О НЕКОТОРЫХ РАБОТАХ ПО ТЕОРИИ ЛАМИНАРНЫХ ТЯЖЕЛЫХ СТРУЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Работы [1–5] посвящены исследованию течения тяжелых ламинарных струй вязкой жидкости, вытекающих в атмосферу. Рассмотрено семь задач.

1. Плоская струя, вытекающая из щели в горизонтальной плоскости (фиг. 1, *а*), рассмотрена в [1] в приближении Озеена.

2. Осесимметричная струя, вытекающая из круглого отверстия в горизонтальной плоскости (фиг. 1, *б*), рассмотрена в [1, 2] в приближении Озеена.

3. Плоская струя, вытекающая из вертикальной трубы (фиг. 1, *в*), рассмотрена в [1] — в приближении Озеена, в [3, 5] — в приближении Стокса.

4. Осесимметричная струя, вытекающая из вертикальной круглой трубы (фиг. 1, *г*), рассмотрена в [1, 2] — в приближении Озеена, в [4] — в приближении Стокса.

5. Плоская струя, вытекающая из плоской горизонтальной трубы (фиг. 1, *д*), рассмотрена в [3, 5] в приближении Стокса.

6. Струя, вытекающая из горизонтальной круглой трубы (фиг. 1, *д*), рассмотрена в [4] в приближении Стокса.

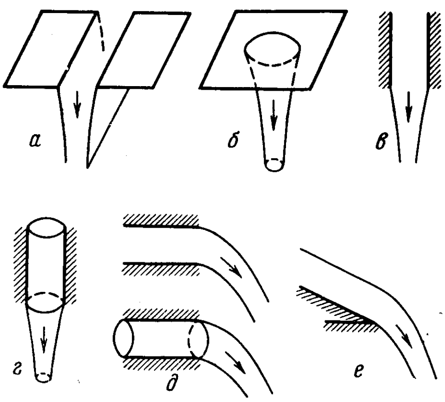
7. Плоская струя, стекающая с наклонной плоскости (фиг. 1, *е*), рассмотрена в [3, 5] в приближении Стокса.

Вопросы, которым посвящены работы [1–5], представляют интерес. Однако они содержат недопустимые принципиальные ошибки как в постановке задач, так и в результативной части.

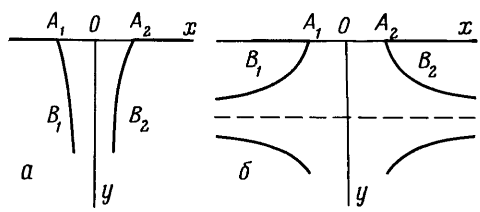
Рассмотрим первую задачу [1]. Предполагается, что плоская струя тяжелой вязкой жидкости вытекает вниз из горизонтальной щели A_1A_2 шириной $2a$, как показано на фиг. 2 *а*.

Компоненты скорости вдоль осей x, y обозначаются соответственно через u, v, ось y направлена вниз вдоль струи. Граничные условия записываются в виде

$$u = 0, \quad v = v_0 = \mathrm{const} \quad \text{при } |x| \leqslant a$$
$$u = v = 0 \quad \text{при } |x| > a \tag{1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Таким образом, предполагается, что в щели A_1A_2 имеет место равномерное распределение скорости, вне щели вдоль оси x скорости равны нулю.

Определению подлежит течение в области $A_1A_2B_2B_1$ (фиг. 2, *а*). На неизвестной до решения задачи границе струи A_1B_1, A_2B_2 следует поставить граничные условия.

Если принять, что атмосфера оказывает на поверхность струи только постоянное нормальное давление P_a, то на A_1B_1, A_2B_2 необходимо потребовать чтобы

$$\sigma_n = -P_a, \qquad \tau_n = 0, \tag{2}$$

где σ_n, τ_n — соответственно нормальные и касательные напряжения на элементарных площадках с нормалью $\mathbf{n}$ на границах A_1B_1, A_2B_2 струи.

Авторы [1] используют уравнение Навье — Стокса в приближении Озеена

$$v_0\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\Delta u = 0, \quad v_0\frac{\partial v}{\partial y} - \nu\Delta v = -g, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

и выписывают частное решение уравнений (3) в виде

$$u = \frac{g}{v_0}\left[1 - e^{v_0y/\nu}\right]x, \quad v = v_0 + \frac{g}{v_0}\left[\frac{\nu}{v_0}e^{v_0y/\nu} - \frac{\nu}{v_0} - y\right] \tag{4}$$

Из (4) видно, что при $y = 0$ компоненты скорости u и v принимают значения $u = 0$, $v = v_0$ при любых значениях x. Таким образом, решение (4) не удовлетворяет условиям (1).

Далее, авторы [1] находят линии тока A_1B_1, A_2B_2 (фиг. 2, *а*) течения, определяемого решением (4), в виде

$$x = \mp a v_0^2 \left[v_0^2 + g \left(\frac{\nu}{v_0} e^{v_0 y/\nu} - \frac{\nu}{v_0} - y \right) \right]^{-1} \tag{5}$$

Течение в области $A_1A_2B_1B_2$, соответствующее решению (4), интерпретируется в работе [1] как течение тяжелой струи, истекающей из щели A_1A_2. Всюду вне области $A_1A_2B_2B_1$ авторы [1] полагают $u = v = 0$. Граничные условия на боковой поверхности струи авторы [1] задают в виде

$$P = P_a \tag{6}$$

где P — давление в жидкости.

Очевидно, что граничное условие (6) не имеет ничего общего с условиями (2).

Нетрудно убедиться, что на границе «струи», определенной в [1], граничные условия (2) не выполняются. На ее боковой поверхности имеют место нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_n = (1 + a^2 v_0^4 g^2 \alpha^2 \beta^4)^{-1} \left[-P - 2\rho \frac{\nu g}{v_0} \alpha + \left(-P + 2 \frac{\rho \nu g \alpha}{v_0} \right) a^2 v_0^4 g^2 \alpha^2 \beta^4 + \right.$$

$$\left. + 2 a \rho g^2 v_0^2 \alpha \beta^2 x e^{v_0 y/v} \right] \tag{7}$$

$$\tau_n = -(1 + a^2 v_0^4 g^2 \alpha^2 \beta^4)^{-1} [4\rho \nu a g^2 \alpha^2 \beta^2 v_0 + \rho g e^{v_0 y/\nu} x (a^2 v_0^4 g^2 \alpha^2 \beta - 1)], \qquad x = a v_0^2 \beta$$

$$\alpha = e^{v_0 y/\nu} - 1, \qquad \beta = [v_0^2 + g \nu v_0^{-1} (e^{v_0 y/\nu} - 1 - v_0 y/\nu)]^{-1} \tag{8}$$

где ρ — плотность жидкости.

При $y \to \infty$ величина $\alpha \to \infty$, $\beta \to 0$, $\alpha\beta \to \mathrm{const}$. Из (8) видно, что величина касательного напряжения τ_n неограниченно возрастает с увеличением y, а нормальное напряжение σ_n на A_1B_1, A_2B_2 может как угодно отличаться от величины давления P, которое авторы [1] полагают равным P_a.

Так как при $y = 0$ имеем $\alpha = 0$, $\beta = 1/v_0^2$, $x = \pm a$, то из (8) следует, что $\tau_n = \pm \rho g a$, если $y = 0$. Для достаточно широкой щели касательное напряжение на «свободной» поверхности струи в точках A_1, A_2 может принимать сколь угодно большие значения. Таким образом, частное решение (4) не может быть использовано для определения течения ламинарной струи вязкой жидкости, вытекающей в атмосферу, как это сделано в [1].

Существует и другая причина, по которой частное решение (4) не соответствует поставленной задаче. Дело в том, что авторы [1] направили ось y вниз по течению струи, а в уравнениях (3) силу тяжести направили вверх, против течения. При правильном проектировании силы тяжести знак перед величиной g в соотношениях (4), (5) изменится на обратный, при этом форма линий тока, исходящих из точек A_1, A_2, примет вид, показанный на фиг. 2, *б*. Очевидно, что теперь никакого сходства линий тока с границами тяжелой струи нет.

Отмеченные ошибки характерны для всех последующих работ [2-5]. Всюду в них определяется частное решение в полуплоскости или полупространстве при условии, что $P = P_a = \mathrm{const}$. Далее выделяется область течения, ограниченная линиями тока (или поверхностью тока), исходящими от границ щели (или трубы).

Граничные условия используются в виде (6), а не (2), и авторы не замечают, что на определенной или «свободной» поверхности действуют переменные нормальные и касательные усилия, которые могут принимать сколь угодно большие значения. У течений, соответствующих частным решениям работ [1-5], производные компонент скоростей в направлениях, перпендикулярных линиям и поверхностям тока, отличны от нуля. Это приводит к наличию касательных напряжений на этих линиях и поверхностях.

Более того, частные решения, положенные в основу работ [1-5], удовлетворяют уравнениям Навье — Стокса, у которых либо сила тяжести направлена против течения, либо изменены знаки в некоторых членах этих уравнений. При правильном написании частных решений сходство линий тока с границами струй нарушается.

Рассмотрим вторую задачу. В работе [1] для ее решения используется частное решение вида

$$u = \frac{g}{2w_0}(1 - e^{w_0 z/\nu}) x, \qquad v = \frac{g}{2w_0}(1 - e^{w_0 z/\nu}) y, \qquad w = w_0 + \frac{g}{w_0}\left(\frac{\nu}{w_0} e^{w_0 z/\nu} - \frac{\nu}{w} - z \right) \tag{9}$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости вдоль осей x, y, z, причем плоскость xy лежит в плоскости отверстия, ось z направлена из центра отверстия вертикально вниз; a — радиус отверстия. При $z = 0$, очевидно, имеем $u = v = 0$, $w = w_0$.

Уравнение поверхности струи, ограничивающей область применения (9), определено в виде

$$\left[w_0+\frac{g}{w_0}\left(\frac{\nu}{w_0}e^{w_0z/\nu}-\frac{\nu}{w_0}-z\right)\right]r^2-w_0a^2=0 \qquad (r^2=x^2+y^2) \tag{10}$$

Отметим, что в работе [2] приведено другое частное решение, использованное для решения этой же задачи

$$u=-\frac{g}{2w_0}(1-e^{-w_0z/\nu})x, \quad v=-\frac{g}{2w_0}(1-e^{-w_0z/\nu})y$$

$$w=w_0+\frac{g}{w_0}\left(\frac{\nu}{w_0}e^{-w_0z/\nu}-\frac{\nu}{w_0}+z\right) \tag{11}$$

Очевидно, что при $z=0$ также $u=v=0$. Уравнение поверхности струи, ограничивающей область применения (11), определено теперь в виде

$$\left[w_0+\frac{g}{w_0}\left(\frac{\nu}{w_0}e^{-w_0z/\nu}-\frac{\nu}{w_0}+z\right)\right]r^2-w_0a^2=0 \tag{12}$$

В чем причина двух разных решений одной и той же задачи?

В работе [1] авторы исходят из уравнений Навье — Стокса, в которых сила тяжести направлена вверх, т. е. против движения струи.

В работе [2] авторы используют уравнение Навье — Стокса в виде

$$\begin{gathered} w_0\frac{\partial u}{\partial z}+\nu\Delta u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=0, \qquad w_0\frac{\partial v}{\partial z}+\nu\Delta v-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=0 \\ w_0\frac{\partial w}{\partial z}+\nu\Delta w-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}=g, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \end{gathered} \tag{13}$$

На этот раз сила тяжести $g\rho$ направлена правильно, однако сами уравнения движения, использованные в [2] в форме (13), написаны с ошибками: перед членами $\Delta\nu(\ldots)$ должен стоять минус, а перед производными $\partial P\,/\,\partial x, \ldots$ — плюс.

Если бы авторы [1, 2] правильно написали уравнения Навье — Стокса, то при помощи своих рассуждений они получили бы вместо (9) и (11) решение

$$\begin{gathered} u=-\frac{g}{2w_0}(1-e^{w_0z/\nu})x, \quad v=-\frac{g}{2w_0}(1-e^{w_0z/\nu})y, \\ w=w_0+\frac{g}{w_0}\left(-\frac{\nu}{w_0}e^{w_0z/\nu}+\frac{\nu}{w_0}+z\right) \end{gathered} \tag{14}$$

Вместо (10) и (12) должно иметь место

$$\left[w_0+\frac{g}{w_0}\left(\frac{\nu}{w_0}-\frac{\nu}{w_0}e^{w_0z/\nu}+z\right)\right]r^2-w_0a^2=0 \tag{15}$$

Из (15) очевидно, что с увеличением z величина $2r$ (диаметр струи) возрастает и достигает при некотором значении z бесконечных размеров, подобно тому, как это показано на фиг. 2, *б*.

Отметим, что работы [1, 2] не содержат взаимных ссылок и последующие публикации не содержат разъяснения отличия решений (9), (10) и (11), (12).

Рассмотрим решение третьей задачи. В работе [1] авторы исходят из частного решения

$$u=\frac{\gamma+\rho g}{\rho v_0}(1-e^{v_0y/\nu})x, \quad v=\frac{\nu+\rho g}{\rho v_0}\left(\frac{\nu}{v_0}e^{v_0y/\nu}-\frac{\nu}{v_0}-y\right)+\frac{\gamma}{2\mu}(a^2-x^2) \tag{16}$$

Здесь γ — градиент давления на выходе из трубы, μ — коэффициент вязкости.

Из (16) очевидно, что

$$v=\gamma\,/\,2\mu(a^2-x^2) \quad \text{при } y=0,\ u=0.$$

Решение (16) получено при силе тяжести, направленной вверх. Если силу тяжести спроектировать правильно, то в решении (16) следует поменять знак перед g. В этом случае «свободная струя» при $\gamma = \rho g$ превращается в течение Пуазейля.

Решение третьей задачи в приближении Стокса приведено в [3, 5].

В работе [3] знак перед ускорением силы тяжести изменен: рассматривая течение, направленное вниз, автор [3] направляет силу тяжести против течения. В обоих случаях на поверхности «свободной струи» имеют место касательные напряжения, о которых автор [3, 5] не упоминает.

В работе [3] предпринята попытка учесть изменение давления в области течения струи. Автор [3], используя граничное условие (6), получает $P = P_a + \rho g y$, не замечая, что такое распределение давления не удовлетворяет граничному условию (6).

Рассмотрим решение четвертой задачи. В работе [1] используется частное решение уравнений движения, в которых сила тяжести направлена против течения, в работе [2] — частное решение уравнений (13).

При правильном написании уравнений Навье — Стокса должно иметь место исходное частное решение

$$u = \frac{\gamma - \rho g}{2\rho w_0}(1 - e^{w_0 z/\nu})x, \quad v = \frac{\gamma - \rho g}{2\rho w_0}(1 - e^{w_0 z/\nu})y,$$
$$w = \frac{\gamma}{4\mu}[a^2 - (x^2 + y^2)] + \frac{\gamma - \rho g}{\rho w_0}\left(\frac{\nu}{w_0}e^{w_0 z/\nu} - \frac{\nu}{w_0} - z\right) \tag{17}$$

В этом случае при $\gamma = \rho z$ «свободная струя» также превращается в течение Пуазейля. На поверхности «свободной струи» действуют касательные напряжения в любом случае.

По-видимому, нет необходимости останавливаться на решении последующих задач, так как суть предположений и основные ошибки, разъясненные выше, имеют место при решении и этих задач. Отметим, что в работах [1, 3, 4] всюду в течениях, направленных вниз, сила тяжести фактически направлена вверх против течения.

Об изменениях знаков в уравнениях Навье — Стокса в работе [2] сказано выше. В работе [5] при решении задач 5, 7 сила тяжести также направлена против течения.

Отметим высказывание автора [5] о необходимости учета сил поверхностного натяжения в уравнениях Навье — Стокса: «Но так как при выводе этих уравнений (Навье — Стокса) совершенно не были учтены силы поверхностного натяжения, необходимо пополнить их членами, описывающими поверхностное натяжение, и вести их решение обычными методами математической физики», «...всякая жидкость обладает поверхностным натяжением и пренебрежение им в уравнениях Навье — Стокса для струйных течений не всегда обосновано».

Очевидно, что ни для каких течений, в том числе — и струйных, уравнения Навье — Стокса не нуждаются в дополнении силами поверхностного натяжения, которые могут быть учтены в граничных условиях.

Работы [6, 7] содержат обобщения результатов работ [1, 2] на случай действия магнитогидродинамических сил. Здесь ошибки в постановке задач струйных течений усугубляются ошибками в постановке краевых задач магнитной гидродинамики (см. рефераты С. А. Регирера 2Б28, 2Б29 в РЖМеханика, 1964, № 2).

Характер перечисленных ошибок позволяет заключить, что работы [1–7] не содержат никаких позитивных результатов по теории тяжелых вязких ламинарных струй.

Поступило 14 X 1966

А. Т. Листров, А. Д. Чернышов

ЛИТЕРАТУРА

1. Архангельский М. М., Волков Р. А. О струйных течениях вязкой жидкости в поле силы тяжести. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1960, т. 92, вып. 4.
2. Волков Р. А. Применение преобразования Лапласа к некоторым задачам гидродинамики. Инж. физ. ж., 1960, т. 3, № 4.
3. Волков Р. А. Про струминні течії в'язкої рідини. Прикл. механіка, 1959, т. 5, № 3.
4. Волков Р. А. Струминні течії в'язкої рідини з круглої труби. Прикл. механіка, 1959, т. 5, № 4.
5. Волков Р. А. К теории вязких ламинарных струй. Тр. Запорожск. машиностроит. ин-та, 1959, т. 3.
6. Архангельский М. М., Волков Р. А. О плоских струйных течениях в магнитной гидродинамике. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1962, т. 119, в. 6.
7. Архангельский М. М., Волков Р. А. Об осесимметричных струйных течениях в магнитной гидродинамике. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1962, т. 119, вып. 6.