом ударных волн будут, в силу (1.1) и (1.2), прямые $s = \text{const}$. Это обстоятельство справедливо и в случае, если течение в области ω не является адиабатическим и если при переходе через ударную волну происходит диссоциация и ионизация газа, так как при выводе (1.1) используются лишь условия сохранения массы и импульса.

2. Рассмотрим течения газа, для которых величины $a(\tau)$ и $b(\tau)$, определяемые из (1.3), будут постоянными. В этом случае функции $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ определяются вполне

$$\varphi(\tau) = \frac{p_0 k}{\rho_0 h - \tau}, \quad f(\tau) = \frac{\sigma_0 \rho_0^2 h^4}{k^2 (\rho_0 h - \tau)^2} \left(\frac{p_0}{b} \right)^{-(\gamma-1)/\gamma} \quad (2.1)$$

$$\sigma_0 = \frac{\gamma - 1 + 2b\gamma}{\gamma + 1} \left(\frac{2 + b - b\gamma}{\gamma + 1} \right)^{1/\gamma}, \quad b = \frac{p_0 k^2}{\rho_0 h^2}$$

В этих равенствах p_0 , ρ_0 , h и k — произвольные постоянные, размерности которых равны размерности давления, плотности, длины и времени соответственно.

Покажем, что рассматриваемые течения содержат течения, возникающие вследствие распространения по покоящемуся газу с некоторыми параметрами $p_0 = \text{const}$, $\rho = \rho_*(x)$ ударной волны, движущейся с переменной скоростью $U_0(t)$.

В самом деле, положим, что

$$U_0 = \frac{\rho_0 h^2}{k (\rho_0 h - \tau)}, \quad p_* = \frac{(\rho_0 h - \tau)^2}{\rho_0 h^2} \quad (2.2)$$

Тогда нетрудно доказать, что если функции p и w удовлетворяют при $s = 0$ условиям

$$p|_{s=0} = \frac{2 + b - b\gamma}{(\gamma + 1)b} p_0, \quad w|_{s=0} = \frac{2(1 - \gamma b)}{(\gamma + 1)b} \equiv w_* \quad (2.3)$$

то известные условия на ударной волне ($s = 0$) обращаются в тождество. При этом, поскольку коэффициенты a и b в уравнениях (1, 3) постоянны (они определенным образом выражаются через p_0 , ρ_0 , h , k) и начальные условия не зависят от σ , то функции p и w будут зависеть лишь от s , то есть система (1.3) переходит в систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Решая эту систему с учетом условий (2.3), получим

$$p = p_0(w + 1), \quad s = p_0 k \int_{w_*}^w \left[\frac{\sigma_0}{\gamma} b^{-(\gamma+1)/\gamma} (z + 1)^{-(\gamma+1)/\gamma} - 1 \right] \frac{z + 1}{z} dz. \quad (2.4)$$

На ударной волне $dt = \rho_* dx$ и $dx = U_0 dt$, поэтому для распределения плотности перед ударной волной и для закона движения волны получим

$$\rho_*(x) = \frac{\rho_0 h^2}{(x + h)^2}, \quad x_0(t) = h \left(\exp \frac{t}{k} - 1 \right) \quad (2.5)$$

Используя (2.4), получим из (1.2)

$$\frac{x}{h} = \frac{b \rho_0 h}{\rho_0 h - \tau} [w + \sigma_0 b^{-(\gamma+1)/\gamma} (w + 1)^{-1/\gamma}] - b [w_* + \sigma_0 b^{-(\gamma+1)/\gamma} (w_* + 1)^{-1/\gamma}]$$

$$\frac{t}{k} = \ln \frac{w}{w_*} - \frac{1}{\gamma} \sigma_0 b^{-(\gamma+1)/\gamma} \int_{w_*}^w (z + 1)^{-(\gamma+1)/\gamma} \frac{dz}{z} - \ln \frac{\rho_0 h - \tau}{\rho_0 h} \quad (2.6)$$

При интегрировании были использованы условия на ударной волне при $t = 0$.

Полагая в (2.6) $\tau = \text{const}$, получим в параметрическом виде траектории частиц газа. В частности, при $\tau = 0$ получим закон движения поршня, порождающего ударную волну, движущуюся по закону $x = x_0(t)$

$$\frac{x}{h} = b[w - w_* + \sigma_0 b^{-(\gamma+1)/\gamma}(w+1)^{-1/\gamma} - \sigma_0 b^{-(\gamma+1)/\gamma}(w_*+1)^{-1/\gamma}]$$

$$\frac{t}{k} = \ln \frac{w}{w_*} - \frac{1}{\gamma} \sigma_0 b^{-(\gamma+1)/\gamma} \int_{w_*}^w \frac{1}{z} (z+1)^{-(\gamma+1)/\gamma} dz, \quad w_* \leq w < \infty \quad (2.7)$$

Таким образом, формулы (2.1), (2.4) и (2.6) дают в замкнутом виде точное решение следующей задачи: в начальный момент в области $x \geq 0$ находится покоящийся газ, давление которого постоянно и равно p_0 , а плотность определяется первым из соотношений (2.5). В момент $t = 0$ в область $x > 0$ начинает двигаться поршень по закону (2.7). Перед поршнем возникает ударная волна, закон движения которой дается вторым из равенств (2.5). Найденное решение содержит 4 произвольные постоянные p_0 , ρ_0 , h и k .

Обозначив через M_0 отношение скорости распространения ударной волны к скорости звука покоящегося перед ней газа, найдем, что $M_0 = (\gamma b)^{-1/2}$. В силу второго закона термодинамики $M_0 > 1$, то есть $b < 1/\gamma$.

Масса покоящегося в начальный момент газа (в области $x > 0$) оказывается равной $\rho_0 h$ (на единицу площади сечения).

Известные автору точные решения газодинамических уравнений, содержащие ударные волны конечной амплитуды [3–6], имеют ту особенность, что при $x = 0$ некоторые газодинамические параметры обращаются в бесконечность (или интенсивность ударной волны падает с течением времени). Построенное решение не имеет этих особенностей.

3. Рассмотрим предельный случай, когда $M_0 = 1$, то есть $b = \gamma^{-1}$.

Тогда ударная волна вырождается в звуковую волну. Закон движения поршня мы получим из (2.7), переходя к пределу при $b \rightarrow \gamma^{-1}$ и используя (2.1) и (2.3).

$$x = h \left[\frac{w}{\gamma} + (w+1)^{-1/\gamma} - 1 \right], \quad t = k \int_0^w \frac{(z+1)^{(\gamma+1)/\gamma} - 1}{z(z+1)^{(\gamma+1)/\gamma}} dz \quad (3.1)$$

$$k = \sqrt{\rho_0 h^2 / \gamma p_0}, \quad 0 \leq w < \infty$$

Итак, имеем следующий результат: пусть в начальный момент в области $x \geq 0$ находится покоящийся газ, давление которого постоянно и равно p_0 , а плотность определяется первым из равенств (2.5). В момент времени $t = 0$ в область, занятую газом, начинает двигаться поршень по закону (3.1). Формулы (2.1), (2.4) и (2.6) при $b \rightarrow \gamma^{-1}$ дают нам картину возникающего течения.

Полученное течение дает пример безударного адиабатического сжатия поршнем первоначально покоящегося газа.

Решение (2.1), (2.4) и (2.6) системы уравнений (1.3) можно трактовать также как решение некоторой задачи Коши. При этом ограничения, которые мы налагали на k ($k > 0$) и на b , отпадают. Начальные значения газодинамических величин в области $-\infty < x < \infty$ получаются из упомянутых выше равенств при $t = 0$.

Поступило
6 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Курант Р., Фридрихс. Сверхзвуковое течение и ударные волны, ИЛ, 1950.
2. Устинов. М. Д. Преобразование и некоторые решения уравнений одномерного адиабатического движения идеального газа, Механика жидкости и газа, 1966, № 3.
3. Jones C. W. On a gas flow in one dimension following a normal shock of variable strength, Proc. Roy. Soc., 1954, № 1145, Serie A, vol. 221.
4. Cabannes H. Sur l'integration d'une equation de Monge-Ampère, Compt. Rend. Acad. Sci., 1955, vol. 241, No 19.
5. Коробейников В. П. Точное решение нелинейной задачи о взрыве в газе при переменной начальной плотности, ДАН СССР, 1957, т. 117, № 6.
6. J. B. Keller Spherical, cylindrical and one dimensional gas flows Quart. Appl. Math., 1956, vol. XIV, No. 2.