

О КОЛЕБАНИЯХ ЖИДКОСТИ В СОСУДЕ, ИМЕЮЩЕМ ФОРМУ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИДЕДА

В. И. СТОЛБЦОВ

(Москва)

В работе рассмотрены вынужденные и свободные колебания жидкости, частично заполняющей полость в форме прямоугольного параллелепипеда. Изучены особенности этих колебаний при немалых деформациях свободной поверхности. Показано, что при определенных частотах и амплитудах плоских поступательных движений параллелепипеда основной тон колебаний жидкости возбуждается в плоскости, перпендикулярной плоскости движения сосуда. Оценено влияние малого линейного демпфирования колебаний жидкости на форму границ главной области неустойчивости колебаний жидкости.

Немалые колебания жидкости в цилиндре рассматривались в работе [1]. Та же задача для полости произвольной конфигурации была предметом исследования в работе [2]. Отметим также, что выводы предлагаемой работы качественно согласуются с основными результатами, полученными несколько иным способом в работе [3], для полости в форме прямого кругового цилиндра.

1. Рассматривается движение идеальной несжимаемой жидкости, частично заполняющей прямоугольный параллелепипед. В основании параллелепипеда лежит квадрат с длиной стороны $2L$. Жидкость находится в поле массовых сил, обладающих потенциалом, градиент которого \mathbf{j} коллинеарен оси параллелепипеда. Свяжем с телом систему координат $x_1x_2x_3$, оси x_2 и x_3 которой лежат в плоскостях симметрии тела, параллельных сторонам квадрата, лежащего в основании параллелепипеда, а ось x_1 — на линии пересечения этих плоскостей.

Пусть e_i — орт оси x_i , тогда

$$\mathbf{j} = -je_1, \quad j = |\mathbf{j}| \quad (1.1)$$

Будем считать, что в начальный момент времени движение жидкости было безвихревым. Тогда, в соответствии с допущением о потенциальности поля массовых сил, движение жидкости будет обладать потенциалом скоростей φ в любой момент времени [4]. Пусть Q — объем, занятый жидкостью в состоянии покоя, ограниченный смоченной поверхностью S и невозмущенной свободной поверхностью Σ_0 , Σ — возмущенная свободная поверхность жидкости.

Пусть счетное множество функций φ_k состоит из решений следующей задачи [5]:

$$\Delta \varphi_k = 0 \quad \text{в } Q, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \right|_{\Sigma_0} = \frac{\omega_k^2}{J} \varphi_k = \psi_k, \quad \left. \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} \right|_S = 0 \quad (1.2)$$

Здесь ν — орт нормали к поверхностям S , Σ , Σ_0 ; ω_k^2 — k -е — собственное число задачи (1.2).

В силу симметрии полости, множество функций φ_k распадается на четыре подмножества функций φ_{ri} , φ_{pj} , φ_{sm} , φ_{qn} , обладающих свойствами

$$\begin{aligned} \varphi_{ri}(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_{ri}(x_1, -x_2, x_3) = -\varphi_{ri}(x_1, x_2, -x_3) \\ \varphi_{pj}(x_1, x_2, x_3) &= -\varphi_{pj}(x_1, -x_2, x_3) = \varphi_{pj}(x_1, x_2, -x_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{sm}(x_1, x_2, x_3) &= \varphi_{sm}(x_1, -x_2, x_3) = \varphi_{sm}(x_1, x_2, -x_3) \\ \varphi_{qn}(x_1, x_2, x_3) &= -\varphi_{qn}(x_1, -x_2, x_3) = -\varphi_{qn}(x_1, x_2, -x_3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

($k, i, j, m, n = 1, 2, 3, \dots$)

В силу (1.2), свойствами (1.3) обладают также функции ψ_k . Из условия полноты системы функций ψ_k на Σ_0 [6] имеем

$$x_\Sigma = x_{\Sigma 0} + \sum_{i=1}^{\infty} r_i \psi_{ri} + \sum_{j=1}^{\infty} p_j \psi_{pj} + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \psi_{sm} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \psi_{qn} \quad (1.4)$$

Здесь x_Σ и $x_{\Sigma 0}$ — абсциссы произвольных точек поверхностей Σ и Σ_0 соответственно, а функции ψ_{ri} , ψ_{pj} , ψ_{sm} , ψ_{qn} в соответствии с (1.2) определяются из уравнений

$$\psi_{ri} = \frac{\partial \varphi_{ri}}{\partial x_1}, \quad \psi_{pj} = \frac{\partial \varphi_{pj}}{\partial x_1}, \quad \psi_{sm} = \frac{\partial \varphi_{sm}}{\partial x_1}, \quad \psi_{qn} = \frac{\partial \varphi_{qn}}{\partial x_1} \quad (1.5)$$

В формуле (1.4) параметры r_i , p_j , s_m , q_n , зависящие от времени, определяют положение поверхности Σ в любой момент времени. Будем считать, что полость совершает поступательное плоское движение по закону

$$x_3^0 = x_{30} \cos \omega t \quad (1.6)$$

Положив в (1.6) величину $x_{30} = 0$, получим случай, соответствующий свободным колебаниям жидкости. В дальнейшем рассмотрим случай, когда ω близко к частоте колебаний основного тона. Благодаря этому можно сформулировать ряд допущений, базирующихся на результатах экспериментальных исследований, позволяющих получить эффективное решение задачи.

Во-первых, в уравнении (1.4) можно пренебречь параметрами r_i , p_j для значений $i, j = 2, 3, 4, \dots$ [1]. Далее, результаты экспериментов показывают, что при вынужденных колебаниях не происходит заметного возбуждения параметров q_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) [7]. Учитывая сказанное, выражению (1.4) придадим форму

$$x_\Sigma = x_{\Sigma 0} + r\psi_r + p\psi_p + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \psi_{sm}, \quad \begin{aligned} r &= r_1, & \psi_r &= \psi_{r1} \\ p &= p_1, & \psi_p &= \psi_{p1} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Ниже рассматривается случай, когда $x_{30}/L = x_{30}^0 \ll 1$, поэтому x_{30}^0 может служить в качестве малого параметра задачи.

2. Потенциал скоростей φ удовлетворяет условиям [1]

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{в } Q, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|_S = 0, \quad \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{(\nabla \varphi)^2}{2} + jx_1 \right]_\Sigma = f(t) \quad (2.1)$$

Здесь $f(t)$ — произвольная функция времени. На поверхности Σ должно выполняться кинематическое условие

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{G} \left(r\psi_r + p\psi_p + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \psi_{sm} \right) \\ F &= x_1 - x_{\Sigma 0} - r\psi_r - p\psi_p - \sum_{m=1}^{\infty} s_m \psi_{sm}, \quad \mathbf{G} = \nabla F, \quad G = |\mathbf{G}| \end{aligned} \quad (2.2)$$

Следуя работе [1], функцию φ будем искать в виде

$$\varphi = r \cdot \varphi_r + p \cdot \varphi_p + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \cdot \varphi_{sm}^{\circ} \quad (2.3)$$

Сравнивая уравнения (2.2) и (2.3), получим

$$\nabla \varphi_r \cdot \mathbf{G} = \psi_r, \quad \nabla \varphi_p \cdot \mathbf{G} = \psi_p, \quad \nabla \varphi_{sm}^{\circ} \cdot \mathbf{G} = \psi_m \text{ на } \Sigma \quad (2.4)$$

Чтобы удовлетворить условиям (2.4) гармонические в Q функции φ_r , φ_p , φ_{sm}° следует искать в виде

$$\varphi_r = \varphi_{r1} + r\varphi_{1r1} + p\varphi_{1p1} + r^2\varphi_{r21} + p^2\varphi_{p21} + rp\varphi_{rp1} + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \varphi_{sr m} \quad (2.5)$$

$$\varphi_p = \varphi_{p1} + r\varphi_{2r2} + p\varphi_{2p2} + r^2\varphi_{r22} + p^2\varphi_{p22} + rp\varphi_{rp2} + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \varphi_{sp m}$$

$$\varphi_{sm}^{\circ} = \varphi_{sm} + r\varphi_{rsm} + p\varphi_{psm} + r^2\varphi_{m11} + p^2\varphi_{m22} + rp\varphi_{m12} + \sum_{m=1}^{\infty} s_m \varphi_{m1}$$

Пусть \mathbf{M} — произвольный вектор. Введем обозначение

$$\operatorname{div}' \mathbf{M} = \operatorname{div}' (M_1 \mathbf{e}_1 + M_2 \mathbf{e}_2 + M_3 \mathbf{e}_3) = \partial M_2 / \partial x_2 + \partial M_3 / \partial x_3$$

Подставляя равенства (2.5) в каждое из уравнений (2.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметров r , p и s_m , получим равенства, имеющие смысл граничных условий для гармонических в Q функций φ_{1r1} , φ_{1p1} , \dots , φ_{m1} на Σ_0

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{1r1}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}' (\psi_r \nabla \varphi_{r1}), & \frac{\partial \varphi_{1p1}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}' (\psi_p \nabla \varphi_{r1}) \\ \frac{\partial \varphi_{sr m}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}' (\psi_{sm} \nabla \varphi_{r1}), & \frac{\partial \varphi_{r21}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}' \left(\psi_r \nabla \varphi_{1r1} + \frac{1}{2} \psi_r^2 \nabla \psi_r \right) \\ & & \frac{\partial \varphi_{p21}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}' \left(\psi_p \nabla \varphi_{1p1} + \frac{1}{2} \psi_p^2 \nabla \psi_p \right) \\ \frac{\partial \varphi_{rp1}}{\partial x_1} &= \operatorname{div}' (\psi_r \nabla \varphi_{1p1} + \psi_p \nabla \varphi_{1r1} + \psi_r \psi_p \nabla \psi_r) \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

На смоченной поверхности полости S производные по нормали от функций φ_{1r1} , φ_{1p1} , \dots , φ_{m1} , согласно (2.1), обращаются в нуль.

При помощи соотношений (1.3) и условий (2.6) легко устанавливаются свойства симметрии функций, входящих в (2.5), относительно плоскостей $x_1 x_2$ и $x_1 x_3$. Подставим разложения (2.5) в последнее из равенств (2.4). Умножая результат подстановки поочередно на ψ_r , ψ_p , ψ_{sm} и интегрируя в пределах поверхности Σ_0 , получим уравнения, определяющие изменение параметров r , p и s_m во времени

$$\begin{aligned} & r'' + a'(r r^2)' + b'(r p^2)' + c'(p' r p)' + d' p^2 r' + \\ & + e' r^2 r' + f' r' p p' + \omega_r^2 r' + \sum_{m=1}^{\infty} [A_{sm}'(r' s_m)' + B_{sm}'(r s_m)' + C_{sm}' r' s_m'] = 0 \quad (2.7) \end{aligned}$$

$$p'' + a(p'p^2)' + b(p'r^2)' + c(r'rp)' + dr^2p + ep^2p +$$

$$+ fr'p'r + \omega_p^2 p + \sum_{m=1}^{\infty} [A_{sm}(p's_m)' + B_{sm}(ps_m)'] + C_{sm}p's_m] = 0 \quad (2.8)$$

$$s_m'' + \omega_{sm}^2 s_m + D_{sm}(r'r)' + E_{sm}(p'p)' + F_{sm}r'^2 + G_{sm}p'^2 = 0 \quad (2.9)$$

$$(p'r^2)' = \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{dp}{dt} \right), \quad (r'r)' = \frac{d}{dt} \left(r \frac{dr}{dt} \right) \quad \text{и т. д.}$$

Коэффициенты уравнений (2.7) — (2.9) связаны с основными функциями, входящими в (2.5), уравнениями

$$a' = \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\varphi_{r21} + \psi_r \frac{\partial \varphi_{1r1}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \psi_r^2 \frac{\partial^2 \varphi_{r1}}{\partial x_1^2} \right) \psi_r dS$$

$$b' = \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\varphi_{p21} + \psi_p \frac{\partial \varphi_{1p1}}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \psi_p^2 \frac{\partial^2 \varphi_{r1}}{\partial x_1^2} \right) \psi_r dS$$

$$c' = \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\varphi_{rp2} + \psi_p \frac{\partial \varphi_{2r2}}{\partial x_1} + \psi_r \frac{\partial \varphi_{2p2}}{\partial x_1} + \psi_r \psi_p \frac{\partial^2 \varphi_{p1}}{\partial x_1^2} \right) \psi_r dS$$

$$d' = \frac{1}{\mu_r} \int_{\Sigma_0} \left(\nabla \varphi_{r1} \nabla \varphi_{1r1} + \psi_r \nabla \varphi_{r1} \nabla \frac{\partial \varphi_{r1}}{\partial x_1} \right) \psi_r dS \quad (2.10)$$

$$\mu_r = \int_{\Sigma_0} \varphi_{r1} \psi_r dS \quad \text{и т. д.}$$

Для определения коэффициентов могут быть использованы также равенства, являющиеся следствиями свойств симметрии полости, например, $a' = a, b' = b, c' = c, d' = d, e' = e, f' = f$.

Уравнение (2.7) получено для случая свободных колебаний. Если сосуд совершает движение по закону (1.6), в интеграл Лагранжа — Коши, записанный в форме (2.1), следует ввести инерционные силы, пропорциональные $x_3^{(0)}$ [1]. В этом случае уравнение (2.7) примет вид

$$r'' + a(r'r^2)' + b(r'p^2)' + c(p'rp)' + dp^2r + er^2r +$$

$$+ fr'p'p + \omega_r^2 r + \sum_{m=1}^{\infty} [A_{sm}'(r's_m)' + B_{sm}'(rs_m)'] + C_{sm}'r's_m] = \frac{\lambda_r x_3^{(0)''}}{\mu_r}$$

$$\lambda_r = \int_{\Sigma_0} x_3 \psi_r dS \quad (2.11)$$

Положив в (2.11) величины p, p' и p'' тождественно равными нулю, получим уравнение работы [1] для случая плоского поступательного движения полости. Однако, именно за счет этих членов осуществляется связь между параметрами r и p , и, как будет показано ниже, при определенных условиях может иметь место параметрическое возбуждение формы колебаний, которой соответствует параметр p .

3. Вычислим коэффициенты уравнений (2.7) — (2.9) для прямоугольного параллелепипеда. Сначала найдем собственные функции и спектр собственных значений ω_k^2/j задачи (1.2), которую применительно к па-

раллелепипеду запишем в виде

$$\Delta\varphi_k = 0 \text{ в } Q, \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} = \frac{\omega_k^2}{j} \varphi_k \quad (x_1 = h) \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1} = 0 \quad (x_1 = 0), \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_2} = 0 \quad (x_2 = \pm L), \quad \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_3} = 0 \quad (x_3 = \pm L)$$

где h — глубина жидкости.

Как известно [4], функции φ_{r1} и φ_{p1} имеют вид

$$\varphi_{r1} = \frac{2L}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi x_1}{2L} \operatorname{csch} \frac{\pi h}{2L} \cos \frac{\pi}{2L} (x_3 - L) \quad (3.2)$$

$$\varphi_{p1} = \frac{2L}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi x_1}{2L} \operatorname{csch} \frac{\pi h}{2L} \cos \frac{\pi}{2L} (x_2 - L)$$

а функции φ_{sm} , соответствующие параметрам s_m , можно записать в виде

$$\varphi_{sm} = \frac{2L}{\pi \sqrt{m_1^2 + m_2^2}} \operatorname{ch} \left[\frac{\pi}{2L} x_1 \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \right] \times \\ \times \operatorname{csch} \left[\frac{\pi}{2L} h \sqrt{m_1^2 + m_2^2} \right] \cos \left[\frac{\pi}{2L} m_1 (x_2 - L) \right] \cos \left[\frac{\pi}{2L} m_2 (x_3 - L) \right] \quad (3.3) \\ (m_1, m_2 = 0, 2, 4, \dots)$$

Используя эти выражения и уравнения (2.10), вычислим основные коэффициенты при нелинейных членах в уравнениях (2.7) — (2.9)

$$a = \frac{\pi^2}{8L^2} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi h}{2L} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{L} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.4)$$

$$b = -d = -f = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}L^2} \left(\operatorname{cth} \frac{\pi h}{2L} \operatorname{cth} \frac{\pi\sqrt{2}h}{2L} - \sqrt{2} \right)$$

$$c = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}L^2} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{2L} \operatorname{cth} \frac{\pi\sqrt{2}h}{2L}, \quad e = \frac{\pi^2}{8L^2} \left(1 - \operatorname{cth} \frac{\pi h}{2L} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{L} \right)$$

$$A_{sm}' = \frac{\pi}{4L} \operatorname{th} \frac{\pi h}{2L} \left(1 - \operatorname{cth}^2 \frac{\pi h}{2L} \right) = A \quad (m_1 = 0, m_2 = 2)$$

$$B_{sm}' = \frac{\pi}{4L} \operatorname{th} \frac{\pi h}{2L} \left(1 - \operatorname{cth} \frac{\pi h}{2L} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{L} \right) = B \quad (m_1 = 0, m_2 = 2)$$

$$C_{sm}' = \frac{\pi}{4L} \operatorname{th} \frac{\pi h}{2L} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{\pi h}{2L} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{L} \right) = C \quad (m_1 = 0, m_2 = 2) \quad (3.5)$$

$$D_{sm}' = \frac{\pi}{2L} \operatorname{th} \frac{\pi h}{L} \left(1 - \operatorname{cth} \frac{\pi h}{L} \operatorname{cth} \frac{\pi h}{2L} \right) = D \quad (m_1 = 0, m_2 = 2)$$

$$F_{sm}' = \frac{\pi}{4L} \operatorname{th} \frac{\pi h}{L} \left(1 - \operatorname{cth}^2 \frac{\pi h}{2L} \right) = F \quad (m_1 = 0, m_2 = 2)$$

$$A_{sm}' = B_{sm}' = C_{sm}' = D_{sm}' = F_{sm}' = 0 \quad (m_1 \neq 0, m_2 \neq 2)$$

Используя свойства симметрии полости, можно также получить

$$\begin{aligned} A_{sm} = A, \quad B_{sm} = B, \quad C_{sm} = C, \quad F_{sm} = D, \quad G_{sm} = F \\ (m_1 = 2, \quad m_2 = 0) \\ A_{sm} = B_{sm} = C_{sm} = F_{sm} = G_{sm} = 0 \quad (m_1 \neq 2, \quad m_2 \neq 0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Пусть s_1 и s_2 — параметры, отвечающие в (3.3) значениям $m_1 = 0$, $m_2 = 2$ и $m_1 = 2$, $m_2 = 0$ соответственно. Учитывая это, уравнения (2.8), (2.9), (2.11) запишем в следующей окончательной форме:

$$\begin{aligned} r'' + a(r'r^2)' + b(r'p^2)' + c(p'rp)' + dp^2r + er^2r + \\ + fr'p'p + \omega_r^2 r + A(rs_1)' + B(rs_1)' + Cr's_1' = -\lambda_r x_3^{0''} / \mu_r \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} p'' + a(p'p^2)' + b(p'r^2)' + c(r'rp)' + dr^2p + ep^2p + \\ + fr'p'r + \omega_p^2 p + A(p's_2)' + B(ps_2)' + Cp's_2' = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$s_1'' + \omega_{s_1}^2 s_1 + D(r'r)' + Fr^2 = 0, \quad s_2'' + \omega_{s_2}^2 s_2 + D(p'p)' + Fp^2 = 0 \quad (3.9)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением «глубокой» жидкости (практически $h > L$). В этом случае система (3.7) — (3.9) упрощается, так как предельные значения коэффициентов e , A , B , D , F равны нулю. Предельные значения остальных коэффициентов определяются формулами

$$\lim_{h \rightarrow \infty} a = \frac{\pi^2}{16L^2}, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} b = -\frac{\pi^2}{8L^2} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \quad \lim_{h \rightarrow \infty} c = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}L^2} \quad (3.10)$$

Как видно из формул (3.5), (3.6), (3.10), в случае «глубокой» жидкости коэффициенты, связывающие параметры r и p с параметрами s_1 и s_2 , обращаются в нуль, поэтому возбуждением последних можно пренебречь. Вследствие этого уравнения (3.7), (3.8) принимают вид

$$\begin{aligned} r'' + a(r'r^2)' + b(r'p^2)' + c(p'rp)' - bp^2r - br'p'p + \omega_0^2 r = \lambda_r x_3^{0''} / \mu_r \\ p'' + a(p'p^2)' + b(p'r^2)' + c(r'rp)' - br^2p - br'p'r + \omega_0^2 p = 0 \\ (\omega_r^2 = \omega_p^2 = \omega_0^2 = \pi j / 2L) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Экспериментальные исследования показывают, что при определенных значениях x_{30} и ω наблюдаются колебания только параметра r и лишь при достижении некоторого «порогового» значения амплитуды колебаний параметра r в системе устанавливается режим колебаний, при котором $r \neq 0$ и $p = 0$. Ниже будет показано, что в системе возможен колебательный режим, в котором $r \neq 0$, $p = 0$. В этом случае уравнение (3.11) принимает вид

$$r'' + \left(\frac{\pi}{4L}\right)^2 (r'r^2)' + \omega_0^2 r = -\frac{\lambda_r}{\mu_r} x_3^{0''} \quad (3.12)$$

Соответствующая этому уравнению зависимость между частотой немалых свободных колебаний ω_0^2 и амплитудой r_0 дается в первом приближении формулой

$$\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + 1/64\pi^2 r_0^2} \approx \frac{\omega_0^2}{1 + 0.155r_0^2}, \quad r^0 L = r_0$$

Та же зависимость для математического маятника с частотой малых колебаний ω_0 имеет вид [8]

$$\omega_{00}^2 = \frac{\omega_0^2}{1 + 0.125\varphi_0^2}$$

Здесь φ_0 — угловая амплитуда колебаний маятника. Сравнивая две последние формулы, убеждаемся, что нелинейность, присущая параметру r , более «сильная», чем нелинейность маятника.

4. Как отмечалось выше, при определенных значениях ω и x_{30} в системе возможен колебательный режим, который в первом приближении описывается уравнениями

$$r = r_0 \cos \omega t, \quad p \equiv 0 \quad (4.1)$$

Найдем то, «пороговое» значение r_0 , при котором выполнение второго из равенств (4.1) становится невозможным. Для этого подставим во второе из уравнений (3.11) значение $r = r_0 \cos \omega t$. Линеаризировав затем результат подстановки, получим

$$p''(\alpha + 2\beta \cos 2\omega t) - 2\epsilon p' \sin 2\omega t + p(\gamma - 2\delta \cos 2\omega t) = 0 \quad (4.2)$$

$$\alpha = 1 + 2\beta, \quad 4\beta = \mu b, \quad 4\epsilon = \mu\omega(2b + c + f)$$

$$2\gamma = 2\omega_0^2 + d\omega^2\mu, \quad 4\delta = \mu\omega^2(2c + d), \quad \mu = r_0^2 \quad (4.3)$$

Найдем условия, связывающие параметры уравнения (4.2), при которых оно имеет неограниченные решения. Известно [9], что на границах областей неустойчивости уравнение (4.2) имеет периодические решения периода T и $2T = 2\pi/\omega$. Причем границе нечетных областей неустойчивости соответствует решение периода $2T$, четных — T . Как отмечалось выше, рассматривается случай, когда ω близко к ω_0 . Поэтому ограничимся отысканием основной области неустойчивости уравнения (4.2). Функцию f_{2T} периода $2T$ будем искать в виде

$$f_{2T} = \sum_{k=1, 3, 5, \dots} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t) \quad (4.4)$$

Подставим (4.4) в (4.2). Приравнивая коэффициенты, стоящие при синусах и косинусах одинаковых дуг, получим однородную систему линейных алгебраических уравнений, условие разрешимости которой имеет вид

$$\det \|a_{ij}\| = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.5)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \gamma - \alpha\omega^2 \pm (\beta\omega^2 - \epsilon\omega + \delta), & a_{12} &= 3\epsilon\omega - 9\beta\omega^2 - \delta \\ a_{13} &= 0, & a_{21} &= -\beta\omega^2 - \delta - \epsilon\omega \\ a_{22} &= \gamma - 9\alpha\omega^2, & a_{23} &= 5\epsilon\omega - \delta - 5\beta\omega^2, & a_{31} &= 0 \\ a_{32} &= -9\beta\omega^2 - \delta - 3\epsilon\omega, & a_{33} &= \gamma - 25\alpha\omega^2 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Переходя в определителе (4.5) к пределу при $r_0 \rightarrow 0$, получим, что границы каждой из нечетных областей неустойчивости пересекаются в точках, лежащих на оси $r_0 = 0$, в которых

$$\omega_0^2 = \omega^2 k^2 \quad (k = 1, 3, 5, \dots)$$

Изучим более подробно первую область неустойчивости. Известно [9, 10], что на границе этой области периодическое решение (4.4) хорошо описывается двухчленным приближением

$$f_{2T} = a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t$$

В соответствии с этим положим равным нулю верхний диагональный элемент определителя (4.5).

В результате получим приближенное соотношение для определения границ основной области неустойчивости

$$\gamma - \alpha\omega^2 \pm (\beta\omega^2 - \varepsilon\omega + \delta) = 0 \quad (4.6)$$

которое можно привести к виду

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 &= 1 + \zeta_1\mu, & \Omega_0^2 &= 1 + \zeta_2\mu, & \Omega_0\omega &= \omega_0 \\ 4\zeta_1 &= 3b - 3d - c + f, & 4\zeta_2 &= b + c - d - f \end{aligned} \quad (4.7)$$

Используя выражение (3.10), можно вычислить коэффициенты

$$\zeta_1 = -0.67, \quad \zeta_2 = -0.047$$

Если в (4.5) приравнять нулю определитель второго порядка, то получим уточненные выражения для определения границ основной области неустойчивости

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 &= 1 + \zeta_1\mu + \zeta_2\mu^2, & \Omega_0^2 &= 1 + \zeta_2\mu + \zeta_1\mu^2 \\ \zeta &= -1/8\zeta_3\zeta_4, & \zeta_3 &= 1/4(c - d - 3b + 3f), & \zeta_4 &= -1/4(3b + 3c + d + f) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из (3.10) и (4.8) следует, что $\zeta = 0.047$.

5. Рассмотрим влияние линейного демпфирования, вводимого в уравнение (3.11), на границы главной области параметрического резонанса. При наличии в системе демпфирования второе из уравнений (3.11) примет вид

$$p'' + \kappa p' + b(p'r^2)' + c(r'r p)' - br^2p - brp'r + \omega_0^2 p = 0 \quad (5.1)$$

Положив в (5.1) $r = r_0 \cos \omega t$, приведем его к виду

$$p''(\alpha + 2\beta \cos 2\omega t) + \kappa p' + (\gamma - 2\delta \cos 2\omega t)p + \varepsilon p' \sin 2\omega t = 0 \quad (5.2)$$

В (5.1) и (5.2) величина κ — некоторый параметр, характеризующий затухание колебаний жидкости, связанный с логарифмическим декрементом колебаний Δ соотношением

$$\kappa\lambda = \Delta\omega_0 \quad (5.3)$$

Следуя приему, предложенному в [10], оценку влияния демпфирования можно получить следующим образом. Будем искать решение периода $2T$ в виде (4.4). Подставив это выражение в (5.1), способом, описанным в п. 4, получим, что на границе главной области неустойчивости обращается в нуль определитель

$$\begin{vmatrix} \kappa\omega & \gamma - \alpha\omega^2 - \beta\omega^2 - \delta + \varepsilon\omega \\ \gamma - \alpha\omega^2 + \beta\omega^2 + \delta - \varepsilon\omega & -\kappa\omega \end{vmatrix} = 0 \quad (5.4)$$

Уравнению (5.4) придадим вид

$$\Omega_0^2\Delta^2 + [\Omega_0^2 - (1 + \zeta_1\mu)][\Omega_0^2 - (1 + \zeta_2\mu)] = 0 \quad (5.5)$$

Найдем из (5.5) минимальное значение μ , ниже которого параметрическое возбуждение невозможно. Для этого выражение (5.5) приведем к форме

$$\lambda^2 + \lambda(\Delta^2 - 2 - \zeta_1\mu - \zeta_2\mu) + (1 + \zeta_1\mu)(1 + \zeta_2\mu) = 0, \quad \lambda = \Omega_0^2 \quad (5.6)$$

Минимальное значение μ_m достигается в точке, в которой совпадают корни уравнения (5.6). Это дает

$$4(1 + \zeta_1\mu)(1 + \zeta_2\mu) = (\Delta^2 - 2 - \zeta_1\mu - \zeta_2\mu)^2 \quad (5.7)$$

Из условия (5.7) определяется значение $\mu = \mu_m$

$$\mu_m = \frac{2\Delta}{|\zeta_1 - \zeta_2|} + \Delta^2 \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{(\zeta_1 - \zeta_2)^2} + \Delta^3 \frac{\zeta_1 \zeta_2}{|\zeta_1 - \zeta_2|^3} + \dots \quad (5.8)$$

Однако встречающиеся на практике величины Δ весьма малы. В этих случаях справедливо более простое выражение

$$\mu_m = \frac{2\Delta}{|\zeta_1 - \zeta_2|} \quad (5.9)$$

В соответствии с (4.3), минимальное значение амплитуды колебаний r_m , ниже которого возбуждение параметра p становится невозможным, определится из соотношения

$$r_m = \left(\frac{2\Delta}{|\zeta_1 - \zeta_2|} \right)^{1/2}$$

6. Будем предполагать, что сосуд колеблется по закону (1.6). Рассмотрим возбуждение координаты r при таких значениях x_{30} и ω , при которых решение второго из уравнений (3.11) устойчиво. В этом случае амплитуда r_0 установившихся колебаний основного тона определится из уравнения

$$r_0(\omega_0^2 - \omega^2) - \frac{a}{4} \omega^2 r_0^3 = \frac{\lambda r}{\mu r} \omega^2 x_{30}, \quad a = \left(\frac{\pi}{4L} \right)^2, \quad \frac{\lambda r}{\mu r} = \frac{4}{\pi} \quad (6.1)$$

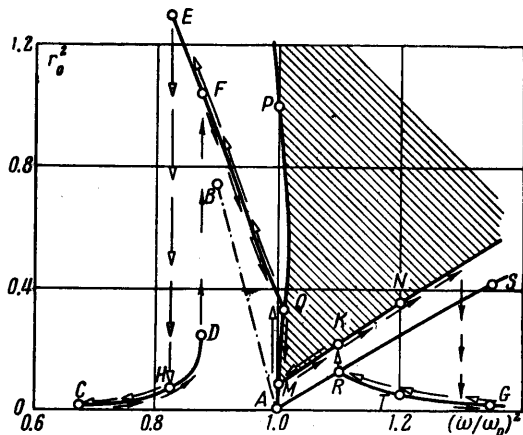
На фигуре кривые CD , EFQ и RG изображают участки резонансной кривой, рассчитанной при помощи уравнения (6.1), соответствующие устойчивым стационарным колебаниям системы. Кривые $AMQP$ и ARS — границы главной области неустойчивости уравнения (4.2), рассчитанные по формулам (4.8).

Зафиксировав значение x_{30} , будем изменять частоту вынужденных колебаний сосуда ω от некоторого значения ω_1 , соответствующего точке G , до значения ω_2 , соответствующего точке R . На этих частотах в системе возбуждается лишь форма колебаний, отвечающая обобщенной координате r . При этом амплитуда установившихся колебаний определяется из (6.1). Если частота вынужденных колебаний ω немного меньше значения ω_2 , решение уравнения (4.2) становится неустойчивым, и для нахождения предельного состояния системы необходимо решать систему уравнений (3.11). Положим в ней в первом приближении

$$r = r_0 \cos \omega t, \quad p = p_0 \sin \omega t \quad (6.2)$$

Ограничиваясь первым приближением, получим для определения предельных значений r_0 и p_0 систему

$$\begin{aligned} 4(\omega_0^2 - \omega^2) - a\omega^2 p_0^2 + (c - 5b)\omega^2 r_0^2 &= 0 \\ 4r_0(\omega_0^2 - \omega^2) - a\omega^2 r_0^3 + (c - 5b)\omega^2 r_0 p_0^2 &= 5.08\omega^2 x_{30} \end{aligned} \quad (6.3)$$



Устойчивое решение системы (6.3) изображено на фигуре кривой MKN и определяется из уравнения

$$(\omega_0^2 - \omega^2)r_0 + \eta\omega^2r_0^3 = \zeta_0\omega x_{30}, \quad \eta = \left(\frac{4\xi^2}{a} - \frac{a}{4}\right)\left(1 + \frac{4\xi}{a}\right)^{-1} \quad (6.4)$$

$$\zeta_0 = 1.27(1 + 4/a)^{-1}, \quad \xi = 1/4(c - 5b) = 0.67$$

Если ω/ω_0 меньше единицы (участок FQ), то устойчиво состояние системы, при котором возбуждается лишь обобщенная координата r . При этом в случае, если плавно уменьшать частоту от $\omega = \omega_0$, возможно «затягивание» колебаний до некоторой точки E . За точкой E следует «срыв» колебаний, и устойчивым состоянием системы отвечает кривая DHC .

При обратном ходе изменения частоты скачок амплитуды r_0 с одной устойчивой ветви кривой CHD на другую EFQ происходит в точке D . При дальнейшем увеличении частоты ω уменьшение r_0 следует кривой FQ . Далее точка (r_0, ω) попадает в область неустойчивости и изменение амплитуды r_0 следует кривой MKN . Отметим как интересную особенность рассматриваемой механической системы то обстоятельство, что в точках N и T возможны два устойчивых состояния системы, одно из которых отвечает возбуждению лишь координаты r , другое — предельному стационарному состоянию, описываемому системой уравнений (3.11). Таким образом, состояние системы в точках N и T определяется «историей» системы.

При введении линейного демпфирования в систему (3.11) точка A отрывается от оси ω/ω_0 на расстояние

$$r_m^2 = 2\Delta / |\zeta_1 - \zeta_2|$$

При достаточно малых x_{30} кривая $EFQRT$ располагается сколь угодно близко к своей «скелетной» кривой AB . Поэтому кривая $EFQRT$ может вообще не попасть в главную область неустойчивости, что приведет к невыполнению условий параметрического резонанса для обобщенной координаты r . В этом случае на всех частотах ω , близких к $\omega_p = \omega_r$, возбуждается только параметр r .

Заметим также, что свободным немалым колебаниям жидкости, характеризующим обобщенной координатой r , отвечает «скелетная» кривая AB уравнения (3.11). Как видно из фигуры, эта кривая не имеет ни одной общей точки с главной областью неустойчивости. Поэтому в случае свободных немалых колебаний, характеризующим координатой r , параметрического возбуждения формы колебаний жидкости, которой соответствует обобщенная координата r , быть не может.

Поступило
4 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Нариманов Г. С. О движении сосуда, частично заполненного жидкостью, учет немалости движения последней. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
2. Моисеев Н. Н. К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
3. Hutton R. E. An Investigation of Nonlinear, Nonplanar Oscillation of Fluid in a Cylindrical Container AIAA Fifth Annual Structures and Materials Conference, p. 184—190, Fifth Palm Spring, Calif., April 1—3, 1964.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В., Теоретическая гидромеханика, Гостехиздат, 1948.
5. Нариманов Г. С., О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
6. Моисеев Н. Н., Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность, Математический сборник. 1953, т. 32, вып. 1.
7. Аносов Ю. Н., О нелинейных колебаниях жидкости в цилиндрической полости, «Прикладная механика» (в печати).
8. Бабак И. М., Теория колебаний. 1958, ГИТТЛ.
9. Болотин В. В., Динамическая устойчивость упругих систем, 1956, ГИТТЛ.
10. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей), Теория звука, т. I, М., Гостехиздат, 1955.