ЛИТЕРАТУРА

1. Buckley S. F., Leverett M. C. Trans. AIME., 1942.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
3. Бузинов С. Н., Чарный И. А. О движении скачков насыщенности при фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
4. Рыжик В. М., Чарный И. А., Чэнь Чжун-сян. О некоторых точных решениях уравнений нестационарной фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
5. Эфрос Д. А. Исследование фильтрации неоднородных систем. Гостоптехиздат, 1963.
6. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
7. Швидлер М. И. Теоретические исследования фильтрационных потоков, переходящих из однофазного состояния в двухфазное. Тр. ВНИИ, Гостоптехиздат, 1959, вып. 25.

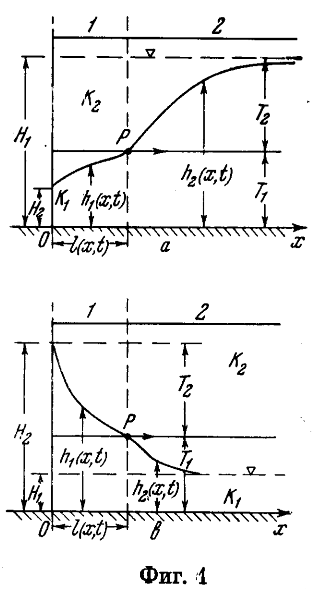
НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ВБЛИЗИ КАНАЛОВ И ДРЕН В МНОГОСЛОЙНЫХ ГРУНТАХ

Н. Н. ВЕРИГИН, Е. С. ДЗЕКЦЕР

(Москва)

Для расчета горизонтального дренажа, а также фильтрации из каналов и водохранилищ требуется исследование неустановившейся фильтрации в многослойной среде, состоящей из горизонтальных слоев грунта разной проницаемости. Ряд задач для случаев, когда депрессионная поверхность грунтовых вод располагается только в верхнем слое, рассмотрены ранее [1–6].

Однако часто требуется произвести расчет неустановившейся фильтрации в случае пересечения депрессионной кривой границы раздела двух, трех и более слоев грунта.



Фиг. 1

Рассмотрим фильтрацию из канала, прорезающего многослойную водоносную толщу до водоупора и фильтрацию к совершенной горизонтальной дрене. Обозначим напор в канале и дрене через H_2, а напор грунтового потока — через H_1 (фиг. 1, где a — дрена; b — канал).

В случае каналов с горизонтом воды выше уровня грунтовых вод $H_2 > H_1$, а в случае дрен $H_2 < H_1$.

1. Двухслойная среда (фиг. 1). Область фильтрации разбивается на две зоны: первую, где кривая депрессии находится только в верхнем слое с коэффициентом фильтрации k_2 — для канала, или только в нижнем слое с коэффициентом фильтрации k_1 — для дрены, и вторую, где она размещается только в нижнем слое (канал) или только в верхнем слое (дрена). Тогда уравнения движения грунтовых вод для выделенных зон запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \quad (0 < x < l_1(t)), \qquad a_1 = \frac{k_1 h_1^\circ}{\mu_1}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} \quad (l_1(t) < x < \infty), \qquad a_2 = \frac{k_2 h_2^\circ}{\mu_2} \tag{1.1}$$

$$h_1^\circ = T_1, \qquad h_2^\circ = T_2 + T_1 k_1 / k_2 \qquad \text{(для дрены)}$$

$$h_1^\circ = T_2 + T_1 k_1 / k_2, \qquad h_2^\circ = T_1 \qquad \text{(для канала)}$$

Здесь $l_1(t)$ — длина первой зоны, h_1° и h_2° — средняя глубина потока в первой и второй зонах.

Начальные и граничные условия

$$h_2(x,0) = H_1, \qquad h_2(\infty, t) = H_1, \qquad h_1(0,t) = H_2 = \text{const} \tag{1.2}$$
$$h_1(l_1,t) = h_2(l_1,t) = T_1, \qquad \partial h_1(l_1,t) / \partial x = \partial h_2(l_1,t) / \partial x$$

Решение для обеих зон находится в виде функций, удовлетворяющих уравнению (1.1)

$$h_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right), \qquad h_2 = A_2 + B_2 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) \tag{1.3}$$

Из начального и граничных условий (1.2) определяем коэффициенты

$$B_2 = \frac{H_1 - T_1}{\operatorname{erfc}(\beta_1)}, \quad B_1 = \frac{T_1 - H_2}{\operatorname{erf}(\beta_{01})}, \quad A_1 = H_2, \quad A_2 = \frac{T_1 - H_1 \operatorname{erfc}(\beta_1)}{\operatorname{erfc}(\beta_1)}$$

Здесь

$$\beta_{01} = \frac{l_1}{2\sqrt{a_1 t}}, \quad \beta_1 = \frac{l_1}{2\sqrt{a_2 t}}, \quad \beta_{01} = \beta_1 \rho, \quad \rho = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/2} \tag{1.4}$$

Из последнего условия (1.2) имеем соотношение

$$\frac{(T_1 - H_2)\exp(-\beta_{01}^2)}{\sqrt{a_1}\operatorname{erf}(\beta_{01})} = \frac{(H_1 - T_1)\exp(-\beta_1^2)}{\sqrt{a_2}\operatorname{erfc}(\beta_1)} \tag{1.5}$$

Отсюда с учетом (1.4)

$$\beta_1 = \left[\frac{1}{1-\rho^2}\ln\left(\frac{H_1 - T_1}{T_1 - H_2}\,\frac{\operatorname{erf}(\rho\beta_1)}{\operatorname{erfc}(\beta_1)}\,\frac{1}{\rho}\right)\right]^{1/2} \tag{1.6}$$

Для значений $\beta < 0.05$ можно принять

$$\operatorname{erf}(\beta) = 2\beta / \sqrt{\pi}, \qquad \exp(\beta_{01}) \approx \exp(\beta_1) \approx 1$$

Тогда из (1.6) получаем

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{T_1 - H_2}{H_1 - H_2} \tag{1.7}$$

Решение задачи примет вид

$$h_1(x,t) = H_2 + \frac{T_1 - H_2}{\operatorname{erf}(\beta_{01})}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right), \quad h_2(x,t) = H_1 - \frac{H_1 - T_1}{\operatorname{erfc}(\beta_1)}\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) \tag{1.8}$$

Фильтрационный расход из канала на единицу его длины (в обе стороны)

$$Q = -2(k_1 T_1 + k_2 T_2)\left|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi a_1 t}} k_2 h_1^\circ \frac{H_2 - T_1}{\operatorname{erf}(\beta_{01})}\exp(-\beta_{01}^2) \tag{1.9}$$

Объем воды, теряемый на фильтрацию из канала за время t, составляет

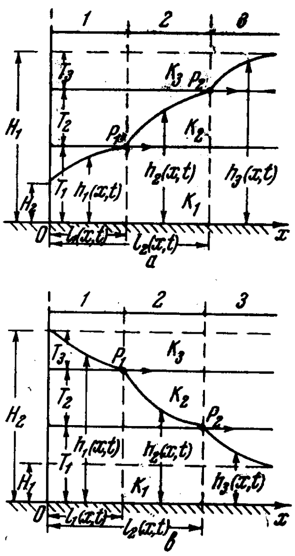
$$V = 2Qt \tag{1.10}$$

Фильтрационный расход в дрену (с обеих сторон)

$$Q = 2k_1 H_2 \left|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \frac{2}{\sqrt{\pi a_1 t}} k_1 H_2 \frac{T_1 - H_2}{\operatorname{erf}(\beta_{01})}\exp(-\beta_{01}^2) \tag{1.11}$$

2. Трехслойная среда, обобщение на случай многослойных сред (фиг. 2, где a — дрена, b — канал).

Постановка задачи аналогична рассмотренной выше. Требуется найти функции $h_1(x, t)$, $h_2(x, t)$ и $h_3(x, t)$, удовлетворяющие уравнениям



Фиг. 2

$$\frac{\partial h_1(x,t)}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 h_1(x,t)}{\partial x^2} \qquad (0 < x < l_1(t))$$

$$\frac{\partial h_2(x,t)}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 h_2(x,t)}{\partial x^2} \qquad (l_1(t) < x < l_2(t)) \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial h_3(x,t)}{\partial t} = a_3 \frac{\partial^2 h_3(x,t)}{\partial x^2} \qquad (l_2(t) < x < \infty)$$

При начальных и граничных условиях

$$\frac{\partial h_1(l_1,t)}{\partial x} = \frac{\partial h_2(l_1,t)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial h_2(l_2,t)}{\partial x} = \frac{\partial h_3(l_2,t)}{\partial x}$$

$$h_1(0,t) = H_2, \qquad h_3(x,0) = H_1, \qquad h_3(\infty,t) = H_1$$

$$h_1[l_1(t), t] = h_2[l_1(t), t] = T \qquad (2.2)$$

$$h_2[l_2(t), t] = h_3[l_2(t), t] = T'$$

Здесь

$$T = T_1, \qquad T' = T_1 + T_2 \quad \text{(для дрены)}$$

$$T = T_1 + T_2, \qquad T' = T_1 \quad \text{(для канала)}$$

Решение по-прежнему принимается в форме

$$h_m(x,t) = A_m + B_m \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_m t}}\right) \qquad (m = 1, 2, 3) \qquad (2.3)$$

Находим коэффициенты $A_1, \ldots, B_1$ из условий (2.2)

$$A_1 = H_2, \quad A_2 = \frac{T \operatorname{erf}(\beta_{02}) - T' \operatorname{erf}(\beta_1)}{\operatorname{erf}(\beta_{02}) - \operatorname{erf}(\beta_1)}, \quad A_3 = \frac{T' - H_1 \operatorname{erf}(\beta_2)}{\operatorname{erfc}(\beta_2)}$$

$$B_1 = \frac{T - H_2}{\operatorname{erf}(\beta_{01})}, \quad B_2 = \frac{T' - T}{\operatorname{erf}(\beta_{02}) - \operatorname{erf}(\beta_1)}, \quad B_3 = \frac{H_1 - T'}{\operatorname{erfc}(\beta_2)}$$

$$\beta_{01} = \frac{l_1}{2\sqrt{a_1 t}}, \quad \beta_1 = \frac{l_1}{2\sqrt{a_2 t}}, \quad \beta_{01} = \rho_1 \beta_1, \quad \rho_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{1/2}$$

$$\beta_{02} = \frac{l_2}{2\sqrt{a_2 t}}, \quad \beta_2 = \frac{l_2}{2\sqrt{a_3 t}}, \quad \beta_{02} = \rho_2 \beta_2, \quad \rho_2 = \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^{1/2} \qquad (2.4)$$

Подставляя эти выражения в (2.3), получаем

$$h_1(x,t) = H_2 + \frac{T - H_2}{\operatorname{erf}(\beta_{01})} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)$$

$$h_2(x,t) = \frac{T \operatorname{erf}(\beta_{02}) - T' \operatorname{erf}(\beta_1)}{\operatorname{erf}(\beta_{02}) - \operatorname{erf}(\beta_1)} + \frac{T' - T}{\operatorname{erf}(\beta_{02}) - \operatorname{erf}(\beta_1)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right) \qquad (2.5)$$

$$h_3(x,t) = \frac{T' - H_1 \operatorname{erf}(\beta_2)}{\operatorname{erfc}(\beta_2)} + \frac{H_1 - T'}{\operatorname{erfc}(\beta_2)} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_3 t}}\right)$$

Характеристические уравнения будут иметь следующий вид:

$$\frac{T-H_2}{\sqrt{a_1}}\frac{\exp(-\rho_1^2\beta_1^2)}{\operatorname{erf}(\rho_1\beta_1)}=\frac{T'-T}{\sqrt{a_2}}\frac{\exp(-\beta_1^2)}{\operatorname{erf}(\rho_2\beta_2)-\operatorname{erf}(\beta_1)} \qquad (2.6)$$
$$\frac{T'-T}{\sqrt{a_2}}\frac{\exp(-\rho_2^2\beta_2^2)}{\operatorname{erf}(\rho_2\beta_2)-\operatorname{erf}(\beta_1)}=\frac{H_1-T'}{\sqrt{a_3}}\frac{\exp(-\beta_2^2)}{\operatorname{erfc}(\beta_2)}$$

или в более удобной для решения форме

$$\beta_2=\frac{1}{\rho_2}\operatorname{erf}^{-1}\left\{\operatorname{erf}(\beta_1)+\frac{T'-T}{T-H_2}\frac{1}{\rho_1}\operatorname{erf}(\rho_1\beta_1)\exp\left[-\beta_1^2(1-\rho_1^2)\right]\right\}$$
$$\beta_1=\operatorname{erf}^{-1}\left\{\operatorname{erf}(\rho_2\beta_2)-\frac{T'-T}{H_1-T'}\rho_2\operatorname{erfc}(\beta_2)\exp\left[\beta_2^2(1-\rho_2^2)\right]\right\} \qquad (2.7)$$

Из уравнений (2.7) величины β_1 и β_2 определяются методом последовательных приближений.

При значениях $\beta_{1,2}<0.05$ из (2.7) имеем

$$\beta_1=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\rho_2\frac{T-H_2}{H_1-H_2},\qquad \beta_2=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{T'-H_2}{H_1-H_2} \qquad (2.8)$$

Полученные результаты легко обобщаются для n-слойной задачи. Для k-ой зоны ($k\neq 1$ и $k\neq n$) получаем

$$A_k=\frac{T\operatorname{erf}(\beta_{0k})-T'\operatorname{erf}(\beta_{k-1})}{\operatorname{erf}(\beta_{0k})-\operatorname{erf}(\beta_{k-1})},\qquad B_k=\frac{T'-T}{\operatorname{erf}(\beta_{0k})-\operatorname{erf}(\beta_{k-1})}$$

Для слоя $k=n$ будет

$$A_n=\frac{T'-H_1\operatorname{erf}(\beta_{n-1})}{\operatorname{erf}(\beta_{n-1})},\qquad B_n=\frac{H_1-T'}{\operatorname{erf}(\beta_{n-1})}$$

а для слоя $k=1$ значения A_1 и B_1 находятся в (2.4); решение $h_k(x,t)$ имеет вид

$$h_k(x,t)=A_k+B_k\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a_k\sqrt{t}}\right)\qquad (k=1,2,\ldots,n) \qquad (2.9)$$

Здесь

$$T=T_1+T_2+\ldots+T_{k-1},\qquad T'=T_1+T_2+\ldots+T_k \qquad \text{(для дрены)}$$
$$T=T_1+T_2+\ldots+T_k,\qquad T'=T_1+T_2+\ldots+T_{k-1} \qquad \text{(для канала)}$$

Характеристические уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{B_k\exp(-\beta_{0k}^2)}{\sqrt{a_k}}=\frac{B_{k+1}\exp(-\beta_k^2)}{\sqrt{a_{k+1}}}\qquad (k=2,3,\ldots,n-1) \qquad (2.10)$$

Использование полученных зависимостей при инженерных расчетах, особенно для многослойной среды, вызывает технические трудности из-за необходимости решения трансцендентных уравнений для определения коэффициента β. Поэтому целесообразно рассмотреть приближенный метод решения, предложенный Л. С. Лейбензоном для задачи Стефана [5]. В обобщенном виде сущность этого метода заключается в следующем. Подбираются функции $h_1(x,t)$ и $h_2(x,t)$, удовлетворяющие начальным и граничным условиям. Эти функции подставляют в условие сопряжения на границе раздела двух сред и полученное дифференциальное уравнение решают относительно $l(t)$.

Рассмотрим приведенную выше задачу для двухслойной среды. Принимаем закон распределения в первой и второй зонах в следующем виде соответственно:

$$h_1(x,t)=H_2+\frac{T_1-H_2}{l_1(t)}x,\qquad h_2(x,t)=T_1+(H_1-T_1)\operatorname{erf}\left(\frac{x-l(t)}{2\sqrt{a_2t}}\right) \qquad (2.11)$$

Нетрудно видеть, что для взятых функций первое, третье и четвертое условия (1.2) удовлетворяются.

Согласно последнему условию (1.2),

$$\frac{T_1 - H_2}{l_1(t)} = \frac{H_1 - T_1}{\sqrt{\pi a_2 t}}, \text{ или } l_1(t) = 2\beta_1 \sqrt{a_2 t} \quad \left(\beta_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{T_1 - H_2}{H_1 - T}\right) \tag{2.12}$$

Вводя в (2.11) значение l по (2.12), найдем

$$h_1(x, t) = H_2 + \frac{x}{2\sqrt{\pi a_2 t}}(T_1 - H_2) \tag{2.13}$$

$$h_2(x, t) = T_1 + (H_1 - T_1)\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{T_1 - H_2}{H_1 - T_1}\right)$$

Выясним степень точности метода Л. С. Лейбензона. Приближенно можно считать, что она определяется ошибкой, допускаемой при замене гауссиана линейной функцией $2z / \sqrt{\pi}$. Эта ошибка будет

$$\sigma = \frac{\mathrm{erf}\, z - 2z/\sqrt{\pi}}{\mathrm{erf}\, z} \tag{2.14}$$

При $\sigma = 0.05$ величина $z = 0.36$.

Для многослойной среды решение для слоя k будет

$$h_k(x, t) = T + \frac{T' - T}{l_k}x \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{2.15}$$

Для слоя $k = n$ имеем

$$h_n(x, t) = T' + (H_1 - T')\,\mathrm{erf}\left(\frac{x - l_{n-1}(t)}{2\sqrt{a_n t}}\right) \tag{2.16}$$

Тогда характеристические уравнения будут иметь следующий вид:

$$\frac{T_1 - H_2}{l_1(t)} = \ldots \frac{T' - T}{l_k(t)} = \ldots = \frac{H_1 - T_{n-1}}{\sqrt{\pi a_n t}} \tag{2.17}$$

Отсюда

$$l_k(t) = \sqrt{\pi a_n t}\,\frac{T' - T}{H_1 - T_{n-1}} \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1) \tag{2.18}$$

$$T = T_1 + \ldots + T_{k-1}, \quad T' = T_1 + \ldots + T_k, \quad T_{n-1} = T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} \quad \text{(для дрены)}$$

$$T = T_1 + \ldots + T_k, \quad T' = T_1 + \ldots + T_{k-1}, \quad T_{n-1} = T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-2} \quad \text{(для канала)}$$

Отметим, что для двухслойной среды рассмотренная задача идентична задаче Стефана в случае, когда теплота фазового перехода равна нулю.

Поступило 12 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. К теории неустановившихся движений в многослойной среде. ПММ, 1951, т. 15, вып. 4.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.
3. Веригин Н. Н., Шестаков В. М. Методы расчета движения грунтовых вод в двухслойной среде. Госстройиздат, 1954.
4. Костяков А. Н., Фаворин Н. Н., Аверьянов С. Ф. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. Изд-во АН СССР, 1956.
5. Лейбензон Л. С. Руководство по нефтепромысловой механике. Гостехиздат, 1931.
6. Веригин Н. Н. Расчет дренажа в зоне подтопления водохранилищ и подпертых бьефов. Гидротехника и мелиорация, 1949, № 4.