

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ГАЗОВОГО ПУЗЫРЯ В ПОЛЕ ПЕРЕМЕННОГО ДАВЛЕНИЯ

Е. М. ЧЕРНЫХ

(Воронеж)

Проблеме устойчивости ускоренного движения сферической поверхности раздела двух жидкостей посвящено небольшое число работ, из которых укажем [1-5]. В настоящей работе рассматривается задача об устойчивости радиального движения сферической границы газового пузыря в несжимаемой невязкой жидкости под действием переменного внешнего давления. Поверхностное натяжение не принимается во внимание. Исследуется возможность существования устойчивых движений для широких классов зависимостей внешнего давления от времени, а именно — для монотонной и периодической зависимостей. Доказывается, что устойчивость возможна только для бесконечно больших радиусов пузыря или очень частных предположений относительно начальных условий и закона зависимости давления от времени.

Следуя [1], невозмущенное радиальное движение сферической границы полости, заполненной газом, под действием переменного давления запишем в виде

$$R(t) \frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{\rho_2 - \rho_1} \quad (1)$$

Здесь R — переменный радиус сферической полости; ρ_1 — плотность газа или пара, заключенного в полости; ρ_2 — плотность окружающей жидкости; p_1 — давление жидкости на поверхности сферической полости; p_2 — давление на бесконечности в потоке, окружающем полость.

Предполагая, что малые возмущения сферической поверхности могут быть разложены в ряд по сферическим гармоникам, будем искать решение уравнения (1) в виде

$$R = R(t) + a(t) J_n \quad (2)$$

Здесь $a(t)$ — амплитуда сферической гармоники, J_n — сферическая гармоника порядка n . Предполагается, что в любой момент времени

$$|a(t)| \ll R(t) \quad (3)$$

В линейной постановке задачи устойчивости высшими степенями $a(t)$ можно пренебречь.

Подставляя (2) в (1) и учитывая, что $R(t)$ удовлетворяет уравнению (1), получим уравнение, определяющее развитие $a(t)$ во времени, в виде [5]

$$\frac{d^2 a}{dt^2} + \frac{3}{R} \frac{dR}{dt} \frac{da}{dt} - Aa = 0 \quad (4)$$

$$\left(A = \frac{n(n-1)\rho_2 - (n-1)(n-2)\rho_1}{R[n\rho_2 + (n+1)\rho_1]} \frac{d^2 R}{dt^2} \right)$$

Пренебрегая отношением ρ_1/ρ_2 по сравнению с единицей, получим для A выражение

$$A = (n-1) \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dt^2}$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad \tau = \frac{t}{T}, \quad x = \frac{a/a_0}{R/R_0}, \quad P(\tau) = \frac{P_1 - P_2 T^2}{\rho_2 R_0^2}$$

Здесь R_0 — начальный радиус сферы, a_0 — начальное возмущение, T — характерное время, x — относительная амплитуда, r и τ — безразмерные радиус и время.

Уравнение невозмущенного движения (1) примет вид

$$r''(\tau) + 3/2 r^2(\tau) = P(\tau) \quad (5)$$

Для безразмерных возмущений $x(\tau)$ получим уравнение

$$x''(\tau) + 5 \frac{r'(\tau)}{r(\tau)} x'(\tau) + \left[(2-n) \frac{r''(\tau)}{r(\tau)} + 3 \frac{r^2(\tau)}{r^2(\tau)} \right] x(\tau) = 0 \quad (6)$$

Здесь и далее точками обозначено дифференцирование по τ . Предполагая непрерывность функции $r'(\tau)/r(\tau)$, уравнение (6) при помощи замены зависимой переменной

$$y(\tau) = x(\tau)r^{5/2}(\tau) \quad (7)$$

приведем к виду

$$y''(\tau) + J(\tau)y(\tau) = 0, \quad J(\tau) = - \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{r''(\tau)}{r(\tau)} + \frac{3 r^2(\tau)}{4 r^2(\tau)} \right] \quad (8)$$

При помощи замены переменной

$$u(\tau) = r^{4n+5}(\tau) \quad (9)$$

можно из (8) получить для определения $J(\tau)$ уравнение

$$u'' + \alpha_n^2 J(\tau)u = 0. \quad (10)$$

$$\alpha_n^2 = \frac{4n+5}{(2n+1)^2} \leq 1 \quad (n > 0)$$

Очевидно, что $\alpha_n^2 \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Заметим, что как только по заданным $P(\tau)$ и соответствующим начальным условиям решение для $r(\tau)$ уравнения (5) будет найдено, то сразу же можно найти $J(\tau)$ из (8) — (10). Решение уравнения (8) даст тогда ответ на вопрос, устойчивы ли возмущения для полученной зависимости $J(\tau)$. Таким образом, задача устойчивости сводится к совместному исследованию двух уравнений (8) и (10).

Предварительно сделаем следующее замечание о критериях устойчивости. Обычно считают [1, 5] устойчивыми такие возмущения $a(t)$, для которых

$$x = \frac{a/a_0}{R/R_0} \rightarrow 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty \quad (11)$$

Такое определение устойчивости теряет смысл при $R \rightarrow \infty$, так как допускает и такие значения $a(t)$, что $a/a_0 \rightarrow \infty$, хотя при этом $x(\tau)$ может стремиться к нулю. Кажется более естественным при $R \rightarrow \infty$ считать устойчивыми те возмущения, для которых $a/a_0 \rightarrow 0$. Однако рассмотрение задачи устойчивости при $R \rightarrow \infty$ имеет лишь теоретический интерес. Поэтому, рассматривая в дальнейшем лишь ограниченные R , примем следующий критерий устойчивости: возмущения асимптотически устойчивы, если при $\tau \rightarrow \infty$ величина $x(\tau) \rightarrow 0$; возмущения устойчивы, если $|x(\tau)| < \varepsilon$ для всех τ , где ε — любое положительное число; возмущения неустойчивы, если $|x(\tau)| \rightarrow \infty$. Пусть $r \leq r_*$. В силу (7), устойчивым движениям будут соответствовать ограниченные нетривиальные решения уравнения (8), удовлетворяющие условию $|y(\tau)| < \varepsilon r_*^{5/2}$. Так как всегда $r > 0$, то решения $u(\tau)$ уравнения (10) с учетом (9) должны быть положительными.

В дальнейшем будем искать такие зависимости $J(\tau)$, которые давали бы ограниченные решения уравнения (8) и положительные ограниченные решения уравнения (10) для любого n .

Будем предполагать, что зависимость $J(\tau)$ непрерывная, так что уравнение (8) имеет [6, 7] два фундаментальных линейно-независимых решения $y_1(\tau)$ и $y_2(\tau)$. Общее решение представляется линейной комбинацией $y(\tau) = C_1 y_1(\tau) + C_2 y_2(\tau)$, где C_1, C_2 — постоянные, которые можно определить из начальных условий $y(0) = 1, y'(0) = y_0$.

Отметим, что для фундаментальных решений уравнения (8) имеют место следующие теоремы [6, 7].

Теорема 1. При непрерывной непериодической $J(\tau)$ такой, что для всех τ

$$\int_0^{\infty} |J(\tau)| d\tau = \infty, \quad J(\tau) \leq 0, \quad J(\tau) \neq 0$$

уравнение (8) будет иметь единственное решение $y \equiv 0$, ограниченное для всех τ ; каждое ненулевое решение уравнения (8) имеет не больше одного нуля в интервале $0 \leq \tau < \infty$.

Теорема 2. Если $J(\tau)$ непрерывна на всей оси τ и удовлетворяет условию

$$0 < M^2 \leq J(\tau) \quad (12)$$

то любое решение уравнения (8) имеет бесконечное множество нулей в интервале $0 \leq \tau < \infty$. Если, кроме того, $J(\tau)$ — неубывающая функция и $J(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$, то любое решение уравнения (8) ограничено.

Воспользуемся этими теоремами для совместного исследования уравнений (8) и (10) в следующих двух случаях: когда $J(\tau)$ — монотонна или $J(\tau)$ — периодическая функция.

Пусть $J(\tau)$ — монотонна. Существование ограниченных (устойчивых) решений уравнения (8) возможно лишь при условии (12), выполнение которого влечет за собой выполнение неравенства $\alpha_n^2 J(\tau) \geq \alpha_n^2 M^2 > 0$ при всех n . В таком случае, в силу теоремы 2, решения для $u(\tau)$ уравнения (10) будут осциллирующими. Из (9) видно, что и $r(\tau)$ будет осциллирующим вокруг значения $r = 0$, что физически бессмысленно, так как всегда $r > 0$.

Таким образом, любая сферическая гармоника $a(t)J_n$ неустойчива, т. е. неустойчива сферическая форма пузыря.

Следует отметить, что этот результат справедлив только для ограниченных r . Предполагая, что $r \rightarrow \infty$, уже нельзя требовать для устойчивости $x(\tau)$ ограниченности $y(\tau)$. Тогда возможен случай $J(\tau) \leq 0$ и $\alpha_n^2 J(\tau) \leq 0$. По первой теореме решение уравнения (8) будет иметь не более одного нуля, и подходящим выбором начального условия $r'(0) = r_0$ можно добиться того, что $r(\tau)$ будет положительным в любой момент времени τ .

В силу той же теоремы, $r(\tau)$ не может быть ограниченным при $\tau \rightarrow \infty$, т. е. устойчивость возможна (но не гарантируется из-за произвола в выборе начальных условий) лишь при $r \rightarrow \infty$. Этот результат согласуется с численными расчетами в работах [1-5], выполненных для монотонной зависимости давления от времени. Отметим, что монотонность $P(\tau)$ влечет за собой, вообще говоря, монотонность функции $J(\tau)$. В частности, при $P(\tau) \equiv \text{const}$ предыдущие результаты остаются справедливыми.

Далее исследуются возмущения сферической полости, на которую действует пульсирующее давление. При этом можно ограничиться классом таких функций $P(\tau)$, которые дают для $r(\tau)$ из (5) пульсирующие решения гармонического или затухающе-возрастающего типа. Тогда, очевидно, функция $J(\tau)$ будет также пульсирующей. В дальнейшем функция $J(\tau)$ будет предполагаться периодической с периодом 2π . Если $J(\tau)$ представить в виде $J(\tau) = \lambda + \gamma \Phi(\tau)$, где λ, γ — параметры, $\Phi(\tau)$ — ограниченная, дважды дифференцируемая, вещественная, периодическая функция с периодом 2π , осциллирующая вокруг значения $\Phi = 0$, такая, что

$$\max |\Phi(\tau)| = \min |\Phi(\tau)| = 1, \quad \int_0^{2\pi} \Phi(\tau) d\tau = 0$$

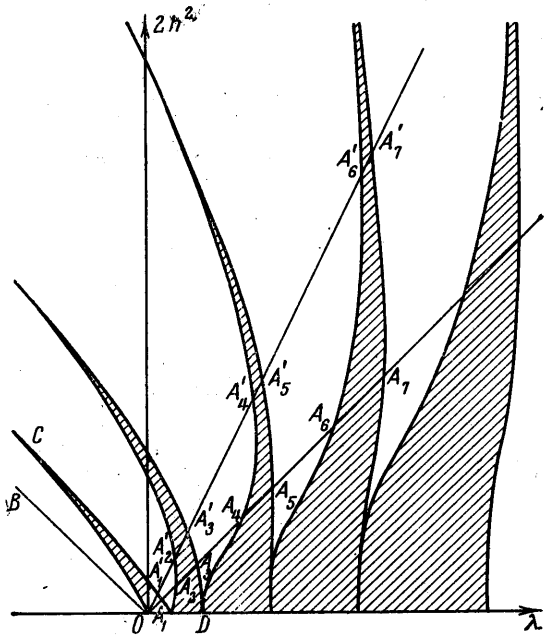
то уравнения (8) и (10) обращаются в систему известных уравнений Хилла [8-10]. Частным случаем уравнения Хилла является уравнение Матье [8]

$$y''(\tau) + (\lambda - 2h^2 \cos 2\tau)y(\tau) = 0 \tag{13}$$

Учитывая, что общий характер решений уравнения Матье такой же, как и для уравнения Хилла, можно в вопросе об устойчивости ограничиться лишь уравнением Матье (13). Полученные результаты легко обобщить и для уравнения Хилла.

По теореме Флоке [6, 9], уравнение Матье допускает фундаментальные решения, удовлетворяющие функциональному уравнению $\sigma y(\tau) = y(\tau + 2\pi)$. Фундаментальные решения устойчивы или неустойчивы в зависимости от того, какое из неравенств выполняется: $|\sigma| < 1$ или $|\sigma| > 1$. При $|\sigma| = 1$ решения периодические.

Характер решений уравнения Матье зависит от значений параметров λ, h^2 . Плоскость λh^2 разбивается на зоны устойчивых и неустойчивых решений. На фигуре, заимствованной из [8], представлена диаграмма Айнса — Стрэтта зон устойчивости для уравнения (8), в котором $J(\tau) = \lambda - 2h^2 \cos 2\tau$. Области, соответствующие устойчивым решениям, на диаграмме покрыты штриховкой, области неустойчивости незаштрихованы. Граничные кривые, разделяющие зоны, дают те значения λ и h^2 , для которых решения уравнения Матье периодические. Приближенные уравнения граничных кривых можно найти в работе [10].



Для уравнения (10) диаграмма Айнса — Стрэтта получается преобразованием подобного сжатия диаграммы для уравнения (8) в α_n^2 раз.

Так как решения уравнений (10) по физическому смыслу должны быть положительными и ограниченными (исключается случай $r \rightarrow \infty$, который, как и для монотонной $J(\tau)$, может привести к устойчивости), то $J(\tau)$, в соответствии с теоремой 2, не может быть положительной. Поэтому $\lambda - 2h^2 \cos 2\tau \leq 0$ при всех τ , т.е. $\lambda \leq |2h^2|$, что на диаграмме (фигура) соответствует области между лучами OB и OA_1 . Итак, в случае периодической $J(\tau)$ сферическая форма полости может быть устойчива лишь при таких λ, h^2 , для которых параметры $\lambda, h^2, \alpha_n^2 \lambda, \alpha_n^2 h^2$ при любом n находятся выше лучей $\lambda = |2h^2|$ в зонах устойчивости, соответствующих каждому n . Иначе говоря, устойчивость возможна лишь тогда, когда точка (λ, h^2) из зоны устойчивости на фигуре в результате подобного сжатия в α_n^2 раз снова попадает в зону устойчивости на диаграмме, соответствующей выбранному n , причем для всех n от 0 до ∞ .

Можно, однако, показать, что для любых λ и h^2 , выбранных из произвольной зоны устойчивости, за исключением зоны OA_1C , всегда можно

указать такой номер n , что соответствующая ему сферическая гармоника u_n будет неустойчива.

Вначале достаточно убедиться в этом для λ и h^2 , выбранных на луче OA_1A_2 из интервалов устойчивости A_2A_3 , A_4A_5 и т. д. Легко доказать, что при преобразовании сжатия с коэффициентом α_n^2 любая точка указанных интервалов для некоторого n отображается в интервал неустойчивости A_1A_2 . Пусть длина отрезка OA_1 есть a , а отрезка OA_2 — b . Опуская расчет координат точек A_1 , A_2 и т. д., укажем, что

$$1 < a < 1.4; \quad 3 < b < 4 \quad (14)$$

Пусть z означает длину отрезка от O до исследуемой точки из интервалов A_2A_3 , A_4A_5 и т. д. Очевидно, что $z > 3$. Чтобы точка z попала между a и b при преобразовании подобия с коэффициентом α_n^2 , необходимо, чтобы выполнялись неравенства $z/b \leq \alpha_n^{-2} \leq z/a$. С учетом (14) это неравенство будет выполнено, если $1/3z \leq \alpha_n^{-2} \leq z/1.4$. Отсюда, учитывая (10), для любого $z > 3$ можно сразу указать номер n , для которого точка z отображается в точку из интервала неустойчивости A_1A_2 . Например, для интервала A_2A_3 достаточно взять $n = 2$.

Наконец, если заметить, что интервалы устойчивости $A_2'A_3'$, $A_4'A_5'$ и т. д. на произвольном луче $OA_2'A_3'$ имеют длину, меньшую, чем соответственно A_2A_3 , A_4A_5 и т. д., то станет очевидно, что для любых λ , h^2 из зон устойчивости, кроме OA_1C , всегда найдется такой номер n , что соответствующие $\alpha_n^2\lambda$ и $\alpha_n^2h^2$ попадут в зону неустойчивости. Соответствующее решение уравнения (10) будет неустойчивым, а значит, будет неустойчива сферическая форма полости вообще.

В случае же, когда точка (λ, h^2) выбирается из зоны устойчивости OA_1C , прилегающей непосредственно к началу координат, преобразование подобного сжатия отображает область OA_1C в ее часть, т. е. опять в зону устойчивости (для любого n). Следует заметить, что здесь λ и h^2 малы, так что $|J(\tau)| < 1$ и $|\alpha_n^2 J(\tau)| \ll 1$ для больших n . Этот случай может быть реализован лишь при очень жестких ограничениях на закон изменения внешнего давления во времени, т. е. для весьма частных движений сферической границы полости. Кроме того, при $J(\tau) \leq 0$ решения уравнений вида (10) могут иметь нули. Исключить обращение в нуль $r(\tau)$ можно лишь подходящим выбором начальной скорости $r'(0) = r_0$. Причем начальная скорость должна быть такой, чтобы решения уравнения (10) не обращались в нуль для любого n от 0 до ∞ .

Таким образом, в случае пульсирующего внешнего давления, устойчивость сферической формы газового пузыря возможна лишь при весьма частных начальных условиях и ограничениях на зависимость давления от времени.

Поступило
14 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Birkhoff G. Stability of spherical Bubbles. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 13, No. 4.
2. Plesset M. S. On the stability of Fluid Flow with spherical Symmetry. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 1.
3. Plesset M. S., Mitchell T. P. On the stability of the spherical shape of vapor cavity in a liquid. Quart. Appl. Math., 1956, vol. 13, No. 4.
4. Keshava K. Murthy. The Effect of Viscosity and Surface Tension on the Taylor Justability of the Surface of a Cavitation Bubble, 1962, vol. 5, No. 3.
5. Перник А. Д. Проблемы кавитации. Судпромгиз, 1963.
6. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Изд. 2-е, ч. 1, 2, Физматгиз, 4.1 — 1962, 4.2 — 1963.
7. Сансонне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Изд. иностр. лит. т. 1 — 1953, т. 2 — 1954.
8. Стрэтт М. Д. О. Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике. Гос. научн.-техн. изд., 1935.
9. Бондаренко Г. В. Уравнение Хилла и его применение в области технических колебаний. Изд-во АН СССР, 1936.
10. Каудерер Г. Нелинейная механика. Изд. иностр. лит., 1961.