ДВИЖЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОТМЕЧЕННЫХ ЧАСТИЦ В ПЛАСТАХ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В. И. ПЕНЬКОВСКИЙ

(Новосибирск)

Рассматриваются некоторые особенности, вытекающие при решении задач о неустановившемся движении поверхности отмеченных частиц жидкости в пластах конечных размеров и в пластах, состоящих из частей различной проницаемости. В работе [1] экспериментально исследовалось поведение линии раздела воды и раствора медного купороса на границе двух сред различной проницаемости. При этом на упомянутой границе сред наблюдались в зависимости от условий либо изломы, либо разрывы типа промежутков высачивания линии раздела жидкостей. Некоторые из наблюдаемых эффектов, по-видимому, могут быть описаны средствами, подобными излагаемым ниже.

1. Простоты ради рассмотрим одномерное движение в напорном пласте с непроницаемой кровлей и слабопроницаемой подошвой. В предположениях работы [2] ордината линии отмеченных частиц η удовлетворяет уравнению первого порядка в частных производных

$$\eta\frac{\partial^2 h}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\frac{\partial h}{\partial\xi}-\varepsilon(h-H)=\frac{\partial\eta}{\partial t_1}\qquad\left(\varepsilon=\frac{\varkappa m}{k\lambda},\ t_1=\frac{k\rho g}{m\sigma\mu}t\right)\tag{1.1}$$

Здесь η, напор h и координата ξ — безразмерные величины, отнесенные к мощности пласта m; далее k, $\varkappa$ — проницаемости пласта и подошвы соответственно, λ — мощность подошвы, σ — пористость, ρ, μ — плотность и вязкость жидкости, соответственно, t — время, $H=\mathrm{const}$ — напор в долях m при $\xi=l$ и ниже подошвы пласта.

Пусть при $t=0$ имеем $\eta=0$ и при $t>0$ напор $h=h_0=\mathrm{const}$ при $\xi=0$. Тогда

$$h=H-(H-h_0)\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\varepsilon}(l-\xi)}{\operatorname{sh}\sqrt{\varepsilon}\,l}\tag{1.2}$$

и вводя

$$\tau=\frac{k\varepsilon\rho g(H-h_0)t}{m\sigma\operatorname{sh}\sqrt{\varepsilon}\,l}$$

систему характеристик для уравнения (1.1) запишем в виде

$$\frac{d\xi}{d\tau}=-\operatorname{ch}(l_1-\xi_1),\qquad\frac{d\eta}{d\tau}=(1-\eta)\operatorname{sh}(l_1-\xi_1)\qquad\left(\begin{matrix}\xi_1=\sqrt{\varepsilon}\,\xi\\ l_1=\sqrt{\varepsilon}\,l\end{matrix}\right)\tag{1.3}$$

Интегрируя первое уравнение системы (1.3) от 0 до τ и от ξ_{10} до ξ_1, получим

$$\frac{\tau}{2}=\operatorname{arctg}\frac{e^{l_1-\xi_1}-e^{l_1-\xi_{10}}}{1+e^{l_1-\xi_1}e^{l_1-\xi_{10}}}$$

или

$$e^{l_1\xi_1}=\frac{e^{l_1-\xi_{10}}+\operatorname{tg}{}^1/_2\tau}{1-\operatorname{tg}{}^1/_2\tau e^{l_1-\xi_{10}}}\tag{1.4}$$

Формула (1.4) дает возможность определить абсциссу отмеченной частицы в любой момент времени τ, если в момент $\tau=0$ ее абсцисса была ξ_{10}. Поскольку $0\leqslant\xi_1,\ \xi_{10}\leqslant l$, то τ не может быть произвольно, т. е. время установления линии отмеченных частиц конечно, и определяется промежутком времени T, в течении которого частица с абсциссой $\xi_{10}=l$ приходит в точку с абсциссой $\xi_1=0$

$$T=2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\exp\{\sqrt{\varepsilon}\,l\}-1}{\exp\{\sqrt{\varepsilon}\,l\}+1}$$

Таким образом, некоторая кривая $\xi=\xi_*(\tau)$, $\xi_*(0)=l$, $\xi_*(T)=0$ разбивает полуполосу $0\leqslant\xi\leqslant l$, $\tau\geqslant0$, в которой нужно решить уравнение 1.1, на две области:

область неустановившегося движения $\xi < \xi_*$, где определена функция $\eta = \eta^+(\varepsilon, \tau)$, удовлетворяющая уравнению (1.1) и условию $\eta^+(\xi, 0) = 0$, и область установившейся линии отмеченных частиц, ордината которой η удовлетворяет уравнению

$$\eta^- \frac{d^2h}{d\xi^2} + \frac{d\eta^-}{d\xi}\frac{dh}{d\xi} = \varepsilon(h - H) \qquad (1.5)$$

и краевому условию $\eta^- = 0$ при $\xi = l$.

Разделив в (1.3) второе уравнение на первое и проинтегрировав от 0 до η и от ξ_0 до ξ_1, получим

$$\eta = 1 - \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\varepsilon}(l - \xi_0)}{\operatorname{ch}\sqrt{\varepsilon}(l - \xi)}$$

Исключив отсюда и из (1.4) параметр ξ_0, найдем

$$\eta^+(\xi, \tau) = 1 - \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 1/2\tau)\exp\{\sqrt{\varepsilon}(l - \xi)\}}{[1 + \operatorname{tg} 1/2\tau \exp\{\sqrt{\varepsilon}(l - \xi)\}][\exp\{\sqrt{\varepsilon}(l - \xi)\} - \operatorname{tg} 1/2\tau]}$$

Решением (1.5) с учетом краевого условия будет

$$\eta^-(\xi) = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}\sqrt{\varepsilon}(l - \xi)}$$

Функцию $\xi_*(\tau)$ найдем из условия непрерывности $\eta^+ = \eta^-$ при $\xi = \xi_*$, откуда, обозначая $z_* = \exp\}\sqrt{\varepsilon}(l - \xi^*)\}$, получаем квадратное уравнение

$$\left(z_* - \frac{1 + \operatorname{tg} 1/2\tau}{1 - \operatorname{tg} 1/2\tau}\right)^2 = 0$$

Следовательно, для каждого фиксированного τ кривые η^+ и η^- касаются в точке

$$\xi = l - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} 1/2\tau}{1 - \operatorname{tg} 1/2\tau}$$

Нетрудно заметить из (1.4), что кривая $\xi = \xi_*$ представляет собой, как и следовало ожидать, характеристику, проведенную через точку $\xi = l$.

В общем случае плоская задача о движении линии отмеченных частиц в пласте конечной длины сводится к решению уравнения

$$a(\xi, \tau)\partial\eta / \partial\xi + b(\xi, \tau)\partial\eta / \partial\tau = \eta + c(\xi, \tau) \qquad (1.6)$$

Здесь a, b, c — известные непрерывные функции, причем $a / b < 0$ при условиях

$$\eta(\xi, 0) = \varphi_1(\xi), \qquad \eta(l, \tau) = \varphi_2(\tau) \qquad (\varphi_1(l) = \varphi_2(0)) \qquad (1.7)$$

Здесь φ_1, φ_2 — наперед заданные гладкие функции.

Решение задачи (1.6) — (1.7), имеющее непрерывные частные производные по ξ и τ всюду внутри полуполосы, вообще говоря, не существует. Поэтому, отыскивая решение в классе непрерывных функций, нужно предположить существование линий $\xi = \xi_*(\tau)$, на которых первые производные претерпевают разрыв. Нетрудно видеть, что этими линиями будут характеристики уравнения (1.6). Действительно, пусть

$$\eta = \eta^+(\xi, \tau) \text{ при } \xi \leqslant \xi_*, \qquad \eta = \eta^-(\xi, \tau) \text{ при } \xi > \xi_*$$

причем $\eta^+ = \eta^-$ при $\xi = \xi_*$. Дифференцируя последнее равенство вдоль $\xi = \xi_*$, получим

$$\left[\frac{\partial\eta^+}{\partial\xi} - \frac{\partial\eta^-}{\partial\xi}\right]\frac{d\xi_*}{d\tau} + \left[\frac{\partial\eta^+}{\partial\tau} - \frac{\partial\eta^-}{\partial\tau}\right] = 0 \qquad (1.8)$$

С другой стороны, записывая (1.6) на линии $\xi = \xi_*$ для η^+ и η^-, вычитая из первого уравнения второе и пользуясь непрерывностью функций a, b, c и η, приходим к соотношению

$$a(\xi_*, \tau)\left[\frac{\partial\eta^+}{\partial\xi}-\frac{\partial\eta^-}{\partial\xi}\right]+b(\xi_*, \tau)\left[\frac{\partial\eta^+}{\partial\tau}-\frac{\partial\eta^-}{\partial\tau}\right]=0$$

Отсюда и из (1.7) получаем дифференциальное уравнение для ξ_*

$$\frac{d\xi_*}{d\tau}=\frac{a(\xi_*, \tau)}{b(\xi_*, \tau)}$$

т. е. уравнение характеристики.

2. Рассмотрим приток жидкости к галерее в напорном пласте бесконечной протяженности, составленном из двух частей различной проницаемости: k_1 и k_2. Пусть $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, λ_1, λ_2 — проницаемости кровли и подошвы пласта соответственно, h_i — напор, η_i — ордината поверхности отмеченных частиц, l — расстояние до границы между составными частями пласта, причем

$$i=1 \text{ при } 0\leqslant\xi\leqslant l, \qquad i=2 \text{ при } l<\xi<\infty$$

и все величины, имеющие размерность длины, отнесены к мощности пласта. Предполагая, далее, что $k_i \gg \varkappa_1, \varkappa_2$ и что вне кровли, подошвы и на бесконечности сохраняется постоянный напор H, будем иметь

$$h_1=H-a_1e^{-\omega_1\xi}+a_2e^{\omega_1\xi}, \qquad h_2=H-b_1e^{-\omega_2\xi} \tag{2.1}$$

$$\omega_i^2=\varepsilon_{1i}+\varepsilon_{2i}, \qquad \varepsilon_{ij}=(\varkappa_i/k_j)\lambda_i^{-1}$$

Постоянные a_1, a_2, b_1 находятся из граничных условий при $\xi=0$ и $\xi=l$ и вычисляются по формулам

$$a_1=\frac{q}{\omega_1\Delta}e^{(\omega_1-\omega_2)l}\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}+1\right), \qquad a_2=\frac{q}{\omega_1\Delta}e^{-(\omega_1+\omega_2)l}\left(\frac{1}{\delta}-1\right)$$

$$b_1=\frac{2q}{\omega_1\Delta}, \quad \delta=\frac{k_1}{k_2}, \quad \Delta=2e^{\omega_2 l}\left[\operatorname{sh}\omega_1 l+\frac{1}{\sqrt{\delta}}\operatorname{ch}\omega_1 l\right] \tag{22}$$

Здесь $q=\mathrm{const}$ — некоторый безразмерный дебит галереи.

Составляя уравнение баланса массы отмеченной жидкости, получим следующие уравнения для η_i:

$$\eta_1\frac{\partial^2h_1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\eta_1}{\partial\xi}\frac{\partial h_1}{\partial\xi}-\varepsilon_{21}(h_1-H)=\frac{\partial\eta_1}{\partial\tau} \tag{2.3}$$

$$\eta_2\frac{\partial^2h_2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial\eta_2}{\partial\xi}\frac{\partial h_2}{\partial\xi}-\varepsilon_{22}(h_2-H)=\delta\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\frac{\partial\eta_2}{\partial\tau} \tag{2.4}$$

Пусть начальное условие записывается в виде

$$\eta_1=0 \text{ при } \tau=0 \tag{2.5}$$

Решая для η_2 задачу Коши, получим [2]

$$\eta_2=\frac{\varepsilon_{22}}{\omega_2^2}\left[1-\frac{e^{\omega_2\xi}}{e^{\omega_2\xi}+\tau b_1\omega_2^2\sigma_1/\delta\sigma_2}\right] \tag{2.6}$$

Уравнение (2.3) нужно интегрировать в полуполосе $0\leqslant\xi\leqslant l$, $\tau\leqslant 0$, добавляя к начальному условию (2.5) граничное условие непрерывности

$$\eta_1=\eta_2 \text{ при } \xi=l$$

Характеристическая система уравнений для (2.3) имеет вид

$$\omega_1^2\,d\tau=\frac{-\omega_1\,d\xi}{a_1e^{-\omega_1\xi}+a_2e^{\omega_1\xi}}=\frac{d\eta_1}{\eta_1-\varepsilon_{21}/\omega_1^2}\,\frac{1}{-a_1e^{-\omega_1\xi}+a_2e^{\omega_1\xi}}$$

Далее следует рассмотреть отдельно два случая.

Случай 1. $\delta>1$. Тогда $a_2<0$, $a_2'=-a_2>0$, и будем иметь

$$a_2'\omega_1^2\,dt=-\frac{d(\exp\{\omega_1\xi\})}{a_1/a_2'-\exp\{2\omega_1\xi\}} \tag{2.7}$$

Интегрируя полученное выражение от τ_0 до τ и от ξ_0 до ξ, получаем

$$\frac{\sqrt{a_1/a_2'}+e^{\omega_1\xi}}{\sqrt{a_1/a_2'}-e^{\omega_1\xi}}\cdot\frac{\sqrt{a_1/a_2'}-e^{\omega_1\xi_0}}{\sqrt{a_1/a_2'}+e^{\omega_1\xi_0}}=\exp\{-2\sqrt{a_1a_2'}\omega_1^2(\tau-\tau_0)\} \tag{2.8}$$

Интеграл второго уравнения системы запишется так:

$$\frac{\varepsilon_{21}/\omega_1^2-\eta}{\varepsilon_{21}/\omega_1^2-\eta_0}=\frac{e^{\omega_1\xi_0}[\exp\{2\omega_1\xi\}-a_1/a_2']}{e^{\omega_1\xi}[\exp\{2\omega_1\xi_0\}-a_1/a_2']} \tag{2.9}$$

В соответствии с вышеизложенным, для нахождения η^+ следует в (2.8) и (2.9) положить $\tau_0=\eta_0=0$. Исключая параметр ξ_0, получим

$$\eta^+(\xi,\tau)=\frac{\varepsilon_{21}}{\omega_1^2}\left[1-4\sqrt{a_1a_2'}\frac{e^{\omega_1\xi}\exp\{-2\sqrt{a_1a_2'}\,\omega_1^2\tau\}}{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2'}\,e^{\omega_1\xi})^2-(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2'}e^{\omega_1\xi})^2\exp\{-4\sqrt{a_1a_2'}\omega_1^2\tau\}}\right]$$

Полагая в (2.8) и (2.9) $\xi_0=l$, пользуясь условием (2.7) и исключая параметры, найдем

$$\eta^-(\xi,\tau)=\frac{\varepsilon_{21}}{\omega_1^2}-\frac{e^{\omega_1 l}(\exp\{2\omega_1\xi\}-a_1/a_2')}{e^{\omega_1\xi}(\exp\{2\omega_1 l\}-a_1/a_2')}\left\{\frac{\varepsilon_{21}}{\omega_1^2}-\frac{\varepsilon_{22}}{\omega_2^2}\left[1-e^{\omega_2 l}\left(e^{\omega_2 l}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{b_1\omega_2^2\sigma_1}{\sigma_2\delta}\left(\tau+\frac{1}{2\sqrt{a_1a_2'}\,\omega_1^2}\ln\frac{(\sqrt{a_1/a_2'}+e^{\omega_1\xi})(\sqrt{a_1/a_2'}-e^{\omega_1 l})}{(\sqrt{a_1/a_2'}-e^{\omega_1\xi})(\sqrt{a_1/a_2'}+e^{\omega_1 l})}\right)\right)^{-1}\right]\right\}$$

Случай 2. $\delta<1$, $a_2>0$.

Не останавливаясь на выкладках, аналогичных приведенным выше, запишем окончательный результат

$$\eta^+=\frac{\varepsilon_{21}}{\omega_1^2}\left[1-\frac{\sqrt{a_1a_2}(1+\mathrm{tg}^2\sqrt{a_1a_2}\,\omega_1^2\tau)}{\sqrt{a_1a_2}(1-\mathrm{tg}^2\sqrt{a_1a_2}\,\omega_1^2\tau)+(a_1e^{-\omega_1\xi}-a_2e^{\omega_1\xi})\,\mathrm{tg}\sqrt{a_1a_2}\,\omega_1^2\tau}\right]$$

$$\eta^-=\frac{\varepsilon_{21}}{\omega_1^2}-\frac{a_1e^{-\omega_1 l}+a_2e^{\omega_1 l}}{a_1e^{-\omega_1\xi}+a_2e^{\omega_1\xi}}\left\{\frac{\varepsilon_{21}}{\omega_1^2}-\frac{\varepsilon_{22}}{\omega_2^2}\left[1-\exp\{\omega_2 l\}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(e^{\omega_2 l}+b_1\omega_2^2\sigma_1/\delta\sigma_2\left(\tau-\frac{1}{\omega_1^2\sqrt{a_1a_2}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{a_1/a_2}(e^{\omega_1 l}-e^{\omega_1\xi})}{1+(a_2/a_1)e^{\omega_1(l+\xi)}}\right)\right)^{-1}\right]\right\}$$

Поступило 17 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Kawabata H. Free surface and interface of two layer's liquids through porous media by pumping up. J. Sci. Hiroshima Univ., A, 1960, vol. 24, No. 2.
2. Пеньковский В. И., Рыбакова С. Т. Приток двух жидкостей к совершенной галерее и скважине в слоистых грунтах. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ Л. В. ГОГИША «ИССЛЕДОВАНИЕ КОРОТКИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СОПЕЛ» (МЖГ, 1966, № 2, стр. 175—180)

В статье рассмотрен вопрос об увеличении тяги плоских сопел путем создания потоков с ударными волнами, влияние которых распространяется до стенок этих сопел. В ней утверждается, что построение очень коротких сопел на основе известных решений вариационных задач «оказывается не всегда возможным», вследствие чего «это позволяет предполагать, что при еще большей степени укорочения целесообразно использовать сопла со слабыми скачками уплотнения». В подтверждение указанного привлекаются рассуждения со струйкой тока и эксперимент. Таким образом, у читателя может создаться впечатление, что такие сопла с ударными волнами при некоторых исходных данных дают максимальную тягу.

В действительности, к настоящему времени получено исчерпывающее решение задачи о построении сопла максимальной тяги при любых габаритах. Сам автор ссы-