КОЛЕБАНИЯ СОСУДА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

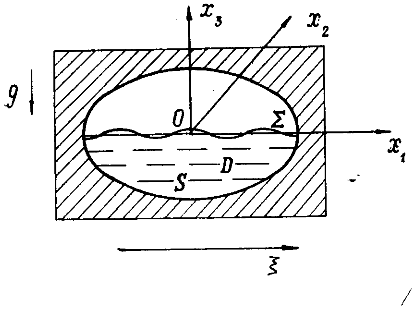
Ф. Л. ЧЕРНОУСЬКО

(Москва)

Колебания твердого тела, имеющего полости, частично заполненные идеальной жидкостью, изучались в ряде работ, например в [1–6]. Некоторые аналогичные задачи в случае вязкой жидкости для частных форм полостей рассмотрены в работах [6, 7]. В работе [8] выведены общие уравнения движения твердого тела, имеющего полости, частично заполненные вязкой жидкостью. Эти уравнения получены для полости произвольной формы при следующих предположениях: 1) тело и жидкость совершают малые колебания (применимо линейное приближение); 2) число Рейнольдса велико (вязкость мала). В случае идеальной жидкости уравнения работы [8] переходят в ранее известные [2–6] уравнения. В данной работе на основе уравнений работы [8] изучаются свободные и вынужденные колебания тела с полостью (сосуда), частично заполненного вязкой жидкостью. Для простоты выкладок рассматривается случай поступательных колебаний тела с жидкостью, так как в этом случае уже проявляются характерные механические свойства системы, обусловленные вязкостью жидкости и наличием свободной поверхности.

Решения получены для полости произвольной формы. Затем рассмотрены некоторые конкретные формы полостей.

1. Пусть твердое тело (сосуд) массы m_1 имеет полость, содержащую массу m_2 несжимаемой вязкой жидкости плотности ρ и кинематической вязкости ν. Пусть в невозмущенном состоянии тело и жидкость покоятся в поле массовых сил, которые могут складываться из сил тяжести и сил инерции. Ускорение g массовых сил считаем постоянным по величине и направлению. Обозначим через D область, занятую жидкостью в невозмущенном состоянии. Эта область ограничена стенками полости S и плоской невозмущенной свободной поверхностью Σ (фигура). Декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ жестко свяжем с твердым телом, причем начало ее O поместим в любой точке на невозмущенной свободной поверхности Σ, а ось Ox_3 направим против ускорения массовых сил g (фигура). Тогда в области D, занятой жидкостью, будем иметь $x_3 \leqslant 0$.



Примем, что твердое тело имеет одну степень свободы и может двигаться поступательно вдоль оси x_1. Этот случай для идеальной жидкости рассматривался в работах [1, 2, 6]. Обозначим через ξ координату какой-либо точки тела (например, точки O), отсчитываемую параллельно оси x_1 в неподвижном пространстве (см. фигуру), и положим

$$\xi = \xi_0 e^{\mu t}, \qquad \dot{\xi} = \xi_0 \mu e^{\mu t}, \qquad \ddot{\xi} = \xi_0 \mu^2 e^{\mu t} \tag{1.1}$$

Здесь ξ_0 — постоянная (амплитуда), μ — комплексное число, точками обозначаются производные по времени t.

Число Рейнольдса задачи равно $R = l^2T^{-1}\nu^{-1}$, где l — характерный размер сосуда, $T \sim |\mu|^{-1}$ — характерное время процесса. Примем, не нарушая общности, что единицы измерения выбраны так, что $l \sim 1$, $T \sim 1$. Тогда условие $R \gg 1$ эквивалентно условию $\nu \ll 1$. Условие $\nu \ll 1$ ниже всюду считаем выполненным. Кроме того, предположим, что горизонтальное ускорение тела $\ddot{\xi}$ мало по сравнению с ускорением массовых сил: $|\ddot{\xi}| \sim |\xi_0\mu^2| \ll g$. Это условие необходимо для возможности линеаризации задачи о движении вязкой жидкости в полости. Примем еще, что абсолютная скорость жидкости $\mathbf{u}$, давление p и возвышение свободной поверхности f ($x_3 = f(x_1, x_2, t)$ — уравнение возмущенной свободной поверхности) зависят от времени через множитель $e^{\mu t}$. Тогда при сделанных предположениях решение гидродинамической задачи в области D представляется в виде [8]

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \mathbf{w}, \qquad p = -\partial\varphi / \partial t + s$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = e^{\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k(x_1, x_2, x_3) + \nu^{1/2}\chi + c(t) \tag{1.2}$$

$$f(x_1, x_2, t) = e^{\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} d_k\psi_k(x_1, x_2, 0) \qquad (\nu \ll 1)$$

Здесь $\mathbf{w}$ и s — функции типа пограничного слоя, отличные от нуля лишь вблизи поверхностей S и Σ, χ — гармоническая в D функция, граничные условия для которой зависят от функции $\mathbf{w}$, а $c(t)$ — функция времени. Подробные выражения для функций $\mathbf{w}$, s, χ, c, которые даны в работе [8], для дальнейшего не потребуются.

Функции $\psi_k(x_1, x_2, x_3)$ в формулах (1.2) — это собственные функции задачи о колебаниях идеальной жидкости в сосуде данной формы. Они удовлетворяют задаче на собственные значения

$$\Delta\psi_k = 0 \text{ в } D, \qquad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} = 0 \text{ на } S, \qquad \frac{\partial\psi_k}{\partial x_3} = \lambda_k^2\psi_k \text{ на } \Sigma \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{1.3}$$

Здесь n — внутренняя нормаль к поверхности S, λ_k — собственные значения, связанные с собственными частотами свободных колебаний идеальной жидкости ω_k соотношениями $\omega_k = \lambda_k\sqrt{g}$. Задача (1.3), как известно [6], имеет бесконечный дискретный спектр конечнократных собственных значений λ_k, которые вещественны и положительны. При этом функции $\psi_k(x_1, x_2, x_3)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ вместе с $\psi_0 = \text{const}$ образуют полную ортогональную систему в области D, а функции $\psi_k(x_1, x_2, 0)$ — полную ортогональную систему в Σ.

Примем, что функции ψ_k удовлетворяют условию нормировки

$$\int_{\Sigma} \psi_k^2\,dS = 1 \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{1.4}$$

Постоянные c_k, d_k из формул (1.2) удовлетворяют, как показано в [8], алгебраическим уравнениям

$$\mu d_k = \lambda_k^2 c_k, \quad \mu c_k + g d_k + \xi_0\mu^2 A_{1k} - \frac{\sqrt{\nu\mu}}{\lambda_k^2} \sum_{j=1}^{\infty} D_{jk}c_j = 0 \qquad (k=1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

Здесь уже учтено, что движение тела описывается соотношениями (1.1). В качестве $\sqrt{\mu}$ всюду принимается та ветвь корня, для которой $\operatorname{Re}\sqrt{\mu} < 0$. Постоянные A_{1k}, D_{jk} определяются равенствами [8]

$$A_{1k} = \int_{\Sigma} x_1 \psi_k \, dS, \qquad D_{jk} = \int_{S} \nabla\psi_j \nabla\psi_k \, dS \qquad (k, j = 1, 2, \ldots) \tag{1.6}$$

Запишем еще уравнение количества движения для тела с жидкостью в проекции на ось x_1

$$\mu^2 \left(m\xi_0 + \rho \sum_{k=1}^{\infty} A_{1k} d_k \right) e^{\mu t} = F \qquad (m = m_1 + m_2) \tag{1.7}$$

Это уравнение, как и (1.2), (1.5), непосредственно вытекает из общих уравнений работы [8] в случае, когда движение происходит по закону (1.1). Через m в формуле (1.7) обозначена масса тела с жидкостью, а через F — проекция на ось x_1 главного вектора всех внешних сил, действующих на тело с жидкостью.

Уравнения (1.5), (1.7) при сделанных предположениях полностью описывают динамику тела с жидкостью при $\nu \ll 1$ с погрешностью порядка ν. Скорость, давление и форма свободной поверхности жидкости выражаются через коэффициенты c_k, d_k по формулам (1.2). Коэффициенты c_k можно раз навсегда выразить через d_k из (1.5) по формуле $c_k = \mu\lambda_k^{-2} d_k$, и тогда уравнения (1.5) примут вид

$$d_k (\mu^2 + g\lambda_k^2) + \xi_0 \mu^2 \lambda_k^2 A_{1k} = \sqrt{\nu\mu}\, \mu \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{jk} d_j}{\lambda_j^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

2. Прежде чем рассматривать различные случаи колебаний, разрешим систему (1.8) относительно d_k, пользуясь малостью ν и применяя метод возмущений. Затем подставим полученное решение в уравнение (1.7). При этом будем различать два случая.

Предположим сначала, что выражение $\mu \pm i\lambda_k\sqrt{g}$ ни при каком k не стремится к нулю, когда $\nu \to 0$, т. е. μ не близко ни к одному из собственных значений задачи о свободных колебаниях идеальной жидкости. Тогда определитель системы (1.8) при $\nu \to 0$ не стремится к нулю, и решение системы (1.8) можно искать в виде $d_k = d_k^{\circ} + \sqrt{\nu} d_k^1$. Подставим это равенство в систему (1.8), приравняем коэффициенты при ν° и $\nu^{1/2}$ и определим d_k°, d_k^1. Полученные равенства подставим затем в уравнение (1.7). Тогда будем иметь

$$d_k = -\frac{\xi_0 \mu^2}{\mu^2 + g\lambda_k^2} \left(\lambda_k^2 A_{1k} + \sqrt{\nu\mu}\, \mu \sum_{j=1}^{\infty} \frac{D_{jk} A_{1j}}{\mu^2 + g\lambda_j^2} \right) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$F = \mu^2 \xi_0 e^{\mu t} \left[m - \rho\mu^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 A_{1k}^2}{\mu^2 + g\lambda_k^2} - \rho\mu^3 \sqrt{\nu\mu} \sum_{j,\, k=1} \frac{D_{jk} A_{1j} A_{1k}}{(\mu^2 + g\lambda_j^2)(\mu^2 + g\lambda_k^2)} \right] \tag{2.1}$$

Ряды в формулах (2.1) и далее предполагаются сходящимися.

Теперь рассмотрим другой (резонансный) случай: μ близко к $\pm i\sqrt{g}\lambda_n$ при некотором n, т. е.

$$\mu = \pm i\sqrt{g}\lambda_n + \delta, \qquad \delta = O(\sqrt{\nu}) \tag{2.2}$$

и при этом $A_{1n} \neq 0$. Собственное число λ_n задачи (1.3) предполагаем для простоты некратным. В этом случае при $\nu \to 0$, как следует из (1.8), величины d_k при $k \neq n$ остаются ограниченными, а для d_n справедлива оценка $d_k / d_n = O(\sqrt{\nu})$. Подставим в уравнения (1.8) соотношение (2.2), а также вытекающее из (2.2) равенство

$$\sqrt{\mu} = -(1 \pm i) g^{1/4} (\lambda_n / 2)^{1/2} + O(\sqrt{\nu}) \qquad (\operatorname{Re} \sqrt{\mu} < 0)$$

Отбрасывая малые высших порядков, получим из (1.8)

$$d_n(\pm 2ig^{1/2}\lambda_n\delta) - \xi_0 g \lambda_n^4 A_{1n} = -(1 \pm i)(\pm i) \nu^{1/2} g^{3/4} \lambda_n^{-1/2} D_{nn} d_n / \sqrt{2}$$
$$d_k g(\lambda_k^2 - \lambda_n^2) - \xi_0 g \lambda_n^2 \lambda_k^2 A_{1k} = -(1 \pm i)(\pm i) \nu^{1/2} g^{3/4} \lambda_n^{-1/2} D_{nk} d_n / \sqrt{2}$$
$$(k \neq n)$$

Из этих уравнений определим d_n и d_k, а затем подставим полученные выражения и формулу (2.2) в уравнение (1.7), где также отбросим малые высших порядков

$$d_n = \frac{\mp i\xi_0 g^{1/2} \lambda_n^3 A_{1n}}{2[\delta + (1 \pm i)\nu^{1/2} g^{1/4} \lambda_n^{-3/2} D_{nn} / (2\sqrt{2})]} \tag{2.3}$$

$$d_k = \frac{\xi_0 [A_{1k}\delta + (1 \pm i)\nu^{1/2} g^{1/4} \lambda_n^{1/2} (A_{1k} D_{nn} \lambda_n^{-2} - A_{1n} D_{nk} \lambda_k^{-2}) / (2\sqrt{2})]}{(\lambda_n^{-2} - \lambda_k^{-2})[\delta + (1 \pm i)\nu^{1/2} g^{1/4} \lambda_n^{-3/2} D_{nn} / (2\sqrt{2})]}$$
$$(k \neq n)$$
$$F = -g\lambda_n^2 e^{\mu t}(m\xi_0 + \rho A_{1n} d_n)$$

3. Применим формулы (2.1), (2.3) к исследованию некоторых типов колебаний.

1. Свободные колебания жидкости. Пусть тело покоится ($\xi_0 = 0$), а жидкость совершает свободное колебание, близкое к n-му собственному колебанию идеальной жидкости (справедлива формула (2.2)). Нетривиальное решение для коэффициентов d_n, d_k существует, как легко видеть, при условии, что знаменатель первой формулы (2.3) обращается в нуль. Отсюда находим δ, а по формуле (2.2) — и собственное число μ

$$\mu = \pm ig^{1/2}\lambda_n - (1 \pm i)\nu^{1/2} g^{1/4} \lambda_n^{-3/2} D_{nn} / (2\sqrt{2}) \tag{3.1}$$

Формула (3.1) ранее была получена в [8, 9]. Отметим, что так как $D_{nn} > 0$ (см. (1.6)), то $\operatorname{Re} \mu < 0$ — все колебания жидкости затухают за счет вязкости. Коэффициент d_n остается произвольным и определяет амплитуду колебаний, отношения $d_k / d_n = O(\sqrt{\nu})$ при $k \neq n$ можно найти путем деления второго равенства (2.3) на первое. Формула (2.3) для F определяет при $\xi_0 = 0$ силу, потребную для удержания сосуда в покое при n-м собственном колебании жидкости.

2. Вынужденные колебания жидкости. Пусть движение тела задано: величины ξ_0, μ известны. Коэффициенты d_k, определяющие движение жидкости, и сила, потребная для такого движения, даются формулами (2.1) — в нерезонансном случае и (2.3) — в резонансном случае (т. е. при условии (2.2)). Если, в частности, сосуд совершает гармонические колебания, то $\mu = i\Omega$, где вещественное число Ω — частота колебаний. При этом коэффициенты d_n, d_k остаются ограниченными для любых Ω даже в резонансном случае, так как знаменатель выражений (2.3) не обращается в нуль ни при каких чисто мнимых δ.

3. Свободные колебания тела с жидкостью. Зададим силу F в виде $F = -a\xi - b\dot{\xi}$, где a, b — постоянные. Подставим это выражение, а также формулы (1.1) в последнее равенство (2.1). Получим уравнение, определяющее собственные числа μ для свободных колебаний тела с жидкостью

$$m\mu^2 + b\mu + a = \rho\mu^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 A_{1k}^2}{\mu^2 + g\lambda_k^2} + \rho\mu^5 \sqrt{\nu\mu} \sum_{j,\,k=1}^{\infty} \frac{D_{jk} A_{1j} A_{1k}}{(\mu^2 + g\lambda_j^2)(\mu^2 + g\lambda_k^2)} \qquad (3.2)$$

Аналогичное уравнение для сосуда частной формы выведено в [6]. Решение уравнения (3.2) найдем, пользуясь малостью ν. При $\nu = 0$ уравнение (3.2) переходит в уравнение для сосуда с идеальной жидкостью

$$\Phi(\mu) \equiv m\mu^2 + b\mu + a - \rho\mu^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 A_{1k}^2}{\mu^2 + g\lambda_k^2} = 0 \qquad (3.3)$$

которое рассматривалось в работах [1, 2, 6]. Пусть μ_0 — один из некратных корней уравнения (3.3), т. е. $\Phi(\mu_0) = 0$, $\Phi'(\mu_0) \neq 0$. Рассматриваем нерезонансный случай: равенство $\mu_0 = \pm i\sqrt{g\lambda_k}$ не имееет места ни при каких $k = 1, 2, \ldots$. Отметим, что здесь это равенство, как видно из (3.3), в принципе может иметь место лишь при условии $A_{1k} = 0$. Корень μ уравнения (3.2), близкий к μ_0, ищем в виде $\mu = \mu_0 + \delta_1$, где δ_1 мало. Подставляя это равенство в уравнение (3.2) и пользуясь равенством $\Phi(\mu_0) = 0$, получим с точностью до малых высших порядков

$$\mu = \mu_0 + \delta_1, \qquad \delta_1 = \frac{\rho\mu_0^5 \sqrt{\nu\mu_0}}{\Phi'(\mu_0)} \sum_{j,\,k=1}^{\infty} \frac{D_{jk} A_{1j} A_{1k}}{(\mu^2 + g\lambda_j^2)(\mu^2 + g\lambda_k^2)}$$

$$\Phi'(\mu_0) = 2m\mu_0 + b - 4\rho\mu_0^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 A_{1k}^2}{\mu_0^2 + g\lambda_k^2} + 2\rho\mu_0^5 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 A_{1k}^2}{(\mu_0^2 + g\lambda_k^2)^2} \qquad (3.4)$$

Эти формулы определяют собственные числа при свободных колебаниях тела с жидкостью, в них выбирается та ветвь $\sqrt{\mu_0}$, для которой $\operatorname{Re}\sqrt{\mu_0} < 0$. Амплитуда ξ_0 остается произвольной, а d_k выражается через ξ_0 формулами (2.1).

Пусть, в частности, внешняя сила консервативна ($b = 0$) и направлена против смещения ($a > 0$). Тогда уравнение (3.3) имеет счетное число чисто мнимых корней, отвечающих собственным колебаниям сосуда с идеальной жидкостью [2, 6]. Обозначим один из этих (некратных) корней через $\mu_0 = \pm i\sigma$, где $\sigma > 0$, и пусть $\sigma \neq \sqrt{g\lambda_k}$ при любом $k = 1, 2, \ldots$ Тогда формулы (3.3), (3.4) можно переписать в виде

$$\Phi(\pm i\sigma) = \Phi_1(\sigma^2) \equiv a - m\sigma^2 - \rho\sigma^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 A_{1k}^2}{g\lambda_k^2 - \sigma^2} = 0$$

$$\frac{d\Phi_1}{d\sigma^2} = -\frac{\Phi'(\mu_0)}{2\mu_0} = -m - 2\rho\sigma^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 A_{1k}^2}{g\lambda_k^2 - \sigma^2} - \rho\sigma^4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k^2 A_{1k}^2}{(g\lambda_k^2 - \sigma^2)^2} \qquad (3.5)$$

$$\mu_0 = \pm i\sigma, \qquad \sqrt{\mu_0} = -(1 \pm i)\sqrt{\sigma/2}, \qquad \mu = \pm i\sigma + \delta_1$$

$$\delta_1 = \frac{\rho\nu^{1/2}\sigma^{9/2}(1 \pm i)}{2\sqrt{2}\,[d\Phi_1(\sigma^2)/d\sigma^2]} \sum_{j,\,k=1}^{\infty} \frac{D_{jk} A_{1j} A_{1k}}{(g\lambda_j^2 - \sigma^2)(g\lambda_k^2 - \sigma^2)}$$

Легко видеть, что функция $\sigma^4 / (g\lambda_k^2 - \sigma^2)$ монотонно возрастает с ростом σ^2 во всех точках, где $\sigma^2 \neq g\lambda_k^2$. Следовательно, функция $\Phi_1(\sigma^2)$ из (3.5) монотонно убывает с ростом σ^2 при $\sigma^2 \neq g\lambda_k^2$ и $d\Phi_1 / d\sigma^2 < 0$. Выясним еще знак двойной суммы в формуле (3.5) для δ_1. Эту сумму, учитывая равенства (1.6) и $D_{jk}=D_{kj}$, можно записать в виде

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} D_{jk}\alpha_j\alpha_k = \int_S \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_j \nabla\psi_j \alpha_k \nabla\psi_k dS = \int_S \left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \nabla\psi_k\right)^2 dS > 0$$

$$\alpha_k = A_{1k}/(g\lambda_k^2-\sigma^2) \qquad (k=1,2,\ldots)$$

Таким образом, доказано, что δ_1 имеет вид $\delta_1=\delta_2(1\pm i)$, где δ_2 — вещественно и отрицательно. Как и в случае свободных колебаний жидкости (формула (3.1)), вязкость приводит к затуханию всех собственных колебаний ($\operatorname{Re}\mu<0$) и к уменьшению частоты этих колебаний.

Если же $a>0$, а коэффициент $b>0$ мал по величине (имеется малое внешнее затухание), то корень μ_0 уравнения (3.3) можно искать в виде $\mu_0=\pm i\sigma+\delta_0$, где σ имеет прежний смысл, а δ_0 мало (этот случай при $\nu=0$ рассмотрен в [2, 6]). Подставляя μ_0 в уравнение (3.3) и используя малость δ_0, найдем (функция Φ_1 определена равенством (3.5))

$$\delta_0 = {}^1/_2 b\,[d\Phi_1(\sigma^2)\,/\,d\sigma^2]^{-1} < 0 \tag{3.6}$$

Решение (3.4) для μ, с точностью до малых высших порядков, примет вид $\mu=\pm i\sigma+\delta_0+\delta_1$, где δ_0, δ_1 определены формулами (3.5), (3.6). Таким образом, затухания, вызванные внешним и внутренним трением, в этом случае просто складываются.

4. *Случай малой массы жидкости.* В практически интересном случае, когда масса жидкости мала по сравнению с массой всей системы ($m_2\ll m$), формулы (3.4)—(3.6) могут быть упрощены. Выбирая за единицу массы массу m всей системы, а за единицу длины — характерный размер полости l, получим, что отношение массы жидкости к общей массе равно $m_2/m\sim\rho l^3/m\sim\rho$. Поэтому указанный случай можно рассматривать, считая ρ формальным малым параметром.

Кроме того, положим $a>0$, $b\geqslant0$, причем b также считаем малым. Таким образом, задача содержит три независимых формальных малых параметра: ν, ρ и b. При $b=0$, $\rho=0$ уравнение (3.3) имеет решение $\mu_*=\pm i\omega_*$, $\omega_*=\sqrt{a/m}$, соответствующее свободным незатухающим колебаниям тела без жидкости. При малых b, ρ решение уравнения (3.3), близкое к μ_*, ищем в виде $\mu_0=\mu_*+\delta_*$. Подставим это выражение в уравнение (3.3), считая b, ρ, δ_* малыми первого порядка, и определим

$$\delta_* = -\frac{b}{2m} \mp \frac{i\rho\omega_*^3}{2m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2A_{1k}^2}{g\lambda_k^2-\omega_*^2}, \quad \mu_0=\pm i\omega_*+\delta_* \tag{3.7}$$

Теперь подставим формулы (3.7) в (3.4), сохраняя малые первого порядка относительно ρ, b

$$\mu=\pm i\omega_*+\delta_*+\delta_1, \qquad \omega_*=\sqrt{a/m}$$

$$\delta_1 = -\frac{\rho\sqrt{\nu}\,\omega_*^{7/2}(1\pm i)}{2\sqrt{2}m}\sum_{j,k=1}^{\infty}\frac{D_{jk}A_{1j}A_{1k}}{(g\lambda_j^2-\omega_*^2)(g\lambda_k^2-\omega_*^2)} \tag{3.8}$$

Формулы (3.7), (3.8) определяют собственное число μ, в котором учитываются мнимые слагаемые порядка ρ (в члене δ_*) и вещественные слагаемые порядков b и $\rho\sqrt{\nu}$.

5. *Вынужденные колебания тела с жидкостью.* Пусть внешняя сила задана в виде $F=-a\xi-b\dot\xi+F_0e^{\mu t}$, где a, b, F_0, μ — известные постоянные. Амплитуду ξ_0 колебаний тела найдем, подставляя эту формулу и равенства (1.1) во второе уравнение (2.1) и разрешая его относительно ξ_0

$$\xi_0 = F_0\left[m\mu^2+b\mu+a-\rho\mu^4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k^2A_{1k}^2}{\mu^2+g\lambda_k^2}-\right.$$

$$\left.-\rho\mu^5\sqrt{\nu\mu}\sum_{j,k=1}^{\infty}\frac{D_{jk}A_{1j}A_{1k}}{(\mu^2+g\lambda_j^2)(\mu^2+g\lambda_k^2)}\right]^{-1} \tag{3.9}$$

Коэффициенты d_k определяются первой формулой (2.1). В резонансном случае, т. е. при условии (2.2), решение находится аналогично, но вместо формул (2.1) используем (2.3).

Полученные формулы позволяют рассчитывать различные случаи колебаний тела с жидкостью при условии, что тело движется поступательно. Аналогично могут быть рассмотрены и другие случаи колебаний тела с полостью, содержащей вязкую жидкость, например колебания вокруг оси или точки (в частности, задача о маятнике). Если же тело с жидкостью совершает колебания вокруг неподвижной оси (маятник), расстояние L от которой до полости велико по сравнению с размерами полости l, то полученное выше решение будет полностью применимо. Для этого во всех формулах нужно положить: $\xi = L\theta$, $F = M / L$, $m = I / L$, где θ — угол поворота тела вокруг неподвижной оси, отсчитанный от положения равновесия, M — момент относительно этой оси всех внешних сил, действующих на тело с жидкостью, I — момент инерции тела с жидкостью в невозмущенном состоянии относительно неподвижной оси.

4. В формулах пп. 1—3 фигурируют коэффициенты λ_k, A_{1k}, D_{jk}, зависящие от формы полости. Эти же коэффициенты входят и в общие уравнения движения тела с вязкой жидкостью [8]. Для их определения нужно решить задачу на собственные значения (1.3) и затем вычислить интегралы (1.6). Задачи (1.3) решены для целого ряда форм полостей в работах, посвященных движению тела с полостью, содержащей идеальную жидкость. Для этих полостей расчет коэффициентов A_{1k}, D_{jk} сводится к взятию квадратур. Вычислим эти коэффициенты для некоторых форм полостей.

Пусть область D, занятая жидкостью, ограничена плоским дном $x_3 = -h$ и цилиндрической поверхностью стенок, образующие которой параллельны оси x_3, а направляющей служит замкнутый контур Γ в плоскости x_1x_2. Решение задачи (1.3), удовлетворяющее условию (1.4), можно искать в виде

$$\psi_k = \frac{\operatorname{ch} l_k(x_3+h)}{\operatorname{ch} l_k h}\varphi_k(x_1, x_2), \qquad \int_\Sigma \varphi_k^2\, dS = 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.1}$$

$$\Delta\varphi_k + l_k^2\varphi_k = 0 \quad \text{в} \quad \Sigma, \qquad \partial\varphi_k / \partial N = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \quad \lambda_k^2 = l_k \operatorname{th} l_k h$$

Здесь Δ — оператор Лапласа по переменным x_1, x_2; N — нормаль к контуру Γ; φ_k, l_k — собственные функции и собственные значения задачи (4.1), не зависящей от глубины h. Выразим интегралы (1.6) через функции φ_k, произведя интегрирование по дну и стенкам сосуда

$$A_{1k} = \int_\Sigma x_1\varphi_k\, dS, \qquad D_{jk} = \frac{l_j \operatorname{th} l_j h - l_k \operatorname{th} l_k h}{l_j^2 - l_k^2}\oint_\Gamma \nabla\varphi_j\nabla\varphi_k\, dl +$$

$$+ \frac{l_j l_k (l_j \operatorname{th} l_k h - l_k \operatorname{th} l_j h)}{l_j^2 - l_k^2}\oint_\Gamma \varphi_j\varphi_k dl + \frac{1}{\operatorname{ch} l_j h \operatorname{ch} l_k h}\int_\Sigma \nabla\varphi_j\nabla\varphi_k dS$$

$$D_{kk} = \left(\frac{\operatorname{th} l_k h}{2l_k} + \frac{h}{2\operatorname{ch}^2 l_k h}\right)\oint_\Gamma (\nabla\varphi_k)^2 dl +$$

$$+ l_k^2\left(\frac{\operatorname{th} l_k h}{2l_k} - \frac{h}{2\operatorname{ch}^2 l_k h}\right)\oint_\Gamma \varphi_k^2 dl + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 l_k h}\int_\Sigma (\nabla\varphi_k)^2 dS$$

$$(j \neq k, \ j, \ k = 1, 2, \ldots) \tag{4.2}$$

Некоторые из формул (4.1), (4.2) упрощаются в случае очень глубокого или мелкого сосудов

$$\psi_k = \exp(-l_k x_3)\varphi_k, \qquad \lambda_k = \sqrt{l_k} \qquad (h \to \infty)$$

$$D_{jk} = \frac{1}{l_j + l_k}\oint_\Gamma (\nabla\varphi_j\nabla\varphi_k + l_j l_k\varphi_j\varphi_k)\, dl \qquad (j, k = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

$$\psi_k = \varphi_k, \qquad \lambda_k = l_k\sqrt{h}, \qquad D_{jk} = \int_\Sigma \nabla\varphi_j\nabla\varphi_k dS \qquad (h \to 0)$$

Для полости в форме прямоугольного параллелепипеда область Σ представляет прямоугольник $0 \leqslant x_1 \leqslant a_1$, $0 \leqslant x_2 \leqslant a_2$. Решение задачи (4.1) в этом случае имеет вид (c_{kn} — постоянные)

$$\varphi_{kn} = c_{kn}\cos\frac{\pi k x_1}{a_1}\cos\frac{\pi n x_2}{a_2}, \qquad l_{kn}^2 = \pi^2\left(\frac{k^2}{a_1^2} + \frac{n^2}{a_2^2}\right) \qquad (k, n = 0, 1, \ldots) \tag{4.4}$$

Из формул (4.2), (4.4) следует, что если $n \neq 0$, то $A_{1kn} = 0$. Собственные колебания жидкости, для которых $A_{1k} = 0$, не влияют на движение тела, так как соответствующие этим k слагаемые просто выпадают из формул (3.2)—(3.9). Поэтому ограничимся такими колебаниями, для которых $n = 0$, и будем помечать их одним индексом k. Тогда формулы (4.4), а также формулы (4.2), (4.3) после нормировки собственных функций, согласно (4.1), и элементарных вычислений примут вид

$$\varphi_k = \left(\frac{2}{a_1 a_2}\right)^{1/2} \cos\frac{\pi k x_1}{a_1}, \qquad l_k = \frac{\pi k}{a_1}, \qquad A_{1k} = \frac{\sqrt{2 a_1^3 a_2}}{\pi^2 k^2}[(-1)^k - 1]$$

$$D_{jk} = \frac{2\pi j k\,[1 + (-1)^{j+k}]}{a_1^2 (j^2 - k^2)}\left(j \operatorname{th}\frac{\pi k h}{a_1} - k \operatorname{th}\frac{\pi j h}{a_1}\right) \qquad (j \neq k) \tag{4.5}$$

$$D_{kk} = \frac{2\pi k (a_1 + a_2)}{a_1^2 a_2} \operatorname{th}\frac{\pi k h}{a_1} - \frac{\pi^2 k^2 (2h - a_1)}{a_1^3 \operatorname{ch}^2(\pi k h / a_1)} \qquad (j, k = 1, 2, \ldots)$$

$$D_{jk} = \frac{2\pi j k\,[1 + (-1)^{j+k}]}{a_1^2 (j + k)} \quad \text{при } h \to \infty, \qquad D_{jk} = \frac{\pi^2 k^2}{a_1^2}\delta_{jk} \quad \text{при } h \to 0.$$

Здесь δ_{jk} — символ Кронекера. Так как $A_{1k} = 0$ при четном k, то на движение тела влияют лишь колебания с нечетными k.

Для полости в виде кругового цилиндра радиуса R, глубины h область Σ представляет собой круг. Решение задачи (4.1) для круга $0 \leqslant r \leqslant R$ имеет вид

$$\varphi_{0k} = c_{0k} J_0\left(\frac{\mu_{0k} r}{R}\right), \qquad \overset{(1)}{\varphi}_{nk} = \overset{(1)}{c}_{nk} J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \cos n\varphi \tag{4.6}$$

$$\overset{(2)}{\varphi}_{nk} = \overset{(2)}{c}_{nk} J_n\left(\frac{\mu_{nk} r}{R}\right) \sin n\varphi, \qquad l_{nk} = \frac{\mu_{nk}}{R} \qquad (n, k = 1, 2, \ldots)$$

Здесь c_{0k}, $c_{nk}^{(1)}$, $c_{nk}^{(2)}$ — постоянные, r, φ — полярные координаты в плоскости $x_1 x_2 : x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r \sin\varphi$, а μ_{nk} — последовательные корни производных функций Бесселя

$$J_n'(\mu_{nk}) = 0, \qquad 0 < \mu_{n1} < \mu_{n2} < \ldots, \qquad (n = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots)$$

Из первой формулы (4.2) находим, что $A_{1nk} = 0$, если $n \neq 1$, или если в (4.6) взята собственная функция с верхним индексом (2). Поэтому ограничимся в (4.6) колебаниями с $n = 1$, помечая их одним нижним индексом k и полагая верхний индекс равным (1). Перепишем формулы (4.6), определяя постоянные из условия нормировки, а затем вычислим интегралы (4.2), (4.3), пользуясь известными формулами для функций Бесселя. Окончательно получим

$$\varphi_k = \frac{\sqrt{2}\,\mu_k J_1(\mu_k r / R)}{\sqrt{\pi(\mu_k^2 - 1)}\,J_1(\mu_k) R} \cos\varphi, \qquad l_k = \frac{\mu_k}{R}$$

$$J_1'(\mu_k) = 0, \qquad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots, \qquad A_{1k} = \frac{\sqrt{2\pi}\,R^2}{\mu_k \sqrt{\mu_k^2 - 1}}$$

$$D_{jk} = \frac{2\mu_j \mu_k}{(\mu_j^2 - \mu_k^2) R^2}\left(\mu_k \sqrt{\frac{\mu_j^2 - 1}{\mu_k^2 - 1}} \operatorname{th}\frac{\mu_k h}{R} - \mu_j \sqrt{\frac{\mu_k^2 - 1}{\mu_j^2 - 1}} \operatorname{th}\frac{\mu_j h}{R}\right) \qquad (j \neq k)$$

$$D_{kk} = \frac{\mu_k^2}{R^2}\left[\frac{\mu_k^2 + 1}{\mu_k(\mu_k^2 - 1)} \operatorname{th}\frac{\mu_k h}{R} + \frac{1 - h/R}{\operatorname{ch}^2(\mu_k h / R)}\right] \tag{4.7}$$

$$D_{jk} = \frac{2\mu_j \mu_k (\mu_j \mu_k + 1)}{(\mu_j + \mu_k)\sqrt{(\mu_j^2 - 1)(\mu_k^2 - 1)}\,R^2} \qquad \text{при } h \to \infty$$

$$D_{jk} = \mu_k^2 R^{-2} \delta_{jk} \qquad \text{при } h \to 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots)$$

Некоторые из формул (4.2) — (4.7) для D_{kk} ранее получены в работе [9]. Функции ψ_k и постоянные λ_k выражаются через φ_k, l_k равенствами (4.1) или, в частных случаях, (4.3). Подставляя формулы (4.5) — (4.7) в соотношения пп. 1—3, получим решения задач о колебаниях тела с полостями в виде параллелепипеда и цилиндра. Ряды в формулах (3.2) — (3.9) при этом оказываются быстро сходящимися, так что для расчетов достаточно ограничиться несколькими первыми их членами. Аналогично могут быть рассмотрены и другие формы полостей.

Поступило
13 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Колебание жидкости в подвижном сосуде. Изв. АН СССР, ОТН, 1951, № 10.
2. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность. Матем. сб., 1953, т. 32, № 1.
3. Охоцимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
4. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
5. Рабинович Б. И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
6. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Изд-во «Наука», 1965.
7. Крушинская С. И. Колебания тяжелой вязкой жидкости в подвижном сосуде. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
8. Черноусько Ф. Л. О движении тела с полостью, частично заполненной вязкой жидкостью. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
9. Черноусько Ф. Л. О свободных колебаниях вязкой жидкости в сосуде. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.