

РЕШЕНИЕ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В МГД-ГЕНЕРАТОРЕ

В. И. КОВБАСЮК, С. А. МЕДИН

(Москва)

Наиболее полное исследование и построение экстремальных режимов течения плазмы в канале МГД-генератора может быть выполнено при помощи методов вариационного исчисления. Вариационная задача о движении проводящего газа в магнитогидродинамическом канале впервые обсуждалась в работе [1]. Общая постановка задачи для МГД-генератора рассматривалась в [2]. Решения вариационных задач для частных случаев экстремальных течений даны в работах [2-5].

В данной работе получено решение вариационной задачи о течении плазмы с переменной проводимостью в МГД-генераторе, обладающем максимальной выходной мощностью при заданных длине или объеме канала. Выполнен анализ решения и проведено сравнение экстремальных течений с оптимизированным течением в генераторе с постоянными значениями электрического к.п.д. и числа Маха потока.

1. Рассмотрим стационарное течение невязкого и нетеплопроводного электропроводящего совершенного газа в канале идеально-секционированного МГД-генератора с произвольной схемой включения нагрузки. Пренебрегая краевыми эффектами и предполагая магнитное число Рейнольдса малым, систему уравнений, описывающих такое течение в квазиодномерном приближении, можно записать в виде

$$\rho u F = m, \quad \rho u \frac{du}{d\chi} + \frac{dp}{d\chi} = j_y B F^{-a} \quad (1.1)$$

$$\rho u \frac{d}{d\chi} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} RT + \frac{u^2}{2} \right) = (j_x E_x + j_y E_y) F^{-a}$$

$$j_x = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} [E_x - \beta(E_y - uB)], \quad j_y = \frac{\sigma}{1 + \beta^2} [(E_y - uB) + \beta E_x]$$

$$p = \rho RT, \quad \sigma = \sigma_1 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{\epsilon} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\xi}, \quad \beta = \beta_1 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{1/2} \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-1}$$

В уравнениях (1.1) использована общепринятая система обозначений и введена независимая переменная χ , определяемая как

$$d\chi = F^a dx \quad (a = 0, 1) \quad (1.2)$$

При $a = 0$ переменная χ представляет длину генератора, при $a = 1$ — объем. Выражение для мощности МГД-генератора может быть записано в форме

$$N = - \int_0^{\chi} (j_x E_x + j_y E_y) F^{1-a} d\chi = - m \int_0^{\chi} \frac{d}{d\chi} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} RT + \frac{u^2}{2} \right) d\chi \quad (1.3)$$

Требуется построить течение в канале МГД-генератора, удовлетворяющее уравнениям магнитной гидродинамики (1.1) и доставляющее максимум функционалу (1.3). Заметим, что сформулированная задача эквивалентна вариационной задаче о построении течения в генераторе, характеризующемся минимальными габаритами.

Будем искать решение данной вариационной задачи на условный экстремум методом множителей Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа

$$\Phi = -m \frac{d}{d\chi} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} RT + \frac{1}{2} u^2 \right) + \lambda g + \mu h + \nu k + \omega l \quad (1.4)$$

Здесь $\lambda, \mu, \nu, \omega$ — множители Лагранжа, g, h, k, l — соответственно связи (1.1.2) — (1.1.5), в которых сечение F , плотность ρ , проводимость σ и число Холла β исключены при помощи уравнений (1.1.1), (1.1.6) — (1.1.8). Уравнения Эйлера, которым должны удовлетворять экстремали функционала (1.3), имеют вид

$$\Phi_{y_i} - \frac{d}{d\chi} \Phi'_{y_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, 8) \quad (1.5)$$

где y_i — искомые функции $p, T, u, B, j_y, j_x, E_y$ и E_x .

Прежде чем перейти к анализу полной системы уравнений (1.1.2) — (1.1.5) и (1.5), описывающих экстремальное течение, рассмотрим три уравнения Эйлера, соответствующие функциям $y_i = j_x, E_y$ и E_x

$$-\mu E_x F^{-a} + \nu = 0 \quad (1.6)$$

$$-\mu j_y F^{-a} + \nu \frac{\sigma \beta}{1 + \beta^2} - \omega \frac{\sigma}{1 + \beta^2} = 0$$

$$-\mu j_x F^{-a} - \nu \frac{\sigma}{1 + \beta^2} - \omega \frac{\sigma \beta}{1 + \beta^2} = 0$$

Из (1.1.4), (1.1.5) и (1.6) следует, что

$$E_x - \beta(E_y - uB) = 0, \quad \text{или} \quad j_x = 0 \quad (1.7)$$

Таким образом, экстремальное течение характеризуется отсутствием продольного тока. Это условие удовлетворяется соответствующим выбором электрической схемы генератора и имеет место, например, в фарадеевском идеально-секционированном МГД-генераторе.

Анализ постановки вариационной задачи о течении плазмы в фарадеевском МГД-генераторе [1, 2, 6] показал, что эта задача является вырожденной. В данной задаче отсутствует двухсторонний экстремум по B . Так как плотность мощности генератора растет с увеличением индукции магнитного поля, и в то же время величина B ограничивается техническими возможностями современных магнитных систем, естественно принять B постоянным и равным максимально допустимому значению. Тогда, учитывая, что $j_x = 0$ и $B = \text{const}$, и исключая из уравнений движения (1.1.2) и энергии (1.1.3) величины j_y, E_x и E_y при помощи уравнений (1.1.5), (1.7) и определения электрического к.п.д. для фарадеевского МГД-генератора $\eta = E_y / uB$, запишем систему уравнений Эйлера в виде

$$(\lambda + \mu \eta) (1 + a) \sigma B^2 u^a (1 - \eta) (RT)^{1-a} p^a m^{-a} - u \frac{d}{d\chi} [(\lambda + \mu) p] = 0$$

$$(\lambda + \mu \eta) (\xi + a) \sigma B^2 u^{1+a} (1 - \eta) (RT)^{1-a} p^{a-1} m^{-a} +$$

$$+ (\lambda + \mu) u \frac{du}{d\chi} + \mu \frac{\gamma}{\gamma-1} R \frac{dT}{d\chi} - R \frac{d}{d\chi} (\lambda T) = 0$$

$$(\lambda + \mu \eta) (\varepsilon + 1 - a) \sigma B^2 u^{1+a} (1 - \eta) \left(\frac{p}{RTm} \right)^a + \lambda \frac{dp}{d\chi} - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{d}{d\chi} (\mu p) = 0$$

$$\lambda = \mu(1 - 2\eta) \quad (1.8)$$

Рассмотрим течение, обеспечивающее максимальную мощность в МГД-генераторе заданных габаритов (длины или объема), т. е. рассмотрим вариационную задачу с неподвижными концами. В этом случае

$$\left[(\mu p - m) \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} R \delta T + u \delta u \right) + \lambda RT \left(\delta p + \frac{p}{RT} u \delta u \right) \right] \Big|_{\chi=0}^{\chi=X} = 0 \quad (1.9)$$

Учитывая, что

$$\delta T_0 = \delta T + \frac{(\gamma - 1) u \delta u}{\gamma R}, \quad \frac{\delta p_0}{p_0} = \frac{\delta p}{p} + \frac{u \delta u}{RT} - \frac{\gamma}{2} M^2 \frac{\delta T_0}{T_0}$$

где нижним индексом 0 обозначены параметры торможения, граничные условия (1.9) можно представить в форме

$$\left\{ \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\left(\mu - \frac{m}{p} \right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) + \lambda \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right] \frac{\delta T_0}{T_0} + \lambda \frac{\delta p_0}{p_0} \right\} \Big|_{\chi=0}^{\chi=X} = 0 \quad (1.10)$$

Вариации параметров торможения на концах канала определяются практическим назначением МГД-генератора. В установках с МГД-генератором обычно реализуются граничные условия двух типов. В первом случае фиксируются параметры торможения потока на входе или выходе канала ($\delta T_0 = 0$ и $\delta p_0 = 0$ при $\chi = 0$ или $\chi = X$), а параметры торможения на противоположном конце канала являются произвольными. Тогда из (1.8.4) и (1.10) имеем соответственно

$$\eta = 1/2, \quad \lambda = 0, \quad \mu = m/p \quad \text{при } \chi = X \text{ или } \chi = 0. \quad (1.11)$$

Во втором случае существует связь между фиксированными параметрами торможения на одном конце канала с параметрами торможения на другом конце канала, вариации которых не являются независимыми. В частности, в генераторе с заданным внутренним к.п.д. η_{0i} и фиксированными параметрами торможения T_{01} и p_{01} на входе вариации T_{02} и p_{02} на выходе канала связаны соотношением

$$\frac{\delta p_{02}}{p_{02}} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{T_{02}/T_{01}}{\eta_{0i} - (1 - T_{02}/T_{01})} \frac{\delta T_{02}}{T_{02}} \quad (1.12)$$

Уравнение (1.10) дает связь между λ_2 , μ_2 и параметрами на выходе.

2. Решение системы (1.1.2), (1.1.3), (1.8) имеет вид¹

$$M^2 = \frac{1 + a}{2(\gamma - 1)(\eta - \eta''')} \quad (2.1)$$

$$\ln \frac{u}{u_1} = \frac{1}{2(2\varepsilon - a + 1)} \left[\frac{P(1)}{(1 - \eta')(1 - \eta'')} \ln \frac{1 - \eta_1}{1 - \eta} + \frac{P(\eta')}{(\eta' - 1)(\eta' - \eta'')} \ln \frac{\eta' - \eta_1}{\eta' - \eta} + \frac{P(\eta'')}{(\eta'' - 1)(\eta'' - \eta')} \ln \frac{\eta'' - \eta_1}{\eta'' - \eta} \right] \quad (2.2)$$

$$\ln \frac{p}{p_1} = \frac{\gamma}{4(\gamma - 1)(2\varepsilon - a + 1)} \left[\frac{Q(1)}{(1 - \eta')(1 - \eta'')(1 - \eta''')} \ln \frac{1 - \eta}{1 - \eta_1} + \frac{Q(\eta')}{(\eta' - 1)(\eta' - \eta'')(\eta' - \eta''')} \ln \frac{\eta' - \eta}{\eta' - \eta_1} + \frac{Q(\eta'')}{(\eta'' - 1)(\eta'' - \eta')(\eta'' - \eta''')} \ln \frac{\eta'' - \eta}{\eta'' - \eta_1} + \frac{Q(\eta''')}{(\eta''' - 1)(\eta''' - \eta')(\eta''' - \eta'')} \ln \frac{\eta''' - \eta}{\eta''' - \eta_1} \right] \times \quad (2.3)$$

¹ После сдачи статьи в печать была опубликована работа [8], в которой получено аналогичное решение.

$$\int_{\eta_1}^{\eta} \frac{\gamma [Q(\eta) - (1+a)P(\eta)]}{4(\gamma-1)(2\varepsilon-a+1)(1-\eta)^2(\eta' - \eta)(\eta'' - \eta)(\eta''' - \eta)} \left(\frac{T}{T_1}\right)^{-\varepsilon+a} \times \\ \times \left(\frac{p}{p_1}\right)^{1-a-\zeta} \left(\frac{u}{u_1}\right)^{-1-a} d\eta = -\frac{\sigma_1 u_1 B^2}{p_1 F_1^a} \chi \quad (2.4)$$

$$\eta', \eta'' = \frac{1}{4(2\varepsilon-a+1)} \left\{ -(\varepsilon-a) \left[2\varepsilon-a+1 - 2(1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] + \right. \\ \left. + \left[2\varepsilon-a+1 + 2(1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] \pm \right. \\ \left. \pm \left(\left\{ -(\varepsilon-a) \left[2\varepsilon-a+1 - 2(1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left[2\varepsilon-a+1 + 2(1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] \right\}^2 + 4(2\varepsilon-a+1) \times \right. \\ \left. \times \left[\varepsilon-a + (1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] \left[2\varepsilon-a+1 - 2(1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] \right\}^{1/2} \\ \eta''' = -\frac{1}{2} \left[\varepsilon-a - (1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right]$$

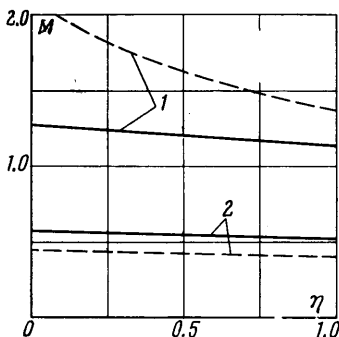
$$P(S) = 2(\varepsilon-a+1)S^2 - \\ - 2 \left[\varepsilon-a + (1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] S + \left[\varepsilon-a + (1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right]$$

$$Q(S) = 2[(1+a)(\varepsilon-a) - 1 + 3a]S^2 - \\ - 2 \left[(5+a)(\varepsilon-a) + 4(1+a) - (3-a)(1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] S - \\ - \left[\varepsilon-a - (1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] \left[2\varepsilon-a+1 - 2(1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right] + \\ + (1+a) \left[\varepsilon-a + 2 + (1-a-\zeta) \frac{\gamma}{\gamma-1} \right]$$

Первый интеграл задачи (2.1) дает связь между числом Маха и электрическим к.п.д. в оптимальном генераторе. Зависимость $M = M(\eta)$ для двух рабочих тел в случае минимальной длины или минимального объема генератора представлена на фиг. 1, на которой кривые 1 соответствуют значениям $\gamma = 1,15$, $\varepsilon = 13$, $\zeta = -0,5$, а кривые 2 — значениям $\gamma = 5/3$, $\varepsilon = 11$, $\zeta = -0,5$ ($a = 0$ — пунктирные линии, $a = 1$ — сплошные). Следует отметить, что при постоянной проводимости ($\varepsilon = \zeta = 0$) не существует экстремального течения, реализующего минимум длины генератора; при $a = 1$ выражение (2.1) переходит в соотношение, полученное в [5] для генератора с минимальным объемом.

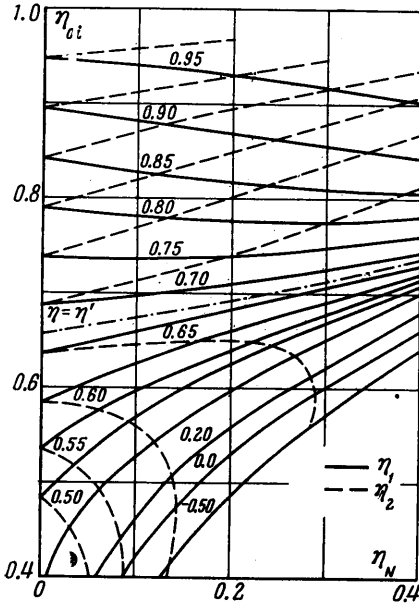
Анализ трех первых интегралов задачи (2.1) — (2.3) показывает, что изменение параметров в оптимальном МГД-генераторе удовлетворяет одной из следующих систем неравенств:

$$1 > \eta_1 > \eta > \eta_2 > \eta', \\ \eta'' < \eta''' < \eta_1 < \eta < \eta_2 < \eta' \quad (2.5)$$

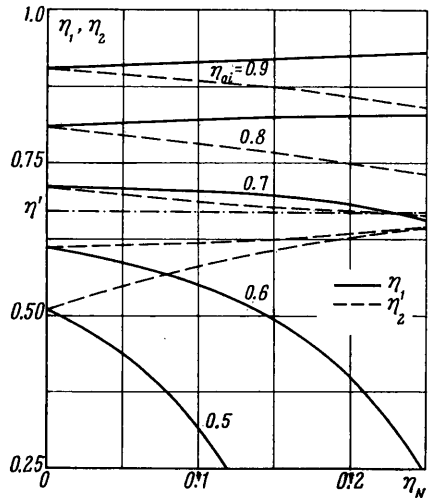


Фиг. 1

Из (2.4) следует также, что η монотонно изменяется по длине канала. При помощи (2.1) — (2.3) можно определить значения электрического к.п.д. на входе (η_1) и выходе (η_2) канала для генератора с заданными η_N и η_{oi} . На фиг. 2 в плоскости η_N, η_{oi} построены кривые постоянных значений η_1 (сплошные кривые) и η_2 (пунктирные кривые) для плазмы с параметрами $\gamma = 5/3, \epsilon = 11, \zeta = -1/2$



Фиг. 2

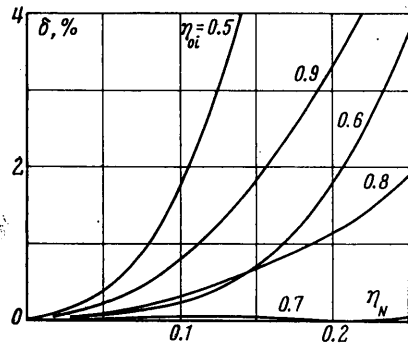


Фиг. 3

при $a = 0$ (минимум длины). Из графика видно, что при $\eta > \eta'$ течение в генераторе происходит с уменьшением η по длине канала, при $\eta < \eta'$ наблюдается обратная зависимость. При $\eta = \eta'$ имеет место течение с постоянными электрическим к.п.д. и числом Маха в канале. Этот случай представлен на фиг. 2 штрих-пунктирной кривой. Отмеченные особенности экстремального течения иллюстрирует также фиг. 3, где построена зависимость η_1 и η_2 от η_N при фиксированных значениях η_{oi} .

Габариты оптимального генератора рассчитываются при помощи последнего интеграла задачи (2.4). Представляет интерес сравнение длины оптимального генератора с длиной M, η -генератора при одинаковых значениях η_N и η_{oi} . При этом будем оптимизировать M, η -генератор таким образом, чтобы расчетные значения числа Маха и электрического к.п.д. обеспечивали максимум η_N при заданном η_{oi} . Используя решение [7], нетрудно показать, что связь между M и η для оптимизированного M, η -генератора дается соотношением (2.1), а также выражением

$$\eta = \frac{\ln(1 - \eta_N)}{1 + 1/2(\gamma - 1)M^2(1 - \eta)} = \frac{\ln(1 - \eta_N)}{\ln(1 - \eta_N/\eta_{oi})} \quad (2.6)$$



Фиг. 4

которые однозначно определяют M и η в функции коэффициента преобразования полной энтальпии и внутреннего к.п.д. генератора. На фиг. 4 представлена зависимость относительной разности длин M, η -генератора и оптимального генератора $\delta = (L_{M, \eta} - L_{opt}) / L_{M, \eta}$ от коэффициента преобразования полной энтальпии η_N для различных η_{oi} . Из графика следует, что выигрыш в длине канала при экстремальном течении тем больше, чем больше разность между начальным и конечным значениями электрического к.п.д. (фиг. 3), т. е. чем больше отличие в распределении параметров в сравниваемых генераторах. При $\eta_1 = \eta_2 = \eta'$ выигрыш в длине канала равен нулю, что и следовало ожидать. Таким образом, оптимизированный M, η -генератор по своим характеристикам весьма близок к оптимальному и является одним из наилучших

среди генераторов с фиксированными значениями параметров. В рассмотренном диапазоне значений η_N и η_{0i} для аргона с присадками щелочных металлов он отличался от оптимального по габаритам на несколько процентов. Следует отметить, что для рабочих тел, имеющих отношение теплоемкостей γ , близкое к единице (продукты сгорания), это отличие может быть значительным.

3. Рассмотрим оптимальный МГД-генератор с заданными значениями η_N и η_{0i} , процесс преобразования энергии в котором изображается на $T-s$ -диаграмме фиг. 5 кривой 3-4. Такой генератор характеризуется определенным значением электрического к.п.д. на входе η_1 . Покажем, что при $\eta_1 < 0.5$ можно осуществить процесс течения в канале с использованием механического дросселя на входе, при котором габариты канала могут быть сокращены.

Как было показано при анализе граничных условий, МГД-генератор с фиксированными параметрами торможения на выходе имеет минимальные габариты при $\eta_1 = 0.5$. Поэтому при одинаковых p_{02} , T_{02} и η_N генератор, имеющий $\eta_1 = 0.5$, реализует меньшие габариты канала и имеет меньшую величину полного давления на входе p_{01}' , чем генератор с $\eta_1 < 0.5$, обеспечивая соответственно большее значение η_{0i} (см. фиг. 2). Процесс в генераторе при $\eta_1 = 0.5$ изображен

в $T-s$ -диаграмме фиг. 5 пунктирной линией 3'-4, лежащей справа от кривой 3-4. Таким образом, если воспользоваться дросселем, снижающим давление на входе в канал от p_{01} до p_{01}' , и реализовать в канале течение с $\eta_1 = 0.5$ (ступенчатый процесс 3-3'-4), то можно получить выигрыш в габаритах генератора при тех же значениях η_N и η_{0i} , что и в исходном генераторе (процесс 3-4). Этот эффект оказывается совершенно очевидным при работе МГД-генератора с весьма низкими значениями внутреннего к.п.д. η_{0i} , когда электрический к.п.д. на входе η_1 , как видно из фиг. 2, принимает отрицательные значения. В этом случае начальные участки канала работают в режиме тормоза, потребляя часть полезной электрической энергии, генерируемой последующими участками канала, т. е. входной участок играет роль электромагнитного дросселя, который может быть заменен сосредоточенным механическим дросселем.

В стационарных энергетических установках дроссель неприемлем; вместе с тем, снижение давления перед каналом рационально осуществить за счет уменьшения степени сжатия в компрессоре (т. е. при снижении верхнего давления в цикле с МГД-генератором — пунктирная линия 2'-3' на $T-s$ -диаграмме, фиг. 5). Таким образом, если нижнее давление в цикле фиксировано, то использование МГД-генератора при значениях внутреннего к.п.д., которым соответствует $\eta_1 < 0.5$, оказывается нецелесообразным. Минимальные значения внутреннего к.п.д. η_{0i} , при которых следует использовать МГД-генератор, определяются зависимостью $\eta_{0i} = \eta_{0i}(\eta_N)$ для генератора с $\eta_1 = 0.5$, которая представлена на фиг. 2.

Поступило
27 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ньюрингер Д. Л. Генерирование оптимальной мощности с плазмой в качестве рабочего тела. Сб. статей «Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели», Госатомиздат, 1961.
2. Крайко А. Н., Слободкина Ф. А. К решению вариационных задач одномерной магнитной гидродинамики. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
3. Соколов Ю. Ф. Установившееся течение электропроводного газа в канале МГД-генератора при постоянном напряжении вдоль электродов. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1962, № 5.
4. Медин С. А. Вариационная задача течения в канале МГД-генератора. Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, № 4.
5. Плешанов А. С. Оптимальный магнитогидродинамический генератор. Докл. АН СССР, 1965, т. 162, № 2.
6. Шахнов И. И. Об ошибке Ньюрингера. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, № 12.
7. Swift-Hook D. T., Wright J. K. The constant-Mach-number MHD generator. J. Fluid Mech., 1963, Vol. 15, Part 1, No. 1.
8. Carter C. The optimization of a magnetohydrodynamic generating duct. Brit. J. Appl. Phys., 1966, Vol. 17, No. 7.