

## ВОЛНОВЫЕ РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

В. Я. ШКАДОВ

(Москва)

Начало подробному экспериментальному и теоретическому исследованию течения тонкого слоя вязкой жидкости (жидкой пленки) по твердой поверхности было положено работами П. Л. Капицы [1, 2]. В настоящее время по этому вопросу накоплен обширный экспериментальный материал. Существующие теории, как правило, основаны на линеаризации задачи и значительно расходятся с экспериментальными результатами. Данная работа также посвящена теоретическому решению этой задачи. Используемый метод решения позволяет провести рассмотрение волнового течения жидкости как нелинейного явления и на этой основе определить все параметры волнового режима — амплитуду, длину волны, скорость распространения волн, частоту.

1. Пусть по вертикальной поверхности под действием силы тяжести стекает тонкий слой вязкой жидкости. Будем считать, что поверхность жидкости является свободной, т. е. на нее не действует сила трения воздуха. Направим ось  $x$  вдоль поверхности в направлении действия силы тяжести, а ось  $y$  — в сторону жидкости; в этой системе координат движение жидкости описывается следующей системой уравнений Навье — Стокса и неразрывности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + g \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Пусть  $y = a(x, t)$  — уравнение свободной поверхности слоя. К системе (1.1) надо присоединить также уравнение

$$\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad Q = \int_0^a u dy \quad (1.2)$$

выражающее условие того, что эта поверхность состоит из линий тока. В силу прилипания жидкости на стенке имеем два граничных условия

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.3)$$

Если на поверхности жидкости действует только сила поверхностного натяжения и постоянное давление  $p_0$ , то в случае плоского течения при  $y = a(x, t)$  будут выполняться [3] соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2b}{1-b^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0, \quad b = \frac{\partial a}{\partial x} \\ p + \sigma \frac{1}{R} - \mu b \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} &= p_0, \quad \frac{1}{R} = \frac{\partial b / \partial x}{(1+b^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения, а  $R$  — радиус кривизны поверхности.

Будем рассматривать далее слой жидкости, не ограниченный вдоль оси  $x$  со средней по времени толщиной  $a_0$  и отыскивать периодические по  $x$  решения в виде бегущих волн. Такие решения можно представить в виде функций переменных  $y$  и  $\xi = (n/a_0)(x - \omega t)$ . При этом  $a_0/n$  будет характерным размером вдоль  $x$ , а  $a_0$  — вдоль  $y$ .

Допустим, что выполняется условие  $n \ll 1$ . Физически оно означает, что длины волн значительно больше средней толщины слоя. Из экспериментов [2] следует, что  $n$  в случае периодических волновых движений имеет порядок 0.1: при средней толщине слоя порядка 1 мм наблюдаются волны длиной около 1 см. Такой же порядок имеют расчетные значения  $n$ , приведенные в таблице.

Параметры оптимальных волновых режимов

| $R$ | $\lambda$ , см | $10 a_0$ , см | $\rho$ | $\omega$ , см/сек | $n$   | $10 \rho^2 \varphi_{20}$ | $10 \rho^2 \varphi_{21}$ | $z$   |
|-----|----------------|---------------|--------|-------------------|-------|--------------------------|--------------------------|-------|
| 9   | 1.196          | 0.106         | 0.080  | 9.530             | 0.055 | -0.159                   | 0.036                    | 2.945 |
| 15  | 0.980          | 0.124         | 0.174  | 12.700            | 0.079 | -0.328                   | 0.159                    | 2.760 |
| 20  | 0.912          | 0.134         | 0.241  | 14.513            | 0.093 | -0.435                   | 0.292                    | 2.569 |
| 25  | 0.886          | 0.143         | 0.294  | 15.936            | 0.101 | -0.520                   | 0.424                    | 2.401 |
| 30  | 0.865          | 0.150         | 0.334  | 17.191            | 0.109 | -0.561                   | 0.529                    | 2.268 |
| 35  | 0.859          | 0.157         | 0.365  | 18.321            | 0.115 | -0.601                   | 0.627                    | 2.161 |
| 40  | 0.851          | 0.163         | 0.390  | 19.401            | 0.120 | -0.618                   | 0.705                    | 2.078 |
| 45  | 0.845          | 0.168         | 0.410  | 20.439            | 0.125 | -0.626                   | 0.773                    | 2.010 |
| 50  | 0.841          | 0.173         | 0.427  | 21.442            | 0.129 | -0.628                   | 0.832                    | 1.955 |
| 55  | 0.837          | 0.178         | 0.441  | 22.418            | 0.133 | -0.626                   | 0.885                    | 1.909 |
| 60  | 0.834          | 0.182         | 0.452  | 23.370            | 0.137 | -0.620                   | 0.931                    | 1.871 |
| 65  | 0.830          | 0.187         | 0.462  | 24.313            | 0.141 | -0.611                   | 0.972                    | 1.839 |
| 70  | 0.830          | 0.191         | 0.471  | 25.226            | 0.144 | -0.605                   | 1.014                    | 1.810 |
| 75  | 0.829          | 0.195         | 0.478  | 26.121            | 0.148 | -0.598                   | 1.053                    | 1.786 |
| 85  | 0.825          | 0.202         | 0.490  | 27.888            | 0.154 | -0.575                   | 1.116                    | 1.746 |

Условие  $n \ll 1$  позволяет провести оценки членов в уравнениях (1.1) и граничных условиях (1.4) и заранее упростить их, что значительно облегчает решение. Если принять, что  $u \sim V_0$ , то из уравнения неразрывности следует  $v \sim nV_0$ .

Вследствие этого из второго уравнения движения получаем

$$-\frac{a_0}{\rho V_0^2} \frac{\partial p}{\partial y} = o\left(n \frac{v}{a_0 V_0}\right) + o(n^2)$$

Здесь первое слагаемое обозначает вязкие члены, а второе — инерционные.

Величина  $R = 3a_0 V_0 \nu^{-1}$  — число Рейнольдса; в дальнейшем будет видно, что  $R$  имеет порядок 10, и отношение  $n/R$  мало за исключением случая очень малых расходов.

Таким образом, с ошибкой, порядок которой не превосходит наибольшее из чисел  $n^2$  и  $3nR^{-1}$ , давление поперек слоя можно считать постоянным и равным давлению на поверхности.

Упрощая с такой же точностью граничные условия (1.4) и пренебрегая в первом уравнении движения производной

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} / \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^{-1} \sim n^2$$

прийдем к следующей задаче:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g, \quad p = p_0 - \sigma \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad \partial u / \partial y = 0 \quad \text{при } y = a(x, t)$$

Заменим теперь уравнения системы (1.5) уравнениями, проинтегрированными по переменной  $y$ . Такую замену можно представить как первый шаг в последовательном применении прямого метода. Для этого выберем полную систему функций  $W_i(y)$ , удовлетворяющую граничным условиям, представим скорость  $u$  в виде

$$u = \sum_i b_i(x, t) W_i(y)$$

и из уравнения неразрывности найдем

$$v = - \sum_i \partial b_i / \partial x \int_0^y W_i(y) dy$$

Подставив  $u, v$  в первое уравнение (1.5), потребуем, чтобы получающееся выражение на отрезке  $(0, a)$  было ортогонально некоторой полной системе функций  $V_i(y)$  и из условий ортогональности получим уравнения для  $b_i(x, t)$ .

Ограничиваясь первым шагом, тем самым отказываемся от проверки быстроты сходимости такого процесса и о получаемой при этом точности можем судить лишь по сравнению с экспериментальными данными. Положим

$$u = 3U(x, t) [y/a - 1/2(y/a)^2]$$

что совпадает с точным решением при ламинарном режиме течения слоя. Интегрируя первое из уравнений (1.5) по  $y$  от 0 до  $a$  и вводя переменные

$$\xi, \quad \tau = n \frac{U_0}{a_0} t, \quad h = \frac{a}{a_0}, \quad q = \frac{Q}{a_0 U_0} \quad (1.6)$$

получим уравнения для определения безразмерной толщины  $h$  и расхода  $q$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} (q - zh) &= 0 \\ \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial \tau} - \left( z - \frac{12}{5} q \right) \frac{1}{h} \frac{\partial q}{\partial \xi} - \frac{6}{5} \frac{q^2}{h^3} \frac{\partial h}{\partial \xi} - G \frac{\partial^3 h}{\partial \xi^3} - H + E \frac{q}{h^3} &= 0 \quad (1.7) \\ \left( G = \frac{\gamma n^2}{V_0^2 \rho a_0}, \quad H = \frac{g a_0}{V_0^2 n}, \quad E = \frac{3\nu}{V_0 a_0 n} \right) \end{aligned}$$

Здесь  $V_0$  — характерное значение скорости, которое, вообще говоря, можно выбирать произвольно. Вместо  $V_0, a_0$  удобнее пользоваться безразмерными параметрами  $R$  и  $R_0 = g a_0^3 \nu^{-2}$ , при помощи которых коэффициенты уравнений (1.7) можно выразить следующим образом:

$$G = \frac{9n^2 \gamma R_0^{1/2}}{R^2}, \quad H = 9 \frac{R_0}{R^2 n}, \quad E = 9 \frac{1}{R n}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\rho} (\nu^4 g)^{-1/2}$$

Первый из этих параметров характеризует расход, а второй однозначно связан с толщиной пленки. Если в качестве  $V_0$  принять среднюю скорость при ламинарном течении слоя толщиной  $a_0$ , то, как следует из второго уравнения (1.7), при этом будет  $R_0 = R$ , а среднее значение расхода  $q_0$  отлично от единицы. Если за  $V_0$  взять среднюю скорость в том сечении, где толщина пленки равна  $a_0$  при волновом течении, то будет  $q_0 = 1$ , но  $R_0 \neq R$ .

В систему (1.7) входят всего четыре параметра:  $R_0$ ,  $R$ ,  $z$ ,  $n$  или  $R$ ,  $z$ ,  $n$ ,  $q_0$ , если  $R_0 = R(z = \omega / V_0)$ . По физическому смыслу рассматриваемой задачи и из условия однозначной разрешимости для периодического решения два из них можно считать известными, а два другие должны определяться в процессе решения. Можно, например, считать, что заданы  $R$  и  $\lambda$ , т. е. расход и длина волны возмущений, и определять соответствующую среднюю толщину и фазовую скорость волн или задавать  $R_0$  и  $\lambda$ . Величины  $\gamma$ ,  $\nu$  характеризуют физические свойства жидкости и считаются заданными. В последующих расчетах принимается  $\nu = 0.0114$  см<sup>2</sup>/сек,  $g = 981$  см/сек<sup>2</sup>,  $\gamma = 2850$  (вода при 15° С).

В случае установившегося режима бегущих волн  $\partial/\partial t = 0$ , поэтому из первого уравнения (1.7) легко найти

$$q = zh + q_0 - z \quad (1.8)$$

Выберем  $V_0$  так, чтобы  $q_0 = 1$ , и положим  $h = 1 + \varphi$ , где  $\varphi$  представляет возмущение поверхности стекающей жидкости, вызванное образованием волн. Тогда при помощи (1.8) получим для  $\varphi$  уравнение

$$(1 + \varphi)^3 \varphi''' + [\Lambda - B\varphi(2 + \varphi)]\varphi' + A\varphi^2(3 + \varphi) + D\varphi + r = 0 \quad (1.9)$$

$$\Lambda = \frac{5z^2 - 12z + 6}{45\gamma R_0^{1/3} n^2} R^2, \quad r = \frac{R_0 - R}{\gamma R_0^{1/3} n^3}, \quad D = \frac{3R_0 - zR}{\gamma R_0^{1/3} n^3}$$

$$A = \frac{R_0^{2/3}}{\gamma n^3}, \quad B = \frac{z^2}{5z^2 - 12z + 6} \Lambda$$

Исследование периодических решений уравнения (1.9) составит предмет дальнейшего рассмотрения. Впервые это уравнение получено в работе [1] (при выводе не учитывался член  $\nu \partial u / \partial y$ ). В выписанном здесь виде оно рассматривалось в [4], где при частном значении  $\Lambda = 1$  разложением в ряды периодическое решение было построено для малых значений амплитуды волн.

2. Будем искать периодическое решение уравнения (1.9) в виде ряда Фурье

$$\varphi = \rho \sin \xi + \rho^2 (\varphi_{20} \sin 2\xi + \varphi_{21} \cos 2\xi) + \dots \quad (2.1)$$

в котором без ограничения общности можно опустить  $\cos \xi$ , поскольку  $\xi$  не входит явно в (1.9), и поэтому решение (2.1) определено лишь с точностью до произвольного сдвига по  $\xi$ . Если подставить (2.1) в левую часть уравнения (1.9), то получится нелинейное выражение, содержащее степени тригонометрических функций. Основная идея метода решения заключается в том, чтобы преобразовать это выражение и представить его также в виде ряда Фурье. Такое преобразование удобно провести следующим способом. Запишем (2.1) в виде разложения по степеням  $\sin \xi$  и  $\cos \xi$ , воспользовавшись для этого соотношениями, выражающими тригонометрические функции кратного угла через функции простого угла. Подставим получающийся ряд для  $\varphi$  в (1.9) и соберем члены одинакового порядка относительно  $s$ ,  $c$  (где  $s = \sin \xi$ ,  $c = \cos \xi$ ).

Левая часть (1.9) будет представлять сумму однородных относительно  $s, c$  многочленов

$$Q_i = Q_{i0}s^i + Q_{i1}s^{i-1}c + \dots + Q_{ii}c^i \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

нулевого, первого и т. д. порядков. Прибавим к этой сумме разности

$$\Omega_i - \Omega_i(s^2 + c^2), \quad \Omega_i = \Omega_{i0}s^i + \Omega_{i1}s^{i-1}c + \dots + \Omega_{ii}c^i$$

Эти разности равны тождественно нулю в силу соотношения  $s^2 + c^2 = 1$ . Затем определим коэффициенты  $\Omega_{ik}$  через  $Q_{ik}$  таким образом, чтобы выражения  $Q_2 - \Omega_0(s^2 + c^2)$ ,  $Q_3 - \Omega_1(s^2 + c^2)$ , ... свертывались в соответствующие гармоники  $M_{k0} \sin k\xi + M_{k1} \cos k\xi$ . При этом, для того чтобы привести к нормальному виду вторую гармонику, надо ввести  $\Omega_0$ , третью — ввести  $\Omega_1$  и т. д. После того, как левая часть уравнения (1.9) будет преобразована в ряд Фурье, остается приравнять нулю его коэффициенты.

Получающаяся система уравнений будет бесконечной, и для практического рассмотрения ее надо обрывать. Если ограничиться рассмотрением  $i + 1$  гармоники и положить все  $\Omega$ , начиная с  $\Omega_{i+1}$ , равными нулю, то получим замкнутую конечную систему уравнений. Решение ее будет представлять решение рассматриваемой задачи в  $i$ -м приближении. Для того чтобы выписать такую систему, надо найти конкретные выражения для  $Q_{ik}$  через  $\varphi_{ik}$  путем разложения  $Q$  в ряд.

В первом приближении полагаем  $\Omega_k = 0$  ( $k = 2, 3, \dots$ ). Приравняв нулю коэффициенты первых двух гармоник и свободный член разложения левой части уравнения (1.9), приходим после некоторых преобразований к следующей системе:

$$\begin{aligned} r + \frac{3}{2}A\rho^2 &= 0 \\ 4(1 - \Lambda)\rho^{-2} + 3 + B - 12A\varphi_{20} - 4(13 + B)\varphi_{21} &= 0 \\ 4D\rho^{-2} + 3A - 12A\varphi_{21} + 4(13 + B)\varphi_{20} &= 0 \\ 2(4 - \Lambda)\varphi_{21} + D\varphi_{20} - \frac{1}{3}(3 + 2B) &= 0 \\ D\varphi_{21} - 2(4 - \Lambda)\varphi_{20} - \frac{3}{2}A &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Неизвестными здесь будут  $\rho$ ,  $\varphi_{20}$ ,  $\varphi_{21}$  и любые два параметра из четырех:  $R_0, R, z, n$ . Введем величины  $t, s, w$  соотношениями

$$t = 3 - z, \quad w^{-1} = t^{-1}(1 - R/R_0), \quad s = \Lambda - 1 \quad (2.3)$$

и примем в качестве неизвестных  $A$  и  $w$ , а  $t$  и  $s$  будем считать заданными. Из первого уравнения (2.2) находим

$$\rho^2 = \frac{2}{3}t/w \quad (2.4)$$

Исключая из четырех оставшихся уравнений  $\varphi_{20}$ ,  $\varphi_{21}$ , получим уравнения для определения  $A$  и  $w$

$$\begin{aligned} 18(2 - s)w^2 - [63 + 6s + 18B - (3 + B)t + 18(3 - t)(2 - s)] \times \\ \times w - t(3 - t)(3 + B) = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} 6[3 - t/w(3 - t - w)(\frac{5}{2} - t - w)]A^2 - (21 + 2B)(3 + 2B) + \\ + 2(3 - s)(3 + B) - 12(3 - s)swt^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$B = \frac{(3 - t)^2}{15 - 18t + 5t^2} (1 + s)$$

Если теперь задать значения  $t$  и  $s$ , то из (2.5) легко найти  $w$ , а затем из (2.6) и (2.4) находим  $A$  и  $\rho^2$ .

При помощи выписанных выше соотношений (1.9), (2.3) легко найти выражения для всех физических параметров через  $t, s, A, w$ :

$$\begin{aligned} 45^3 \gamma R_0^{-1/3} &= (1+s)^{-3} (1+t/w)^6 A^2 (5t^2 - 18t + 15)^3 \\ n^3 &= R_0^{2/3} / \gamma A, \quad R = R_0 (1 - t/w), \quad a_0^3 = R_0 v^2 / g \\ \omega &= (3-t) R v / 3a_0, \quad \lambda = 2\pi a_0 / n \end{aligned} \quad (2.7)$$

Как видно из (2.4), действительные решения рассматриваемой задачи существуют при  $t/w > 0$ . Из (2.5) следует, что если  $t, s$  не слишком велики, то  $w$  будет положительным, и поэтому должно быть  $t > 0$ . Вспоминая определение  $t$ , находим, что отношение  $z$  скорости распространения волн к средней скорости жидкости всегда меньше 3. Полностью область существования волновых режимов в плоскости  $t, s$  определим, если учтем, что всегда должны выполняться неравенства  $\infty > A^2 \geq 0$ .

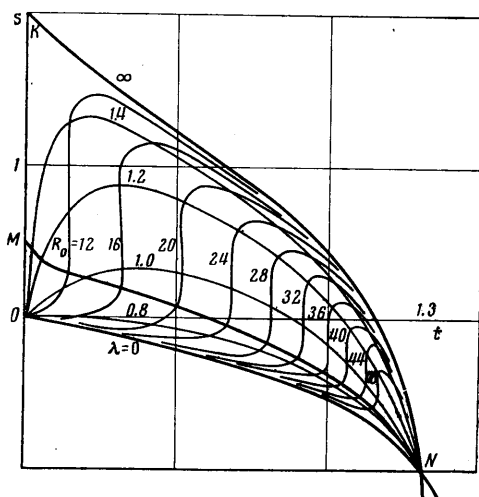
Предельные значения  $A^2$ , в соответствии с (2.6), достигаются на линиях, уравнения которых

$$\begin{aligned} 3 - t/w (3 - t - w)^{5/2} - t - w &= 0 \\ (21 + 2B)(3 + 2B) - 2(3 - s)(3 + B) - 12(3 - s)sw/t &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Эти линии изображены на фиг. 1. Заключенные между ними и осью  $t = 0$  значения  $t$  и  $s$  являются допустимыми, т. е. при любых из этих значений периодическое решение уравнения (1.9) в первом приближении существует и может быть рассчитано при помощи соотношений (2.4) — (2.7). Вся область существования состоит из двух частей, имеющих общую точку с координатами  $t = 1.3101, s = -1$ , в которой пересекаются граничные кривые. Часть области правее этой точки представляет очень узкий двугрульник, вторая вершина которого имеет координаты  $t = 1.4908, s = -\infty$ .

Заключенные в ней значения  $t, s$  соответствуют большим расходам; для сравнения с экспериментальными данными они не используются и поэтому подробно не рассматриваются.

Каждое периодическое решение можно охарактеризовать числом  $R_0$  и длиной волны  $\lambda$ ; на фиг. 1 ему соответствует точка пересечения линий постоянных значений  $R_0$  и  $\lambda$ . Все линии  $R_0 = \text{const}, \lambda = \text{const}$  начинаются в точке  $O$  и проходят через точку  $N$ . Решения, изображаемые точкой  $O$ , имеют нулевую амплитуду. По существу именно они рассматривались в работе [1], а решения, построенные в работе [4], изображаются отрезком оси  $s = 0$ , начинающимся в  $O$ . Эти решения ограничены значением  $R = 14,75$ , которое получается при  $t \rightarrow +0$ . Часть оси  $s$  от  $O$  до  $K$  соответствует нулевому расходу.



Фиг. 1

чением  $R = 14,75$ , которое получается при  $t \rightarrow +0$ . Часть оси  $s$  от  $O$  до  $K$  соответствует нулевому расходу.

Для малых значений  $t$  и  $s \neq 0$ , т. е. малых расходов, нетрудно получить приближенные выражения для всех параметров задачи, если ограничиться первыми членами разложений по  $t$

$$R^{1/3} = +27\gamma \frac{30}{101} \frac{(1+s)^3(1-1/2s)}{s(3-s)(1-62/303s)} t$$

$$a_0 = \left(\frac{v^2}{g}\right)^{1/3} R^{1/3}, \quad \lambda = 2\pi \left(\frac{v^2}{g}\right)^{1/3} \frac{1}{\omega} R^{-1/2}, \quad \omega = v \left(\frac{v^2}{g}\right)^{-1/3} R^{2/3} \quad (2.9)$$

$$n = dR^{5/6}, \quad d \pm [3\gamma(1+s)]^{-1/2}.$$

Все периодические решения при заданном  $R_0$  изображаются на фиг. 1 линией  $R_0 = \text{const}$ . С ростом расстояния  $l$  от точки  $O$  вдоль каждой из этих линий амплитуда  $\rho$  монотонно возрастает, а число  $R$  вначале возрастает, затем уменьшается. В точке, где  $R$  достигает максимума, обращается в нуль производная  $\partial R / \partial l$ . Так как  $R_0$  и  $R$  — функции  $t$  и  $s$ , то это условие можно записать как

$$\frac{\partial R}{\partial t} \frac{\partial R_0}{\partial s} - \frac{\partial R}{\partial s} \frac{\partial R_0}{\partial t} = 0 \quad (2.10)$$

Вместо  $R$  и  $R_0$  введем  $w$  и  $A$ , тогда условие (2.10) можно представить в виде

$$\frac{1}{A^2}(1+s) \left[ \frac{\partial A^2}{\partial s} + \frac{t}{w} \left( \frac{\partial A^2}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial A^2}{\partial s} \right) \right] + 3 \frac{t}{w} \frac{\partial w}{\partial t} -$$

$$- 3 - 6 \frac{t}{w} \frac{9-5t}{5t^2-18t+15} (1+s) \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad (2.11)$$

Здесь производные находятся при помощи (2.5), (2.6). Множество всех таких точек составляет линию  $MN$  на фиг. 1. В силу симметрии уравнения (2.10), на этой линии достигается также минимальное значение  $R_0$  при заданном  $R$ . Таким образом,  $MN$  — линия оптимальных периодических решений. Вдоль нее значение  $R$  монотонно возрастает:  $R = 0$  при  $t = 0$  и  $R = 95$  при  $t = 1.282$ . Расчет этих решений можно проводить путем совместного решения уравнений (2.5), (2.6), (2.11); результаты расчетов представлены в таблице.

Для того чтобы судить о точности построенного решения, рассмотрим второе приближение. Положим  $\Omega_i = 0$  ( $i = 3, 4, \dots$ ) и приравняем нулю первые семь коэффициентов ряда Фурье для левой части уравнения (1.9). Если ввести переменные  $t, s, w, A^2$ , как сделано в первом приближении, то после громоздких выкладок получаем уравнения для  $A^2$  и  $w$

$$6(3+\delta_0)(2-s)w^2 - [63+18B+6s-(3+B)t+6(3-t)(3+\delta_0) \times$$

$$\times (2-s) - 6\delta_1 - (21+2B)\delta_2]w - t(3-t)(3+B) = 0^* \quad (2.12)$$

$$(21+2B)(3+2B-\delta_1) - 2(3-s)(3+B) + 4(3-s)(3+\delta_0)swt^{-1} -$$

$$- 6\{3-\delta_2-tw^{-1}(3-t-w)[(1+1/3\delta_0)(3-t-w)-1/2]\}A^2 = 0$$

$$\delta_0 = 2\rho^2[4^{-1}A^{-1}(18+B)\varphi_{20} - 3/4\varphi_{21} + 3/2\varphi_{20}^2 - 6A^{-1}\varphi_{20}\varphi_{21} + 3/2\varphi_{21}^2]$$

$$\delta_1 = 1/2\rho^2[-1+6A\varphi_{20}+4(12+B)\varphi_{21}+4(39+2B)\varphi_{30}-12A\varphi_{31}]$$

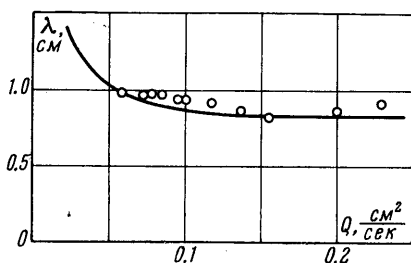
$$\delta_2 = \rho^2[-2A^{-1}(12+B)\varphi_{20}+3\varphi_{21}+6\varphi_{30}+2A^{-1}(39+2B)\varphi_{31}]$$

а коэффициенты разложения (1.9) выражаются следующим образом:

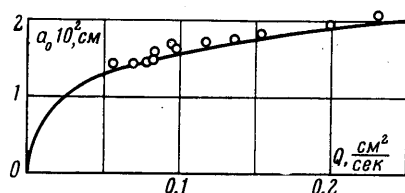
$$\begin{aligned} A^{-1}\varepsilon\varphi_{20} &= 1/2f(3 + 2B - \delta_1) - (3 - s)(3 - \delta_2) \\ \varepsilon\varphi_{21} &= (3 - s)(3 + 2B - \delta_1) + 1/2(3 - \delta_2)fA^2 \\ \varepsilon_1\varphi_{30} &= L_1fA^2 - 3(8 - s)L_2, \quad A^{-1}\varepsilon_1\varphi_{31} = 3(8 - s)L_1 + fL_2 \\ f &= -tw^{-1}(3 - t - w), \quad \varepsilon = (fA)^2 + 4(3 - s)^2, \quad \varepsilon_1 = 9(8 - s)^2 + (fA)^2 \\ L_1 &= 1/4[1 + 6(9 + 2B)A^{-1}\varphi_{20} - 12\varphi_{21}] \\ L_2 &= 1/4[-(3 + B) + 12A\varphi_{20} + 6(9 + 2B)\varphi_{21}] \end{aligned}$$

Если здесь положить  $\delta_0 = 0$ ,  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0$ , то получим рассмотренные выше уравнения первого приближения.

Выведенные соотношения удобно использовать для расчетов итерациями. Во втором приближении множество допустимых значений  $t$ ,  $s$  изменится, и в некоторой части изображенной на фиг. 1 области решение уравнений (2.12) существовать не будет, а в случае, когда решения в обоих приближениях существуют, степень различия между ними будет неодинаковой в разных частях этой области.

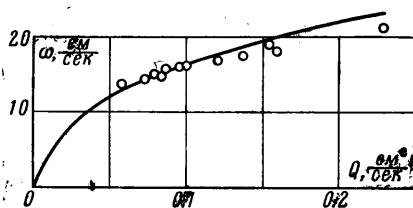


Фиг. 2

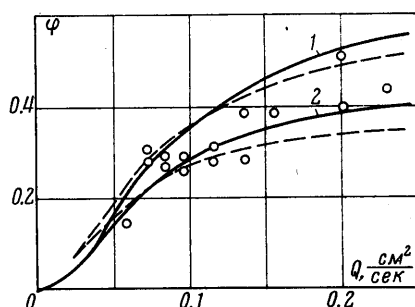


Фиг. 3

Как показывают расчеты, при значениях  $R$  порядка 30 различие между первым и вторым приближениями для оптимальных режимов по всем параметрам совершенно ничтожно. Оно возрастает в сторону малых и особенно больших расходов. При значениях  $R$  порядка 50 это различие составляет около 10%. Если построить графики зависимости  $a_0$ ,  $\lambda$ ,  $\omega$  от рас-



Фиг. 4



Фиг. 5

хода для значений  $s$ ,  $t$ , лежащих на линии  $MN$ , как сделано на фиг. 2—4, то получаются практически совпадающие кривые. Различие в форме волны и, в частности, в значениях наименьшей и наибольшей амплитуды колебаний, заметно в большой степени. Это различие можно видеть на фиг. 5, где сплошные линии соответствуют первому, а пунктирные — второму приближению (1 — подножие волны, 2 — гребень волны).

3. Применим построенные решения к объяснению экспериментальных данных, имея в виду главным образом результаты работы [2]. Прежде всего отметим, что уравнение (1.9), периодические решения которого исследовались, получено из исходной системы уравнений с определенными упрощениями, поэтому оно описывает волновые движения вязкой жидкости в тонком слое приближенно. О точности можно судить по сравнению с данными опыта, однако некоторые соображения можно высказать заранее. При малых  $\lambda$ , сравнимых с толщиной слоя  $a_0$ , точность будет хуже, так как при этом использованное приближение пограничного слоя становится неверным. При очень больших  $\lambda$  профиль волны имеет сложную форму, как показывают расчеты, и представление его двумя или даже тремя гармониками ряда Фурье является неточным; в этом случае недостаточно точным оказывается примененный метод решения. Поэтому случаи больших и малых длин волн следует исключить из рассмотрения. Как видно на фиг. 1, линии постоянных значений  $\lambda$  накапливаются к границам области существования, вблизи которых плотность их резко возрастает. Основная часть этой области заключена между линиями  $\lambda = 0,7$  см и  $\lambda = 1,4$  см; для волновых режимов, соответствующих этой части области, проведенные упрощения являются наиболее обоснованными.

Теоретически при заданном расходе существует бесконечное множество волновых режимов, которые различаются длинами волн, и заранее нет указаний на то, какой из них будет наблюдаться в эксперименте. В действительности оказывается, что если не принимать специальных мер, то волновое течение жидкого слоя бывает нестационарным и одновременно наблюдаются волны разной длины. Ярко выраженное периодическое движение осуществляется только в том случае, если на течение накладывают периодические возмущения вполне определенной для заданного расхода частоты. При этом каждому расходу можно поставить в соответствие свою длину волны. Эксперимент не показывает, чем отличается эта длина волны от других и почему из бесконечного множества возможных режимов реализуется именно этот. Теоретическое же рассмотрение приводит к выводу, что среди всех возможных режимов действительно существуют в определенном смысле исключительные — это оптимальные режимы. Естественно предположить, что именно эти режимы наблюдаются в эксперименте. На фиг. 2 (и на остальных фигурах) сплошной кривой показана теоретическая зависимость длины волны от расхода, а точками — результаты опытов [2]. Близкое соответствие теоретических и опытных данных свидетельствует, что предположение об оптимальных режимах будет правильным или очень близким к истине.

Оптимальные режимы на фиг. 1 изображаются точками линии  $MN$ . Они существуют в большом диапазоне расходов от  $R = 0$  до  $R \approx 100$ . Наблюдавшиеся на опыте [2] режимы занимают лишь часть этого диапазона примерно от  $R = 20$  до  $R = 60$ , т. е. область средних расходов. Сравнение теоретических и экспериментальных данных проводится на фиг. 3—5. Хорошее соответствие получается по значениям средней толщины (на фиг. 3 нанесены значения  $1,07 a_0$ , так как экспериментальные точки изображают величину  $1,07 \cdot \frac{1}{2}(a_{\max} + a_{\min})$ ) и скорости распространения волн и несколько хуже по значениям амплитуды, хотя почти все экспериментальные точки попадают в полосу между максимальной и минимальной амплитудами или располагаются очень близко. В целом это сравнение подтверждает достаточно хорошую точность построенного решения.

Поступило  
14 10 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

- Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Ж. эксперим. и теор. физ., 1948, т. 18.
- Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. Ж. эксперим. и теор. физ., 1949, т. 19.
- Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
- Маурин Л. Н., Сорокин В. С. О волновом течении тонких слоев вязкой жидкости, ПМТФ, 1962, № 4.