О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ИЗУЧЕНИЯ СТРУКТУРЫ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПОТОКА И ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

М. М. МЕНДЕЛЬСОН

(Уфа)

Известно, что введение в поток фильтрующейся жидкости какого-либо индикатора позволяет выяснить некоторые черты структуры течения — наблюдая в определенных условиях за его распространением в области фильтрации. Так, например, используются радиоактивные изотопы, краситель флуоресценцин и т. д. [1]. За последние годы обнаружено и нашло практическое применение следующее явление. Показано, что в нефти присутствуют естественные «меченые» частицы — асфальтены, концентрация которых определяет оптические свойства нефти, в частности ее коэффициент светопоглощения — КСП. Оказалось, что КСП довольно сильно меняется в пределах одной и той же залежи и даже пласта. Последнее обстоятельство дает возможность по динамике КСП в процессе эксплуатации пласта судить о некоторых особенностях фильтрационного процесса [2].

Ниже рассматривается задача о распространении индикатора в фильтрационном потоке и некоторые возможные приложения проведенного анализа для изучения структуры потока и пористой среды.

Пусть, $f(x, y, z, t)$ — концентрация индикатора в фильтрующейся жидкости, $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ — вектор скорости фильтрации, m — пористость породы. Тогда, пренебрегая дисперсионными эффектами, можно написать уравнение сохранения количества индикатора

$$f \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V}\nabla f + m\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

Если в процессе движения индикатор сорбируется пористой средой, то уравнение (1) примет вид:

$$f \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V}\nabla f + m\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

где $a(x, y, z, t)$ — количество сорбированного индикатора в единице объема пористой среды. Поскольку фильтрационные процессы достаточно медленны, примем, что сорбция квазиравновесна, т. е. a и f связаны однозначной функциональной зависимостью

$$a = \varphi(f) \qquad (3)$$

Если концентрация f невелика, то естественно также принять гипотезу о том, что функция φ линейна, т. е. выполняется закон Генри

$$a = \lambda f, \qquad \lambda = \text{const} > 0 \qquad (4)$$

Подставив (4) в (2), запишем

$$f \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V}\nabla f + (m + \lambda)\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (5)$$

Итак, в случае равновесной линейной сорбции число $m + \lambda = m^*$ играет роль эффективной пористости.

Пусть в области течения отсутствуют источники и стоки и фильтрующаяся жидкость несжимаема. Тогда $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ и из (5) следует:

$$\mathbf{V}\nabla f + m^*\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \qquad (6)$$

Очевидно, в этом случае эффективная средняя скорость переноса концентрации индикатора имеет вид V / m^*, в то время как индивидуальные частицы жидкости переносятся со средней скоростью V / m, которая по модулю больше, поскольку $m < m^*$. Отмеченное различие объясняется тем, что индикатор, в отличие от жидких частиц, может сорбироваться породой.

Если сорбция неравновесна, то процесс можно описать системой уравнений:

$$\mathbf{V}\nabla f + m\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = \beta(f - f^*), \quad a = \lambda f^* \qquad (7)$$

Здесь β — кинетический коэффициент, f^* — концентрация, равновесная сорбции a; второе уравнение из (7) соответствует линейной диффузионной кинетике сорбции. Из системы (7) можно исключить функцию a и получить одно уравнение для f

$$m\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}+\left(\beta\lambda^{-1}+\frac{\partial}{\partial t}\right)V\nabla f+\beta(1+m\lambda^{-1})\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{8}$$

Отсюда при $\beta\to\infty$ вытекает равенство (6).

Уравнение (8) или его частный случай (6) содержит две функции — концентрацию $f(x, y, z, t)$ и вектор скорости фильтрации $\mathbf{V}(x, y, z, t)$.

Мы будем называть прямой следующую задачу динамики индикатора: по известному полю скоростей, зная начальное и в определенных условиях граничное распределение концентрации, найти $f(x, y, z, t)$.

Под обратной задачей будет пониматься задача вычисления $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ в том случае, когда известна $f(x, y, z, t)$ в любой точке области для любого момента времени. Очевидно, что прикладной интерес могут представить обе задачи.

Рассмотрим плоскую задачу динамики концентрации, ограничиваясь для простоты случаем равновесной сорбции. Тогда, очевидно, если $u(x, y, t)$ и $v(x, y, t)$ являются компонентами вектора скорости фильтрации $\mathbf{V}(x, y, t)$, уравнение (6) примет вид:

$$u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+m^*\frac{\partial f}{\partial t}=0 \tag{9}$$

и прямая задача, т. е. случай известных u и v, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения первого порядка относительно функции f при определенных начальных и краевых условиях. Не останавливаясь на подробностях, отметим лишь, что метод характеристик [3] позволяет решить эту задачу до конца.

Перейдем к обратной задаче. Очевидно, что поскольку в общем случае функции u и v независимы, уравнение (9) недостаточно для восстановления поля скоростей по известной функции $f(x, y, t)$, т. е. обратная задача не имеет в общем случае единственного решения.

Для замыкания проблемы следует использовать какие-либо дополнительные сведения о поле скоростей. Так, например, если известно, что одна из компонент u или v равна нулю, т. е. течение одномерно, задача становится однозначно разрешимой. В том случае, если, к примеру, $v=0$, получим

$$u=-m^*\frac{\partial f}{\partial t}\Big/\frac{\partial f}{\partial x} \tag{10}$$

Аналогично обстоит дело и в том случае, когда u и v постоянны. Простым поворотом системы координат задача сводится к только что рассмотренной.

Проанализируем иные возможности получения единственного решения.

Пусть течение таково, что скорость фильтрации имеет потенциал φ,— например, однородная жидкость движется в однородном пласте, стационарное течение газированной жидкости в однородном пласте, и т. д. [4]

$$\mathbf{V}=-\nabla\varphi \tag{11}$$

Тогда из уравнения (6) следует

$$-\nabla\varphi\nabla f+m^*\partial f/\partial t=0 \tag{12}$$

Пусть при фиксированном t_* линии уровня функции $f(x, y, t_*)$ образуют семейство $l(l_1, l_2, \ldots)$. Обозначим семейство линий, ортогональных к l, символом $n(n_1, n_2, \ldots)$ и примем линии l, n за координатные линии. Тогда, очевидно, при $t=t_*$

$$\nabla\varphi\nabla f=\frac{\partial\varphi(l, n, t_*)}{\partial l}\frac{\partial f(l, n, t_*)}{\partial l}$$

и из (12) следует

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=m^*\frac{\partial f(l, n, t_*)}{\partial t}\Big/\frac{\partial f(l, n, t_*)}{\partial l}=\gamma(l, n, t_*) \tag{13}$$

где γ — известная функция своих аргументов. Интегрируя (13) от l_0 до l, запишем:

$$\int_{l_0}^{l}\frac{\partial\varphi}{\partial l}dl=\int_{l_0}^{l}\gamma(l, n, t_*)\,dl=\gamma_1(l_0, l, n, t_*)$$

или

$$\varphi(l, n, t_*) = \varphi(l_0, n, t_*) + \gamma_1(l_0, l, n, t_*) \tag{14}$$

Из (14) следует, что, зная функцию φ на линии $l = l_0$, т. е. на линии равной концентрации, можно найти φ на всей совокупности линий n, пересекающих линию $l = l_0$. Иными словами, зная φ в какой-либо точке области, можно с помощью формулы (14) вычислить потенциал на всей линии из семейства n, проходящей через эту точку.

Очевидно, что если совокупность начальных значений функции φ задана на какой-либо линии из семейства n, найти значения φ в других точках области невозможно. Помимо (14), это следует из известного правила: для однозначного решения задачи с начальными условиями для уравнения первого порядка условия эти должны задаваться на линиях, не являющихся проекциями характеристик уравнения. Нетрудно убедиться, что семейство n как раз и является проекцией характеристик уравнения (12).

Таким образом, знание $f(x, y, t)$ позволяет по значению потенциала в одной точке вычислить его на некоторой линии. Если же потенциал φ известен на линии (она может быть и не замкнутой), его можно вычислить в некоторой области. Иными словами, информация о функции $f(x, y, t)$ позволяет поставить и решить новые и практически интересные задачи о построении поля потенциала, поля изобар и т. д.

Можно рассмотреть и более общий случай неоднородного по проницаемости пласта. Тогда:

$$\mathbf{V} = -\frac{k}{\mu}\nabla p \tag{15}$$

и уравнение (6) приобретет вид:

$$-\frac{k}{\mu}\nabla p\nabla f + m^*\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{16}$$

Если функция k / μ известна, можно поставить задачу об отыскании p, которая полностью совпадает с предыдущей задачей; решение ее дается формулой (14). Обратившись к уравнению (16), нетрудно заметить, что если считать известными p и f, можно найти k / μ

$$\frac{k}{\mu} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{m^*}{\nabla p\nabla f}. \tag{17}$$

Таким образом, знание полей давления и распределения концентрации позволяет вычислить такой важный параметр пласта, как k / μ. Существенно, что соотношение (17) является локальным, т. е. для определения k / μ в какой-либо точке пласта необходимы значения ∇p, ∇f и $\partial f / \partial t$ в той же точке. Для этого следует иметь значения p и f в окрестности точки (для вычисления градиента) и, кроме того, знать f в той же точке, но в другой, достаточно близкий момент времени.

Рассмотрим некоторые предельные случаи, предполагая конечность величины отношения k / μ.

Пусть, например, линии $f = \text{const}$ и $p = \text{const}$ в какой-либо точке ортогональны. Тогда $\nabla p\nabla f = 0$ и, следовательно, $\partial f / \partial t$ также равно нулю. Таким образом, в тех точках, где изобары и линии равной концентрации пересекаются под прямым углом, концентрация со временем не меняется, т. е. в этом смысле можно говорить о «застойной» зоне. Последнее не означает, что в этой точке нет движения жидкости. Напротив, движение происходит вдоль линии равной концентрации. Очевидно, тот же вывод следует, если $\partial f / \partial t = 0$, но $f \neq \text{const}$ по области. Последняя оговорка в достаточной мере тривиальна, так как случай $f = \text{const}$ никакой информации о структуре течения дать не может.

Поступило 8 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Юрьев К. В. К исследованию фильтрации в грунтах методом меченых атомов. Известия АН СССР, ОТН, № 3, 1957.
2. Глумов И. Ф., Гильманшин А. Ф. Применение фотоколориметрии нефтей в нефтепромысловом деле. Опыт разработки нефтяных и газовых месторождений. Гостоптехиздат, 1963.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, 1953.
4. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.