ОБ ОДНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ И. С. ГРОМЕКО ДЛЯ ВЯЗКОЙ И УПРУГО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЕЙ

А. И. ЛЕОНОВ

(Москва)

Решение задачи И. С. Громеко [1] о нестационарном течении вязкой жидкости в длинной круглой трубе принадлежит к числу немногих точных решений уравнений Навье — Стокса. Ее эффективное решение получается лишь тогда, когда задан продольный градиент давления в качестве некоторой произвольной функции времени. На практике, однако, встречаются случаи, когда расход — известная функция времени. Такого рода задача возникает, в частности, в реологических экспериментах на вискозиметрах заданного расхода. При этом определение градиента давления по заданному расходу приводит в общем случае к весьма громоздкому выражению. Ниже приводится эффективное решение этой задачи для вязкой и упруго-вязкой сред с использованием метода решения задачи о входовом участке при стационарном течении вязкой жидкости в полуограниченной трубке. Показывается, что эти две задачи для случая вязкой жидкости будут и в самом деле эквивалентными.

Задача о нестационарном движении упруго-вязкой жидкости в длинной круглой трубе сводится к решению системы уравнений [2]

$$\frac{\partial v}{\partial t}=q(t)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\tau)\qquad\left(q(t)=-\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$\tau(r,t)=\int_0^t\psi(t-\xi)\frac{\partial v}{\partial r}(r,\xi)\,d\xi \tag{1}$$

$$\sigma(r,t)=p_{xx}-p=2\int_0^t\psi(t-\xi)\int_\xi^t\frac{\partial v}{\partial r}(r,\alpha)\frac{\partial v}{\partial r}(r,\xi)\,d\alpha\,d\xi$$

с начальными и граничными условиями

$$v(0,r)=\varphi(r),\quad v|_{r=1}=0,\quad |v|_{r=0}<\infty\quad(0\leqslant r\leqslant 1) \tag{2}$$

Здесь введены безразмерные переменные; размерные переменные, имеющие индекс 1, суть

$$r_1=ra,\quad t_1=\frac{a^2t}{\nu},\quad v_1=Vv,\quad q_1=\frac{\rho\nu V}{a^2}q$$

$$\tau_1=\frac{\rho\nu V}{a}\tau,\quad \sigma_1=\frac{\rho\nu V}{a}\sigma,\quad \psi_1=\frac{\rho\nu^2}{a^2}\psi$$

В (1), (2) величина v — единственная отличная от нуля компонента скорости, τ — касательное напряжение, q — градиент давления, σ — нормальное напряжение в жидкости, $\psi(t)$ — функция релаксации (убывающая, положительная, $\psi(0)<\infty$, $\psi(\infty)=0$). Дополнительно к (1), (2) имеем условие постоянства расхода

$$2\int_0^1 rv(r,t)\,dr=U(t)=\frac{Q(t)}{\pi} \tag{3}$$

Функции $q(t)$, $U(t)$, и $\varphi(r)$ предполагаем достаточно гладкими, причем предполагаем, что $\varphi(r)$ удовлетворяет условию (3) при $t \to +0$.

Для того чтобы избежать излишне громоздких расчетов, будем рассматривать два случая задания $\psi(t)$

$$\psi_1(t) = ne^{-nt} \quad (n < \infty), \quad \psi_2(t) = \lim_{n\to\infty} \psi_1 = \delta(t) \tag{4}$$
$$(n = a^2\nu^{-1}\theta^{-1})$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция, n — отношение времен вязкой и вязкоупругой θ релаксации. Функция ψ_1 соответствует максвелловской среде, функция ψ_2 — вязкой ньютоновской жидкости.

Подставляя значение τ в первое уравнение (1), получим уравнение для v, которое с учетом (4) примет вид

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} n \int_0^t e^{-n(t-\xi)} v(r, \xi)\, d\xi = q(t) \tag{5}$$

Уравнение (5) решается с учетом условий (2) и (3). Приведем сначала известное решение задачи (5), (2) при заданной $q(t)$ [1, 3]

$$v(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_k{}^\circ y_k{}^\circ(t,n) + \frac{2}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} \int_0^t q(\xi)\, y_k{}^\circ(t-\xi, n)\, d\xi\right] J_0(\alpha_k r)$$

$$y_k{}^\circ(t,n) = e^{-\frac{1}{2}nt}\left(\frac{n}{2s_k}\operatorname{sh} s_k t + \operatorname{ch} s_k t\right) \tag{6}$$

$$\varphi_k{}^\circ = \frac{2}{J_1^2(\alpha_k)} \int_0^1 r\varphi(r) J_0(\alpha_k r)\, dr, \qquad s_k = \left(\frac{n^2}{4} - \alpha_k^2 n\right)^{1/2}$$

Здесь α_k — последовательные корни $J_0(x)$.

Используя (6), из (3) легко определить среднерасходовую скорость $U(t)$ по заданному градиенту давления $q(t)$

$$U(t) = P(t) + \int_0^t q(\xi) K(t-\xi)\, d\xi \tag{7}$$

$$K(t) = 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k{}^\circ(t,n)}{\alpha_k^2}, \quad P(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k{}^\circ y_k{}^\circ(t,n) \frac{J_1(\alpha_k)}{\alpha_k}$$

При $n \to \infty$ имеем

$$y_k{}^\circ(t, \infty) = e^{-\alpha_k^2 t}$$

и (6) и (7) переходят в известные [1] уравнения для вязкой жидкости.

Рассмотрим теперь случай, когда задан расход, и, следовательно — функция $U(t)$. В этом случае определение градиента давления из интегрального уравнения (7) представляет принципиально нетрудную, но практически довольно громоздкую задачу. Формулы же для скорости касательного и нормального напряжений становятся чрезвычайно усложненными. Рассмотрим новое решение задачи, лишенное этого недостатка. Умножим уравнение (5) на r и проинтегрируем его по всему интервалу [0, 1]. С учетом условия (3) получим

$$q(t) = U'(t) - 2n \int_0^t e^{-n(t-\xi)} \frac{\partial v}{\partial r}(1, \xi)\, d\xi \qquad \left(U'(t) = \frac{dU}{dt}\right) \tag{8}$$

Подставляя (8) в (5), получим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\frac{\partial}{\partial r}n\int_0^t e^{-n(t-\xi)}v(r,\xi)\,d\xi+2n\int_0^t e^{-n(t-\xi)}\frac{\partial v}{\partial r}(1,\xi)\,d\xi=U'(t) \quad (9)$$

которое надлежит решать при условиях (2). Применение стандартной методики разделения переменных к уравнению (9) приводит к модифицированной задаче Штурма — Лиувилля на отрезке [0, 1]

$$Z''+\frac{1}{r}Z'+\lambda Z=2Z'(1),\quad Z(1)=0,\quad |Z(0)|<\infty \quad (10)$$

подробно изученной в [4]. В этой работе было показано, что система собственных функций задачи (10)

$$Z_0(r)=2(1-r^2),\quad (\lambda=0),\quad Z_k(r)=J_0(\beta_k r)-J_0(\beta_k)\quad (\lambda_k=\beta_k^2) \quad (11)$$

(β_k — последовательные корни $J_2(x)$) полна в L^2 и почти ортогональна. Основываясь на этих результатах, будем искать решение задачи (2) — (9) в виде ряда Фурье по функциям (11)

$$v(r,t)=2U(t)(1-r^2)+\sum_{k=1}^{\infty}v_k(t)[J_0(\beta_k r)-J_0(\beta_k)] \quad (12)$$

Используя разложение единицы и $\varphi(r)$ в ряд по функциям (11) [4]

$$1=2(1-r^2)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\beta_k J_1(\beta_k)}[J_0(\beta_k r)-J_0(\beta_k)] \quad (13)$$

$$\varphi(r)=2U(0)(1-r^2)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k[J_0(\beta_k r)-J_0(\beta_k)]$$

$$\varphi_k=\frac{2}{J_1^2(\beta_k)}\int_0^1 r\varphi(r)J_0(\beta_k r)\,dr$$

Подставляя эти разложения и (12) в уравнение (9) с учетом известных рекуррентных соотношений для бесселевых функций, получим для коэффициентов Фурье $v_k(t)$ задачу

$$\frac{dv_k}{dt}+\beta_k^2 n\int_0^t e^{-n(t-\xi)}v_k(\xi)\,d\xi=\frac{2U'(t)}{\beta_k J_1(\beta_k)},\quad v_k(0)=\varphi_k \quad (14)$$

Решая эту задачу преобразованием Лапласа, получим

$$v_k(t)=\varphi_k y_k(t,n)+\frac{2}{\beta_k J_1(\beta_k)}\int_0^t U'(\xi)\,y_k(t-\xi,n)\,d\xi \quad (15)$$

$$y_k(t,n)=e^{-\frac{1}{2}nt}\left(\frac{n}{2r_k}\operatorname{sh}r_k t+\operatorname{ch}r_k t\right),\qquad r_k=\left(\frac{n^2}{4}-\beta_k^2 n\right)^{1/2}$$

Формулы (12) и (15) дают решение поставленной задачи (9) с условиями (2).

Вычисленные по формулам (8) и (1) выражения для $q(t)$, $\tau(1,t)$, $\sigma(1,t)$ имеют вид в рассматриваемом случае максвелловской жидкости

$$q(t)=U'(t)+8n\int_0^t U(\xi)e^{-n(t-\xi)}d\xi+n\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\varphi_k e^{-\frac{1}{2}nt}\operatorname{sh} r_k t+$$

$$+\frac{2}{\beta_k J_1(\beta_k)}\int_0^t U'(t-\xi)e^{-\frac{1}{2}n\xi}\operatorname{sh} r_k\xi\, d\xi\Big]_k\frac{\beta_k J_1(\beta_k)}{r_k} \tag{16}$$

$$\sigma(1,t)=2n\int_0^t e^{-n(t-\xi)}\Big[4U(\xi)+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k J_1(\beta_k)v_k(\xi)\Big]\times$$

$$\times\int_\xi^t\Big[4U(\alpha)+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k J_1(\beta_k)v_k(\alpha)\Big]d\alpha\, d\xi$$

$$2\tau(1,t)=U'(t)-q(t)$$

Устремляя в (16) $n\to\infty$ (соответствующие предельные переходы могут быть легко обоснованы), получим новое решение задачи И. С. Громеко для вязкой ньютоновской жидкости

$$v(r,t)=2(1-r^2)U(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\varphi_k\exp(-\beta_k^2 t)+$$

$$+\frac{2}{\beta_k J_1(\beta_k)}\int_0^t U'(\xi)\exp[-\beta_k^2(t-\xi)]\,d\xi\Big][J_0(\beta_k r)-J_0(\beta_k)] \tag{17}$$

$$q(t)=\Big(8+\frac{d}{dt}\Big)U(t)+\sum_{k=1}^{\infty}2\beta_k J_1(\beta_k)\Big[\varphi_k\exp(-\beta_k^2 t)+$$

$$+\frac{2}{\beta_k J(\beta_k)}\int_0^t U'(\xi)\exp[-\beta_k^2(t-\xi)]\,d\xi\Big]$$

Заметим теперь, что в силу очевидной единственности рассматриваемых в настоящей работе задач выражения для $q(t)$ в (16) и (17) будут точными решениями интегральных уравнений (7), причем возможность представления решений этих интегральных уравнений в таком простом виде при непосредственном их решении далеко не очевидна.

Легко показать также, что если при $t\to\infty$ существует $U(\infty)$, то существует и $q(\infty)=8U(\infty)$, что представляет собой формулу Пуазейля.

Частные случаи движения вязкой и упруго-вязкой жидкостей при задании $q(t)$ рассматривались рядом авторов. Наиболее интересными из них будут выход на режим установившегося течения в круглой трубе при задании постоянной величины q (рассмотренный в случае вязкой жидкости в [1], а в случае упруго-вязкой жидкости в [3]) и режим стационарных колебаний в трубе (излученный для вязкой жидкости в работе [1], а для случая упруго-вязкой жидкости с непрерывным спектром времен релаксации — в работе [5]). Заметим еще, что для случая стационарных колебаний ни одному из рассмотренных представлений решения задачи И. С. Громеко нельзя отдать предпочтение перед другим.

Рассмотрим теперь в качестве примера выход на режим установившегося течения вязкой и максвелловской жидкостей. Пусть при $t \leqslant 0$ жидкость находилась в состоянии покоя. При $t > 0$ скачком задается постоянный расход. Тогда

$$U(t) = J(t), \qquad U'(t) = \delta(t), \qquad \varphi(r) = 0 \tag{18}$$

Здесь $J(t)$ — единичная функция Хэвисайда, а $\delta(t)$ — дельта-функция. Подставляя эти выражения в (12) с учетом (15), а также в формулы (16) и (17), получим для максвелловской среды

$$v(r,t) = \left\{2(1-r^2) + 2e^{-\frac{1}{2}nt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k J_1(\beta_k)}\left(\frac{n}{2r_k}\operatorname{sh} r_k t + \operatorname{ch} r_k t\right) \times \right.$$

$$\left. \times \left[J_0(\beta_k r) - J_0(\beta_k)\right]\right\} J(t)$$

$$q(t) = \delta(t) + 8(1-e^{-nt}) + 2e^{-\frac{1}{2}nt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} r_k t}{r_k} - \tau(1,t) =$$

$$= 4(1-e^{-nt}) + e^{-\frac{1}{2}nt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} r_k t}{r_k} \tag{19}$$

для вязкой жидкости

$$v(r,t) = \left\{2(1-r^2) + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\exp(-\beta_k^2 t)}{\beta_k J_1(\beta_k)}\left[J_0(\beta_k r) - J_0(\beta_k)\right]\right\} J(t)$$

$$q(t) = \left\{\delta(t) + 8 + 4\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\beta_k^2 t)\right\} J(t) \tag{20}$$

$$\tau(1,t) = \left\{4 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\exp(-\beta_k^2 t)\right\} J(t)$$

Выражение для $\sigma(1,t)$ для максвелловской среды не приводим ввиду его громоздкости. Оно легко может быть подсчитано по формулам (18) и (16) и содержит сумму конечного выражения с одинарным и двойным рядами. Необходимо, однако, отметить, что непосредственное решение интегрального уравнения (7) будет представляться в виде некоторого ряда, подстановка которого для скорости и касательного напряжения даст двойные ряды, а выражение для $\sigma(1,t)$ будет содержать и тройной ряд.

Из (19) и (20) видно, что при скачкообразном задании расхода как в вязкой, так и в упруго-вязкой жидкостях градиент давления имеет δ-образную составляющую. При этом, в отличие от вязкой жидкости, в которой выражения для τ и v будут непрерывными при $t > 0$, в упруго-вязкой жидкости при $t > 0$ имеются экспоненциально затухающие разрывы в полях v и τ. В этом можно убедиться, исследуя ряды (20) подобно тому, как это делалось в работе [6].

Используя выражение (13) для разложения единицы в ряд по функции (11), нетрудно заметить, что при $t \to +0$ распределение скорости в (19) и (20) стремится к постоянной, за исключением точки $r = 1$. Таким образом, при задании скачком постоянного во времени расхода в трубе через весьма малое время с начала течения реализуется почти постоянный по сечению профиль продольной скорости, перестройка которого во времени в параболический профиль описывается формулами (19) и (20). В такой постановке рассмотренная задача для вязкой жидкости становится полностью эквивалентной (при замене $t \to x$) задаче о развитии стационарного течения вязкой жидкости в полуограниченной круглой трубе [7], что и обусловливает адекватность математического аппарата в этих задачах. В частности, оценка для длины входового участка, полученная в [7], пригодна и в настоящем случае, только здесь она имеет смысл времени выхода на режим установившегося течения $t^* \approx 0.16$ или (в размерных переменных) $t_1^* \approx 0.16\ a^2 / \nu$. Необходимо подчеркнуть еще, что указанная аналогия между задачей о входовом участке и задачей И. С. Громеко не может быть формально распространена на упруго-вязкую жидкость с конечными упругими деформациями, рассмотренную в настоящей работе на примере максвелловской среды, однако весьма вероятно, что выражение для длины входового участка в задаче о развитии течения такой жидкости по порядку величины будет таким же, как и время выхода на режим установившегося течения в задаче И. С. Громеко. К сожалению, насколько известно автору, в литературе отсутствуют сколько-нибудь серьезные попытки решения задачи о входовом участке для упруго-вязкой жидкости, так что ответ на этот вопрос остается открытым.

Отметим в заключение, что точно таким же образом решается задача о течении вязкой и упруго-вязкой жидкостей в плоской трубе. При этом структура решения остается такой же, только вместо разложений в ряды по системе (11) используется разложение по системе

$$^3/_2(1 - y^2), \qquad \{\cos \gamma_k y - \cos \gamma_k\} \qquad (-1 \leqslant y \leqslant 1,\ k = 1, 2, \ldots)$$

Здесь γ_k — последовательные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

Поступило
5.VII. 66

ЛИТЕРАТУРА

1. Громеко И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. Казанск. университетск. типография, 1882.
2. Fredrickson A. G. On stress-relaxing solids.— I. Flow and normal stress effects. Chem. Engng. Sci., 1962, vol. 17, p. 155.
3. Леонов А. И. Некоторые задачи нестационарного течения несжимаемой вязкоупругой (максвелловской) жидкости. Сб. «Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике», Москва, 27 января — 3 февраля 1960. Аннотации докладов.
4. Леонов А. И. Об установившемся течении вязкой жидкости в плоской и круглой трубе конечной длины. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 6.
5. Vela Saul, Kalb J. W., Fredrickson A. G. On stress-relaxing solids. Part III. Simple harmonic deformation, Amer. J. Chem. Engng., 1965, vol. 11, No. 2.
6. Леонов А. И. О нестационарном движении несжимаемой максвелловской жидкости в зазоре между неограниченными параллельными плоскостями. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1962, № 3.
7. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. Гостехиздат, 1951.