

УВЕЛИЧЕНИЕ ТЯГИ СОПЛА ВРАЩЕНИЕМ ПОТОКА

И. Н. НАУМОВА, Ю. Д. ШМЫГЛЕВСКИЙ

(Москва)

До последнего времени при построении оптимальных сверхзвуковых осесимметричных сопел рассматривались движения газа без вращения вокруг оси. Этот вопрос для равновесных течений газа в работах [1-6] изучен с достаточной полнотой. Отказ от вращения потока является ограничением, которое может снизить тягу сопла при прочих равных условиях. Легко показать, что при нулевой длине или длине, позволяющей получить равномерный поток на выходе, максимальную тягу обеспечивает именно равномерный поток, параллельный оси сопла. Если ограничение длины не позволяет этого сделать, то использование произвола во вращении газа может увеличить тягу сопла. На простейшем примере здесь показано, что такая возможность реализуется.

Осесимметричное изоэнергетическое изэнтропическое движение совершенного газа описывается системой уравнений

$$\frac{\partial r \rho u}{\partial x} + \frac{\partial r \rho v}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

$$\rho = a^2 / (\kappa - 1), \quad a^2 = \frac{\kappa - 1}{2} \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - u^2 - v^2 - \frac{\gamma^2(\psi)}{r^2} \right) \quad (1)$$

$$d\psi = r\rho(udr - vdx)$$

Здесь x, r — декартовы координаты в меридиональной плоскости течения, отнесенные к некоторому линейному размеру l ; u, v — составляющие скорости, отнесенной к критической скорости a_* , соответственно по осям x, r ; ρ — плотность газа, отнесенная к критической плотности ρ_* ; a — скорость звука, отнесенная к a_* ; γ — циркуляция, отнесенная к la_* ; ψ — функция тока, отнесенная к $l^2\rho_*a_*^2$; κ — показатель адиабаты газа.

Давление p , отнесенное к $\rho_*a_*^2$, и окружная составляющая скорости w , отнесенная к a_* , определяются равенствами

$$p = \frac{1}{\kappa} a^2 \kappa / (\kappa - 1), \quad w = \frac{\gamma(\psi)}{r} \quad (2)$$

Второе уравнение системы (1) может быть заменено уравнением

$$\frac{\partial}{\partial x} r(p + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial r} r\rho uv = 0 \quad (3)$$

Вдоль характеристик уравнений (1) выполняются соотношения

$$dr = \frac{v^2 - a^2}{uv \mp ab} dx, \quad b = \sqrt{u^2 + v^2 - a^2} \quad (4)$$

$$(av \pm ub) du + (-ua \pm vb) \left(dv + \frac{a^2 r^2 + \gamma^2}{a^2 r^2 - \gamma^2} \frac{v}{r} dr \right) = 0 \quad (5)$$

Верхний знак относится к первому семейству, нижний — ко второму.

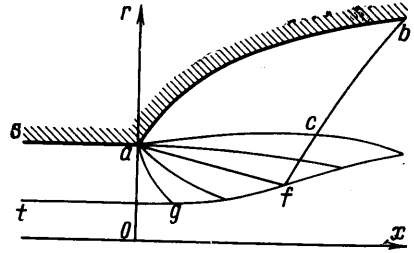
Имея в виду увеличение тяги сопла за счет вращения потока, рассмотрим простейшую задачу. Пусть поток газа (фигура) поступает в сопло с

образующей ab через цилиндрическую трубу с образующей sa . Пусть, далее, длина сопла $X = x_b - x_a$ задана. Заданы также расход газа и радиус Oa . Полная энтальпия газа $(\kappa + 1)/2(\kappa - 1)$ по условиям задачи постоянна. Среди всех возможных образующих сопла ab необходимо найти такую, которая обеспечивает максимальную тягу.

Радиус Oa примем равным l , тогда $r_a = 1$. Величину γ будем считать постоянной. В этом случае течение газа в меридиональной плоскости течения будет происходить вне некоторой линии tgf , ниже которой образуется застойная зона с постоянным давлением.

Если течение в трубе не зависит от x , то поток определяется равенствами

$$u = u_0 = \text{const}, \quad v = 0 \quad (6)$$



Для простоты будем полагать, что характеристики (4) во всей рассматриваемой области течения действительны.

Обозначим давление в застойной области около оси x и во внешней среде через p_∞ . Расход газа Q через трубу определяется интегрированием уравнения для ψ из (1) с учетом (6)

$$\frac{Q}{2\pi} = \left(\frac{\kappa - 1}{2}\right)^{1/(\kappa-1)} u_0 \int_{r_0}^1 \left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - u_0^2 - \frac{\gamma^2}{r^2}\right)^{1/(\kappa-1)} r dr \quad (7)$$

$$r_0 = \gamma \left[\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - u_0^2 - \frac{2}{\kappa - 1} (\kappa p_\infty)^{(\kappa-1)/\kappa} \right]^{-1/2}$$

где величина r_0 соответствует $p = p_\infty$ и определяется первым уравнением из (2). При заданных величинах Q и p_∞ уравнения (7) позволяют найти u_0 и r_0 . Характеристика второго семейства ag может быть построена с использованием равенств (4) и (6) при $r_0 \leq r \leq 1$.

Полная тяга сопла T определяется равенством

$$\frac{T}{2\pi} = \int_{r_0}^1 \left[\frac{\kappa + 1}{2\kappa} (1 + u_0^2) - \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \frac{\gamma^2}{r^2} \right] \rho r dr + \int_1^{r_b} p r dr - \frac{p_\infty}{2} (r_b^2 - r_0^2) \quad (8)$$

Первое слагаемое правой части этого равенства представляет реактивную силу потока в трубе sa , второе слагаемое дает интеграл сил давления по образующей ab , а третье слагаемое определяется противодавлением p_∞ .

Проинтегрируем уравнение (3) по области $agfba$ и перейдем по формуле Грина к контурному интегралу. Используя равенство (8), условие $d\psi = 0$ на gf и соотношение (4) на характеристике первого семейства, получим

$$\frac{T}{2\pi} = \int_{r_f}^{r_b} q(\mu, r) z(\mu, r) \left[\frac{\sin \mu}{\kappa} + \frac{\cos \vartheta}{\sin(\vartheta + \mu)} \right] r dr + \frac{p_\infty}{2} (r_f^2 - r_b^2) \quad (9)$$

$$\mu = \arcsin \frac{a}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \vartheta = \arctg \frac{v}{u}$$

$$a = \left[\frac{(\kappa - 1)h}{\kappa - \cos 2\mu} \right]^{1/2}, \quad z = \left(\frac{\kappa - 1}{2} h \frac{1 - \cos 2\mu}{\kappa - \cos 2\mu} \right)^{\frac{1}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1}}, \quad h = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} - \frac{\gamma^2}{r^2}$$

Аналогично первое уравнение из (1) с учетом (7) и (4) на характеристике первого семейства дает

$$\frac{Q}{2\pi} = \int_{r_f}^{r_b} \frac{\rho q \sin \mu}{\sin(\vartheta + \mu)} r dr \quad (10)$$

Длина сопла X с использованием равенств (4) на характеристиках ag и fb может быть выражена формулой

$$X = \int_{r_0}^1 \left\{ \frac{(\kappa + 1)(u_0^2 - 1)r^2 + (\kappa - 1)\gamma^2}{[\kappa + 1 - (\kappa - 1)u_0^2]r^2 - (\kappa - 1)\gamma^2} \right\}^{1/2} dr + \\ + x_f - x_g - \int_{r_f}^{r_b} \operatorname{ctg}(\vartheta + \mu) dr \quad (11)$$

Вариационная задача при заданной величине γ теперь может быть сформулирована следующим образом. Найти такие функции $\mu(r)$ и $\vartheta(r)$ на характеристике fb , которые реализуют максимум функционала (9) при изопериметрических условиях (10), (11), при дифференциальной связи (5) на характеристике первого семейства и при начальной характеристике ag , определяемой равенствами (6) и (7).

Функции $u(x, r)$, $v(x, r)$, $\rho(x, r)$ в области $agfba$ подчиняются уравнениям (1), известным условиям на ag , условиям $d\psi = 0$ и $p = p_\infty$ на gf и условиям на характеристике fb . Образующая сопла ab является линией тока $\psi = \psi_a$. Эта задача аналогична задаче построения оптимальной образующей сопла при $\gamma = 0$ и может быть решена тем же методом [7]. Избегая повторений, приведем окончательные результаты.

Образующая sab имеет в точке a излом. Течение в области $acfga$ определяется известной характеристикой ag , условием (5) для характеристики первого семейства в точке a при $dr = 0$ и уравнениями (1). Расчеты могут быть проведены методом характеристик.

Функции $\mu(r)$ и $\vartheta(r)$ на характеристике cb определяются равенствами

$$zq \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos \mu} = \lambda_1, \quad q \frac{\cos(\vartheta - \mu)}{\cos \mu} = \lambda_2 \quad (12)$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные величины. Их значения вычисляются по формулам (12) в точке c так, чтобы функции μ и ϑ в этой точке были непрерывны. Функция $x(r)$ на cb вычисляется интегрированием уравнения (4) для характеристики первого семейства при граничном условии $x(r_c) = x_c$.

Координаты x_c и r_c и величина r_b определяются из условия выполнения равенств (10) и (11) при заданных Q и X и равенства при $x = x_b$

$$qz \left(\frac{\sin \mu}{\kappa} - \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\cos \mu} \right) = p_\infty$$

которое является обобщением условия Буземана [1] на случай вращающихся потоков.

Это решение существует не при всех возможных комбинациях исходных величин κ , Q , X , γ . Для полного анализа следовало бы определить область его существования и построить вне этой области решения, может быть, того типа, который найден в работе [4]. Здесь такой анализ не проводится. В дальнейшем будут приведены примеры расчетов на основе указанного решения. Путь расчета соответствует расчету [7] при $\gamma = 0$.

Для полного анализа влияния функции $\gamma(\psi)$ на тягу сопла метод работ [1-4, 6, 7] неприемлем. Для построения сопла с максимальной тягой зависимость $\gamma(\psi)$ должна определяться на основе решения вариационной задачи, в которой $\gamma(\psi)$ является свободной функцией. В этом случае необходимо использование метода работы [5]. Вывод необходимых условий экстремума при неизменной $\gamma(\psi)$ сводится к повторению работы [6]. Варьирование $\gamma(\psi)$ проводится также без труда. Соответствующее условие экстремальности по γ здесь не приводится.

Если циркуляция γ принята постоянной во всем потоке, но ее величина находится из условия экстремума, то условие экстремальности упрощается, но остается малообозримым, а для расчетов с его использованием необходимо проводить дополнительные громоздкие вычисления множителей Лагранжа в области $agfa$. В то же время при $\gamma(\psi) = \text{const}$ экстремум по γ численно может быть найден значительно более простым путем. Если провести расчеты при различных значениях γ в соответствии с указанным выше решением, то это позволит найти значения T при выбранных X . Найденная таким образом зависимость $T(\gamma)$ при фиксированном X дает возможность численно найти максимальное значение T и соответствующую величину γ .

Расчеты проводились при $\kappa = 1.4$ при противодавлении $p_{\infty} = 0.0002259$. Величина $Q/2\pi$ была принята равной 0.3654, что соответствует $u_0 = 1.5$ при $\gamma = 0$. Длина сопел X и значения γ выбирались различными. Результаты расчетов сведены в таблицу. Из нее следует, что сопла с вращающимся потоком могут иметь тягу, превосходящую тягу сопел без вращения газа.

X	$\gamma = 0$		$\gamma = 0.3$		$\gamma = 0.4$		X	$\gamma = 0$		$\gamma = 0.3$		$\gamma = 0.4$	
	r_b	$T/2\pi$	r_b	$T/2\pi$	r_b	$T/2\pi$		r_b	$T/2\pi$	r_b	$T/2\pi$	r_b	$T/2\pi$
4	2.16	0.776	2.34	0.778	2.45	0.779	8	3.39	0.816	3.62	0.818	3.72	0.817
5	2.48	0.792	2.68	0.793	2.78	0.793	9	3.67	0.822	3.91	0.823	4.01	0.822
6	2.79	0.802	3.01	0.804	3.11	0.804	10	3.94	0.826	4.18	0.827	4.28	0.826
7	3.09	0.810	3.32	0.812	3.43	0.812	11	4.21	0.830	4.44	0.830	4.54	0.830

Для того чтобы проиллюстрировать разницу в распределении сил в соплах с вращающимся и невращающимся потоками, введем величину тяги I , создаваемой потоком в сечении Oa , и интеграл сил давления по стенке сопла J

$$I = \int_{r_0}^1 (p - p_{\infty} + \rho u^2) r dr, \quad J = \int_1^{r_b} (p - p_{\infty}) r dr$$

причем $T = 2\pi(I + J)$ в соответствии с формулой (8).

При $\gamma = 0$ имеем $I = 0.678$, $J = 0.098$, при $\gamma = 0.4$ имеем $I = 0.610$, $J = 0.169$, если $X = 4$. Эти числа показывают, что вклад величин I и J в величину T заметно перераспределяется в зависимости от γ .

Поступило 20 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Guderley G., Hantsch E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschallschubdüsen. Z. Flugwiss., 1955, September, 3, H. 9.
2. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики осесимметричных сверхзвуковых течений. ПММ, 1957, т. 21, вып. 2.
3. Rao G. V. R. Exhaust nozzle contour for optimum thrust. Jet Propulsion, 1958, 28, No. 6.
4. Шмыглевский Ю. Д. Вариационные задачи для сверхзвуковых тел вращения и сопел. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
5. Guderley K. G., Armitage J. V. A general method for the determination of best supersonic rocket nozzles. Paper presented at the symposium on extremal problems in aerodynamics. Boeing Scientific Research Laboratories. Flight Sciences Laboratory, Seattle, Washington, December 3-4, 1962 (русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. лит., Изд. иностр. лит., 1963, № 6).
6. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
7. Шмыглевский Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.