ОТНОСИТЕЛЬНО УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ, ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ КОНИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ

Л. В. ДОКУЧАЕВ

(Москва)

Устойчивость вращательного движения тела с цилиндрической полостью, наполненной идеальной несжимаемой жидкостью, была подробно рассмотрена Н. Г. Четаевым [1]. В ней предполагается потенциальность течения жидкости, что является хорошим приближением к физической реальности в случае малых колебаний тела или при наличии внутри полости дополнительных перегородок. При этом использовались решения внутренней задачи Неймана, полученные Н. Е. Жуковским в [2], где он определил потенциал скоростей жидкости и для некоторых других полостей.

В работе [3] был найден потенциал скоростей для более общего случая цилиндрических полостей. Задача об устойчивости вращающегося волчка с эллипсоидальной и цилиндрической полостью была рассмотрена в работах С. Л. Соболева, В. В. Румянцева, А. Ю. Ишлинского, М. Е. Темченко и др.

В настоящей работе рассматривается устойчивость движения тела имеющего наполненную идеальной жидкостью коническую полость. Последняя может быть разделена радиальными перегородками, проходящими через ее ось симметрии. Течение жидкости, как и в работе [1], предполагается безвихревым.

1. Движение тела с полостью будет определяться скоростью поступательного движения $\mathbf{v}$ какой-нибудь его точки O и скоростью вращательного движения $\boldsymbol{\omega}$ относительно этой точки. Внутреннее движение жидкости изменяется только от вращательного движения тела около точки O, которую можно считать неподвижной, если рассматривать одни лишь относительные движения.

Введем связанную с телом систему координат $x_1x_2x_3$ с осями, направленными по главным осям эллипсоида инерции тела. Потенциальную функцию абсолютных скоростей частиц жидкости, выраженную через координаты точки в подвижной системе координат, представим в виде

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i(t)\Phi_i(x_1, x_2, x_3, t) \tag{1.1}$$

где ω_i — проекции мгновенной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы координат $x_1x_2x_3$.

Гармоническая функция скоростей (1.1) должна удовлетворять граничному условию непроницаемости стенок полости

$$\partial\Phi / \partial\nu = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \boldsymbol{\nu}) = (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}) \quad \text{на} \quad S \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки на поверхности жидкости S, а $\boldsymbol{\nu}$ — вектор внешней нормали к поверхности S.

Используя (1.1) и (1.2), получим для функций Φ_i следующие краевые задачи:

$$\Delta\Phi_i = 0, \qquad \partial\Phi_i / \partial\nu = (\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nu})_i \quad \text{на } S \tag{1.3}$$

Так как проекции векторов R и $\boldsymbol{\nu}$ на оси связанной системы координат неизменны, то функции Φ_i не зависят от времени t и определяются только формой полости, занятой жидкостью.

Живая сила вращательного движения тела и относительных движений жидкости равна

$$2T = \sum_{i=1}^{3} J_{ii}^{\circ}\omega_i^2 + \rho \int_{\tau} (\nabla\Phi)^2 d\tau = \sum_{i=1}^{3} J_{ii}^{\circ}\omega_i^2 + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \omega_i\omega_j J_{ij} \tag{1.4}$$

где в силу формул Грина

$$J_{ij} = \rho \int_{\tau} \nabla\Phi_i \nabla\Phi_j d\tau = \rho \int_{S} \Phi_i \frac{\partial\Phi_j}{\partial\nu} dS = \rho \int_{S} \Phi_j \frac{\partial\Phi_i}{\partial\nu} dS \tag{1.5}$$

Здесь ρ — плотность, τ — объем жидкости, J_{ii}° — моменты инерции тела относительно осей $x_i (i = 1, 2, 3)$, проходящих через центр вращения.

Если центр вращения O^* не совпадает с началом системы координат O, положение которого относительно O^* определяется вектором $\mathbf{R}_0$, то граничное условие (1.2) примет вид

$$\partial\Phi^* / \partial\nu = [(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}) \times \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}] \text{ на } S \tag{1.6}$$

Тогда потенциал скоростей представится следующим образом:

$$\Phi^*(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i(t)[(\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R})_i + \Phi_i(x_1, x_2, x_3)] \tag{1.7}$$

где функции Φ_i — решения краевых задач (1.3).

Моменты инерции эквивалентного тела относительно осей, параллельных осям системы $x_1x_2x_3$, но проходящих через центр вращения O^*, будут определяться формулами

$$J_{ij}^* = \rho \int_\tau \nabla[(\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R})_i + \Phi_i] \nabla[(\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R})_j + \Phi_j]\, d\tau =$$

$$= \rho \int_S [(\mathbf{R}_0 \times \mathbf{R})_i + \Phi_i][(\mathbf{R}_0 + \mathbf{R}) \times \boldsymbol{\nu}]_j\, dS =$$

$$= J_{ij} + m[\nabla(\mathbf{R}_0\times\mathbf{R})_i \nabla(\mathbf{R}_0\times\mathbf{R})_j + \nabla(\mathbf{R}_0\times\mathbf{R})_i \nabla(\mathbf{R}_c\times\mathbf{R})_j + \nabla(\mathbf{R}_c\times\mathbf{R})_i \nabla(\mathbf{R}_0\times\mathbf{R})_j]. \tag{1.8}$$

Здесь m — масса жидкости, J_{ij} — моменты инерции эквивалентного тела (1.5) относительно осей системы координат $x_1x_2x_3$, $\mathbf{R}_c$ — радиус-вектор, проведенный из O^* в центр масс жидкости C.

2. Переходим теперь к определению потенциалов скоростей жидкости и моментов инерции эквивалентного тела для конической полости с дном, образованным поверхностью сферы с центром в вершине конуса [4].

Поместим начало координат O в вершине конуса, угол полураствора которого θ_0. Ось x_1 направим по продольной оси полости в сторону ее дна. Примем длину образующей конической поверхности за единицу и введем сферическую систему координат

$$x_1 = R\cos\theta, \qquad x_2 = R\sin\theta\cos\eta, \qquad x_3 = R\sin\theta\sin\eta \tag{2.1}$$

Гармонические функции $\Phi_i(R, \theta, \eta)$ должны удовлетворять уравнению Лапласа (1.3)

$$\frac{1}{R^2}\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial\Phi_i}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi_i}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial\eta^2}\right\} = 0 \tag{2.2}$$

Представим его частные решения в виде следующего произведения трех функций от каждой из координат

$$\Phi_i(R, \theta, \eta) = X_\nu(R) Y_\nu(\theta) Z_m(\eta) \tag{2.3}$$

Применяя метод разделения переменных, получим, что эти функции удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$(R^2X_\nu')' - \nu(\nu+1)X_\nu = 0, \qquad Z_m'' + m^2Z_m = 0$$

$$\sin\theta\,(\sin\theta Y_\nu')' + [\nu(\nu+1)\sin^2\theta - m^2]Y_\nu = 0 \tag{2.4}$$

где ν и m — константы разделения.

Функции R^ν и $R^{-\nu-1}$ являются двумя линейно-независимыми решениями первого уравнения (2.4); второму удовлетворяют тригонометрические функции $\cos m(\eta + \alpha)$, где α — постоянная; а третьему — m-е присоединенные функции Лежандра первого и второго рода, ν-го порядка $P_\nu^m(\theta)$ и $Q_\nu^m(\theta)$.

Условия (1.3) примут вид

$$\left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial R}\right|_{R=1} = \left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = -R^2\sin\eta, \quad \left.\frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = R^2\cos\eta \tag{2.5}$$

Однородность граничных условий на дне ($R = 1$) объясняется коллинеарностью векторов $\mathbf{R}$ и $\boldsymbol{\nu}$.

Краевая задача (2.2) и (2.5) для Φ_1 имеет тривиальное решение

$$\Phi_1(R,\ \theta,\ \eta) \equiv \text{const} \tag{2.6}$$

которое подтверждает факт о неподвижности идеальной жидкости в полости вращения при круговом ее движении относительно оси симметрии.

Функции Φ_2 и Φ_3 представим в виде суммы

$$\Phi_i(R,\theta,\eta) = (-1)^i\,[-R^2\theta + P(R,\theta)]\,\chi_i(\eta), \qquad \chi_i(\eta) = \begin{cases} \sin\eta & \text{при } i = 2 \\ \cos\eta & \text{при } i = 3 \end{cases} \tag{2.7}$$

Тогда из (2.2), (2.5) получается следующая задача для определения функции P:

$$\frac{1}{R^2}\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial P}{\partial R}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial P}{\partial\theta}\right) - \frac{P}{\sin^2\theta}\right\} = F_1(\theta) \tag{2.8}$$

$$\left.\frac{\partial P}{\partial R}\right|_{R=1} = 2\theta, \quad \left.\frac{\partial P}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} = 0, \quad F_1(\theta) = \left(6 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right)\theta + \operatorname{ctg}\theta \tag{2.9}$$

Решение уравнения (2.8) будем искать в виде суммы двух функций $P_1(R,\ \theta)$ и $P_2(R,\theta)$, из которых первая является решением однородного уравнения (2.8), то есть $F_1 \equiv 0$, с неоднородными граничными условиями (2.9), а вторая — решением неоднородного уравнения с нулевыми условиями на границе.

Применяя метод разделения переменных, получим

$$P_1(R,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_\nu \frac{R^\nu}{\nu} Y_\nu(\theta), \quad P_2(R,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_\nu}{(\nu+3)(\nu-2)}\left[\frac{2}{\nu}R^\nu - R^2\right] Y_\nu(\theta)$$

$$A_\nu = \frac{2D_\nu}{N_\nu^2}, \quad M_\nu = \frac{1}{N_\nu^2}[\sin\theta_0 - (\nu+3)(\nu-2)D_\nu], \quad Y_\nu(\theta) = \frac{P_\nu^1(\theta)}{P_\nu^1(\theta_0)} \tag{2.10}$$

$$D_\nu = \int_0^{\theta_0} \theta Y_\nu(\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{\sin\theta_0}{(\nu+3)(\nu-2)} + \frac{1}{(\nu+3)(\nu-2)}\int_0^{\theta_0} F_1(\theta) Y_\nu(\theta)\sin\theta\, d\theta,$$

где произвольную до настоящего момента постоянную ν примем равной n-му корню уравнения

$$\frac{d}{d\theta}[P_\nu^1(\theta)]|_{\theta=\theta_0} = 0 \tag{2.11}$$

Если μ — какой-либо другой корень этого уравнения, то условие ортогональности и выражение для нормы функций будут следующими:

$$\int_0^{\theta_0} Y_\nu(\theta) Y_\mu(\theta)\sin\theta\, d\theta = 0, \quad N_\nu^2 = \int_0^{\theta_0} Y_\nu^2(\theta)\sin\theta\, d\theta = -\frac{\sin\theta_0}{(2\nu+1)}\frac{d}{d\nu}[Y_\nu'(\theta_0)] \tag{2.12}$$

Таким образом, учитывая (2.7), (2.10), приходим к выражению для функций Φ_i, пропорциональных потенциалу скоростей

$$\Phi_i(R,\theta,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \sin\theta_0}{(\nu+3)(\nu-2)N_\nu^2}\left(\frac{2}{\nu}R^\nu - R^2\right) Y_\nu(\theta)\chi_i(\eta) \tag{2.13}$$

Теперь, согласно формулам (1.5), (2.5), (2.6), (2.13), легко получить выражения для моментов инерции эквивалентного тела

$$J_{11} = J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0, \quad J_{22} = J_{33} = \rho\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(\nu+5)\sin^2\theta_0}{5\nu(\nu+3)^2 N_\nu^2} \tag{2.14}$$

В том случае, когда рассматриваемый конус является усеченным, в (2.5) добавляется еще одно однородное граничное условие на втором дне ($R = R_1 < 1$).

Повторяя предыдущие рассуждения, используя оба линейно-независимых решения первого уравнения (2.4), применяя метод варьирования постоянных, получим

$$\Phi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \sin\theta_0}{(\nu+3)(\nu-2)N_\nu^2} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2R_1^{\nu+3}[(\nu+1)R^{2\nu+1}+\nu] - 2[(\nu+1)R^{2\nu+1}+\nu R_1^{2\nu+1}]}{\nu(\nu+1)R^{\nu+1}(R_1^{2\nu+1}-1)} - R^2 \right\} Y_\nu(\theta)\chi_i(\eta) \tag{2.15}$$

а следовательно, [4],

$$J_{22} = J_{33} = \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \sin^2\theta_0}{(\nu+3)(\nu-2)N_\nu^2} \left\{ \left[\frac{1}{5} - \frac{2}{(\nu+3)(\nu-2)} \right] (1-R_1^5) - \right.$$

$$\left. - 4\frac{(\nu+1)+\nu R_1^{2\nu+1}+R_1^5[(\nu+1)R_1^{2\nu+1}+\nu] - 2(2\nu+1)R_1^{\nu+3}}{\nu(\nu+1)(\nu+3)(\nu-2)(R_1^{2\nu+1}-1)} \right\} \tag{2.16}$$

которые при $R_1 \to 0$ переходят в формулы (2.13) и (2.14).

3. При рассмотрении движения жидкости в неусеченном конусе с радиальными сплошными перегородками, проходящими через его продольную ось, в (2.5) появляется дополнительное граничное условие непроницаемости жидкости на перегородках. Если ось x_2 расположим в биссекториальной плоскости двугранного угла, образованного перегородками, то это условие примет вид

$$\left.\frac{\partial\Phi_1}{\partial\eta}\right|_{\eta=\pm\alpha} = R^2\sin^2\theta, \qquad \left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial\eta}\right|_{\eta=\pm\alpha} = -R^2\sin\theta\cos\theta\chi_i(\pm\alpha) \tag{3.1}$$

Функцию Φ_1 представим следующим образом:

$$\Phi_1(R,\theta,\eta) = k^{-1}R^2\sin^2\theta\sin k(\eta+\alpha) + G_1(R,\theta,\eta), \qquad k = \pi/\alpha \tag{3.2}$$

$$G_1(R,\theta,\eta) = \sum_{s=0}^{\infty} \{-\pi^{-1}a_m R^2\sin^2\theta + P_m(R,\theta)\}\cos m_2(\eta+\alpha)$$

Здесь введены обозначения

$$m_2 = \frac{\pi(2s+1)}{2\alpha} = \frac{k(2s+1)}{2}, \qquad \int_{-\alpha}^{\alpha} [\cos m(\eta+\alpha)]^2 d\eta = \alpha\sigma_0$$

$$a_m = \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin k(\eta+\alpha)\cos m_2(\eta+\alpha)d\eta = \frac{2k}{k^2-m_2^2}, \qquad \sigma_0 = \begin{cases} 1 & \text{при } m\neq 0 \\ 2 & \text{при } m=0 \end{cases} \tag{3.3}$$

Для функции P_m получим неоднородное уравнение и однородные граничные условия. Применим метод разделения переменных по аналогии с (2.10), причем в качестве функций от аргумента θ возьмем решение третьего уравнения (2.4)

$$Y_{\nu m}(\theta) = \frac{P_\nu^m(\theta)}{P_\nu^m(\theta_0)} \tag{3.4}$$

где ν — n-й корень уравнения $Y_{\nu m}'(\theta_0) = 0$. Тогда

$$P_m(R,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2kE_{\nu m}}{\pi(\nu+3)(\nu-2)N_{\nu m}^2}\left(\frac{2}{\nu}R^\nu - R^2\right)Y_{\nu m}(\theta)$$

$$E_{\nu m} = \int_0^{\theta_0} Y_{\nu m}(\theta)\sin\theta\, d\theta, \qquad N_{\nu m}^2 = \int_0^{\theta_0} Y_{\nu m}^2(\theta)\sin\theta\, d\theta \tag{3.5}$$

Рассматривая совместно формулы (3.2), (3.5), приходим к следующему выражению для функции Φ_1:

$$\Phi_1(R, \theta, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{2kE_{\nu m}}{\pi(\nu+3)(\nu-2)N_{\nu m}^2}\left(\frac{2}{\nu}R^\nu - R^2\right)Y_{\nu m}(\theta)\cos m_2(\eta+\alpha) \quad (3.6)$$

При решении краевых задач (2.2), (2.5), (3.1) представим функции Φ_2 и Φ_3 в виде следующих сумм:

$$\Phi_i(R, \theta, \eta) = (-1)^i[-R^2\sin\theta\cos\theta\chi_i(\eta) + G_i(R, \theta, \eta)]$$

$$G_i(R, \theta, \eta) = \sum_{s=0}^{\infty} A_m K_m(R, \theta)\cos m_i(\eta+\alpha) \qquad (i = 2, 3)$$

$$m_2 = \frac{\pi(2s+1)}{2\alpha} = \frac{k(2s+1)}{2}, \qquad m_3 = \frac{\pi s}{\alpha} = ks \quad (3.7)$$

$$A_m = \frac{b_m}{\alpha\sigma_0}, \qquad b_m = \int_{-\alpha}^{\alpha}\chi_i(\eta)\cos m_i(\eta+\alpha)\,d\eta = \frac{2\chi_{5-i}(\alpha)}{1-m_i^2}$$

Если под функцией K_m подразумевать сумму

$$K_m(R, \theta) = R^2(\sin\theta\cos\theta - \theta) + L_m(R, \theta), \quad (3.8)$$

то для функции L_m получим краевую задачу, аналогичную (2.8), (2.9), решение которой в силу (3.4), (3.5) будет

$$L_m(R, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{D_{\nu m}}{N_{\nu m}^2}\frac{2}{\nu}R^\nu + \frac{H_{\nu m}}{(\nu+3)(\nu-2)N_{\nu m}^2}\left(\frac{2}{\nu}R^\nu - R^2\right)\right]Y_{\nu m}(\theta) \quad (3.9)$$

Здесь использованы следующие интегральные соотношения

$$D_{\nu m} = \int_0^{\theta_0}\theta Y_{\nu m}(\theta)\sin\theta\,d\theta, \quad C_{\nu m} = \int_0^{\theta_0}Y_{\nu m}(\theta)\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$H_{\nu m} = \int_0^{\theta_0}F_{\nu m}(\theta)Y_{\nu m}(\theta)\sin\theta\,d\theta = 2\sin^3\theta_0 + (\nu+3)(\nu-2)(C_{\nu m} - D_{\nu m}) \quad (3.10)$$

$$B_{\nu m} = \sin\theta_0 - (1-m^2)\int_0^{\theta_0}Y_{\nu m}(\theta)\cos\theta\,d\theta = 2\sin^3\theta_0 + (\nu+3)(\nu-2)C_{\nu m},$$

$$F_{\nu m}(\theta) = \left(6 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\theta + m^2\operatorname{ctg}\theta$$

Собирая вместе формулы (3.7)—(3.9), получим следующие выражения для функций Φ_2 и Φ_3:

$$\Phi_i(R, \theta, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^i b_m B_{\nu m}}{\alpha\sigma_0(\nu+3)(\nu-2)N_{\nu m}^2}\left(\frac{2}{\nu}R^\nu - R^2\right)Y_{\nu m}(\theta)\cos m_i(\eta+\alpha) \quad (3.11)$$

После этого, согласно (1.5), (3.6), (3.11), моменты инерции эквивалентного тела для секториальной части конуса будут равны

$$J_{11}^{(k)} = \rho\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{4k(\nu+5)E_{\nu m}^2}{5\pi\nu(\nu+3)^2N_{\nu m}^2} \qquad J_{ii}^{(k)} = \rho\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{4k(\nu+5)B_{\nu m}^2\chi_{5-i}^2(\pi/k)}{5\pi\sigma_0\nu(\nu+3)^2(1-m_i^2)^2N_{\nu m}^2}$$

$$J_{23}^{(k)} = J_{13}^{(k)} = 0, \quad J_{12}^{(k)} = \rho\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{4k(\nu+5)B_{\nu m}E_{\nu m}\cos(\pi/k)}{5\pi\nu(\nu+3)^2(1-m_2^2)N_{\nu m}^2} \quad (i = 2, 3) \quad (3.12)$$

Если коническая круговая полость разделена перегородками на равные отсеки, число которых $k = \pi / \alpha$, то суммарные моменты инерции эквивалентных тел выразятся через (3.12) по формулам

$$J_{11} = kJ_{11}^{(k)}, \quad J_{22} = \sum_{p=1}^{k} (J_{22}^{(k)} \cos^2\eta_p + J_{33}^{(k)} \sin^2 \eta_p), \quad \eta_p = 2\pi p/k + \beta$$

$$J_{33} = \sum_{p=1}^{k} (J_{22}^{(k)} \sin^2 \eta_p + J_{33}^{(k)} \cos^2 \eta_p), \quad J_{12} = \sum_{p=1}^{k} J_{12}^{(k)} \cos \eta_p \tag{3.13}$$

$$J_{13} = \sum_{p=1}^{k} J_{12}^{(k)} \sin \eta_p, \quad J_{23} = \sum_{p=1}^{k} (J_{22}^{(k)} - J_{33}^{(k)}) \sin \eta_p \cos \eta_p$$

Здесь η_p — угол между осью x_2 и биссектрисой p-го сектора, лежащего в плоскости x_2x_3; β — произвольная постоянная. Для случая трех и более перегородок эти формулы упрощаются

$$J_{11} = kJ_{11}^{(k)}, \qquad J_{12} = J_{23} = J_{13} = 0,$$
$$J_{22} = J_{33} = k / 2(J_{22}^{(k)} + J_{33}^{(k)}) \qquad (k > 2) \tag{3.14}$$

В случае $\alpha = \pi / 2$, то есть одной сплошной диаметральной перегородки, по которой направим ось x_3, полость уже не обладает осевой симметрией, а эллипсоид эквивалентного тела становится трехосным

$$J_{11} = \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1,3,\ldots} \frac{16(\nu + 5)E_{\nu m}^2}{5\pi\nu(\nu + 3)^2 N_{\nu m}^2}, \qquad J_{22} = \rho \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(\nu + 5)\sin^2 \theta}{5\nu(\nu + 3)^2 N_\nu^2}$$

$$J_{12} = J_{13} = J_{23} = 0, \qquad J_{33} = \rho \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0,2,\ldots} \frac{16(\nu + 5)B_{\nu m}^2}{5\pi\sigma_0\nu(\nu + 3)^2(1-m^2)^2 N_{\nu m}^2} \tag{3.15}$$

Из последней формулы видно, что при вращении полости около оси x_2, перпендикулярной плоскости перегородки, момент инерции J_{22} совпадает с аналогичным для полости без перегородок (2.14), что можно было для идеальной жидкости предсказать заранее.

4. Будем в дальнейшем рассматривать тело, обладающее осевой симметрией относительно оси x_1. Так же, как и в работе [1], при решении задачи об устойчивости движения тела, закрученного около оси x_1 с угловой скоростью ω_0, учтем лишь опрокидывающую пару с моментом $\mu \sin\gamma$, где γ — угол между продольной осью тела x_1 и скоростью движения центра тяжести системы O^*.

Если перегородки отсутствуют (п.2), то условие устойчивости вращательных движений тела с жидкостью имеет вид

$$(J_{11}^\circ)^2\omega_1^2 - 4(J_{22}^\circ + J_{22}^*)\mu > 0 \tag{4.1}$$

Наличие внутри полости перегородок (п.3), не нарушающих осевой симметрии эллипсоида инерции тела с жидкостью ($k > 2$), несколько изменяет условие устойчивости, которое будет теперь нелинейно зависеть от плотности жидкости

$$(J_{11}^\circ + J_{11}^*)^2\omega_1^2 - 4(J_{22}^\circ + J_{22}^*)\mu > 0 \qquad (k > 2) \tag{4.2}$$

Отсюда видно, что уменьшение продольного и увеличение поперечного моментов инерции отрицательно влияют на условие устойчивости.

Наиболее сложный вид условие устойчивости имеет в случае одной диаметральной перегородки в полости, когда эллипсоид инерции трехосный

$$[(J_{11}' - J_{33}')\omega_0^2 - \mu][(J_{11}' - J_{22}')\omega_0^2 - \mu] > 0, \quad J_{ii}' = J_{ii}^\circ + J_{ii}^*$$
$$[J_{22}'J_{33}' + (J_{33}' - J_{11}')(J_{22}' - J_{11}')]\omega_0^2 - \mu(J_{22}' + J_{33}') > 0$$
$$\{[J_{22}'J_{33}' + (J_{33}' - J_{11}')(J_{22}' - J_{11}')]\omega_0^2 - \mu(J_{22}' + J_{33}')\}^2 - \tag{4.3}$$
$$- 4J_{22}'J_{23}'[(J_{11}' - J_{33}')\omega_0^2 - \mu][(J_{11}' - J_{22}')\omega_0^2 - \mu] > 0$$

Если в неравенствах (4.3) положить $J_{22}' = J_{33}'$, то последнее из них приведется к условию Майевского (4.2), а два первых при этом будут удовлетворены.

Корни и основные параметры ν, $N_{\nu m}^2$, $E_{\nu m}$, $B_{\nu m}$, определяемые формулами (2.12), (3.5), (3.10) приведены в таблице в зависимости от угла полураствора θ_0, числа волн в диаметральном (n) и окружном (s) направлениях. Для малых углов раствора ($\theta_0 < 20°$) приведены асимптотические формулы.

$\theta°$	m	n	ν	$N_{\nu m}^2$	$E_{\nu m}$	$B_{\nu m}$
$\theta_0 < 20°$	0	1	$3.842/\theta_0$	$0.5000\,\theta_0^2$	0	$1.708\,\theta_0$
	1	1	$1.841/\theta_0$	$0.3525\,\theta_0^2$	$0.4061\,\theta_0^2$	$1.000\,\theta_0$
	2	1	$3.054/\theta_0$	$0.2856\,\theta_0^2$	$0.3488\,\theta_0^2$	$2.468\,\theta_0$
	3	1	$4.201/\theta_0$	$0.2450\,\theta_0^2$	$0.3093\,\theta_0^2$	$4.313\,\theta_0$
	4	1	$5.317/\theta_0$	$0.2171\,\theta_0^2$	$0.2800\,\theta_0^2$	$6.412\,\theta_0$
20°	0	1	10.49	0.05970	0	0.5878
	0	2	19.60	0.05969	0	0.1847
	1	1	4.843	0.04239	0.04880	0.3420
	1	2	14.79	0.05760	—0.01251	0.3420
	1	3	21.97	0.05888	0.006013	0.3420
	2	1	8.355	0.03430	0.04194	0.8433
	2	2	18.75	0.05439	—0.01756	—0.1767
	3	1	11.69	0.02940	0.03746	1.457
	4	1	14.93	0.02603	0.03363	2.158
40°	0	1	5.012	0.2245	0	1.127
	0	2	9.562	0.2244	0	0.3386
	1	1	2.275	0.1630	0.1886	0.6428
	1	2	7.176	0.2166	—0.04837	0.6428
	1	3	11.75	0.2213	0.02331	0.6428
	1	4	14.29	0.2227	—0.01467	0.6428
	2	1	4.090	0.1313	0.1613	1.545
	2	2	9.193	0.2045	—0.06775	—0.3550
	3	1	5.828	0.1123	0.1426	2.628
	4	1	7.528	0.09931	0.1289	3.852

Поступило
27 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г., Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью, ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
2. Жуковский Н. Е., О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Собр. соч., т. II, Гостехиздат, 1949.
3. Рабинович Б. И., Докучаев Л. В., Полякова З. М., О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Космические исследования. 1965, т. 3, № 2.
4. Докучаев Л. В., К решению краевой задачи о колебаниях жидкости в конических полостях. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.