ЛИТЕРАТУРА

1. Шейнберг С. А. Газовая смазка подшипников скольжения. Сб. Трение и износ в машинах, Изд-во АН СССР, 1953, т. 8.
2. Коровчинский М. В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. Машгиз, 1959.
3. Elrod H., Burgdorfer A. Refinement of the theory of the infinitely long self-acting gas labricated journal bearing. Report, Ferst international simposium on gas labricated bearing, Wachington, 1959.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1957.
5. Лойцянский Л. Г., Степанянц Л. Г. Гидродинамическая теория сферического подвеса. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 198, Машгиз, 1958.

ВЫТЕСНЕНИЕ ОДНОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗОНЫ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ

М. В. ФИЛИНОВ

(Москва)

Рассмотрим задачу о нагнетании жидкости *1* в бесконечную область, занятую жидкостью *2*. Будем предполагать, что образующаяся зона совместной фильтрации отделяется четкой подвижной границей от внешней бесконечной зоны, и на границе раздела существует скачок насыщенности. Для случая фильтрации двух несжимаемых жидкостей подобная задача была впервые решена Баклеем и Левереттом [1].

В дальнейшем указанная задача исследовалась И. А. Чарным [2] и его учениками [3, 4], а также Д. А. Эфросом [5] и М. И. Швидлером [7]. Будем считать для простоты, что в зоне совместной двухфазной фильтрации жидкости *1* и *2* несжимаемы, тогда как во внешней бесконечной зоне жидкость *2* является упругой. Рассмотрим случаи линейного и осесимметричного движений.

1. Линейное вытеснение. В зоне двухфазного движения фильтрация каждой из жидкостей описывается уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_1^*(\sigma)}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial x}\right] = m\frac{\partial\sigma}{\partial t} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{k_2^*(\sigma)}{\mu_2}\frac{\partial p_1}{\partial x}\right] = -m\frac{\partial\sigma}{\partial t} \qquad (0<x<x_0(t)) \tag{1.1}$$

Во внешней области справедливо уравнение упругого режима фильтрации

$$a\frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial p_2}{\partial t} \qquad 0 < x < \infty \tag{1.2}$$

Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид

$$p_1(0,t) = p_1 = \mathrm{const}, \qquad p_2(\infty,t) = p_0 = \mathrm{const} \tag{1.3}$$

$$p_1(x_0,t) = p_2(x_0,t) = p^0, \qquad \left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1} + \frac{k_2(\sigma)}{\mu_2}\right)\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{k_0}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial x}$$

Неизвестными функциями являются давления $p_1(x,t)$ и $p_2(x,t)$, насыщенность вытесняющей жидкости σ и расстояние от подвижной границы раздела $x_0(t)$. В равенствах (1.1) — (1.3) введены следующие обозначения: μ_1 и μ_2 — вязкость жидкостей *1* и *2*; m — пористость; K — модуль совместной упругости жидкости и пористой среды; a — коэффициент пьезопроводности; $k_1^*(\sigma) = k_0k_1(\sigma)$, $k_2^*(\sigma) = k_0k_2(\sigma)$ — соответствующие фазовые проницаемости; k_0 — проницаемость для однородной жидкости. Индексы 1 и 2 относятся соответственно к зоне смеси и внешней зоне.

В такой постановке задача является автомодельной.

Подстановка

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{at}}, \qquad a = \frac{kK}{m\mu_2} \tag{1.4}$$

переводит уравнения (1.1) и (1.2) в соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{d\eta}\left[\mu_0 k_1(\sigma)\frac{dp_1^*}{d\eta}\right] = -2\eta\frac{d\sigma}{d\eta}, \quad \frac{d}{d\eta}\left[k_2(\sigma)\frac{dp_1^*}{d\eta}\right] = 2\eta\frac{d\sigma}{d\eta} \quad (0<\eta<\eta_0) \qquad (1.5)$$

$$\frac{d^2p_2^*}{d\eta^2} + \eta\frac{dp_2^*}{d\eta} = 0 \quad (\eta_0 < \eta < \infty) \quad \left(\mu_0 = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \ p_i^* = \frac{p_i}{K}\right) \qquad (1.6)$$

В дальнейшем индекс (*) опускается.

Сложим уравнения (1.5)

$$\frac{d}{d\eta}\left[(\mu_0 k_1 + k_2)\frac{dp_1}{d\eta}\right] = 0 \qquad (1.7)$$

т. е.

$$\frac{dp_1}{d\eta}(\mu_0 k_1 + k_2) = C_1, \quad \frac{dp_1}{d\eta} = \frac{C_1}{\mu_0 k_1 + k_2} \qquad (1.8)$$

или

$$p_1(\eta) = C_1 \int \frac{d\eta}{\mu_0 k_1 + k_2} + C_2 \qquad (1.9)$$

Решение (1.9) дает распределение давления в области совместного движения жидкостей; C_1 и C_2 — пока неопределенные постоянные.

Подставляя второе выражение равенства (1.8) в первое равенство (1.5), получим

$$(c_1 f'(\sigma) + 2\eta)\frac{d\sigma}{d\eta} = 0, \quad f(\sigma) = \frac{\mu_0 k_1(\sigma)}{\mu_0 k_1(\sigma) + k_2(\sigma)} \qquad (1.10)$$

Здесь $f(\sigma)$ — функция насыщенности (так называемая функция Леверетта).

Из (1.10) следует, пренебрегая решением $\sigma = \text{const}$ [1], что

$$C_1 f'(\sigma) = -2\eta \qquad (1.11)$$

Выражение (1.11) характеризует распределение насыщенности в зоне смеси. Об определении фронтовой насыщенности и насыщенности на источнике будет сказано ниже.

Найдем распределение давления во внешней зоне. Решая уравнение (1.6), получим

$$p_2(\eta) = A_2\Phi(\eta) + B_2, \quad \Phi(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\eta \exp(-u^2)\,du \qquad (1.12)$$

Перейдем к определению постоянных C_1, C_2, A_2, B_2. Из выражения (1.9) и первого из условий (1.3) имеем

$$C_2 = p_1 \qquad (1.13)$$

Подставляя первое условие (1.4) и (1.13) в (1.9), получим

$$C_1 = -\frac{p_1 - p^0}{G(\eta_0)}, \quad G(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} \frac{d\eta}{\mu_0 k_1 + k_2} \qquad (1.14)$$

Подставляя второе условие (1.3) в решение (1.12), получим для B_2

$$B_2 = p_0 - A_2 \qquad (1.15)$$

Из первого условия (1.4) и (1.12) найдем

$$A_2 = -\frac{p^0 - p_0}{1 - \Phi(\eta_0)}, \qquad (1.16)$$

---

[1] Решение $\sigma = \text{const}$ имеет смысл, когда на кривой имеются изломы. В нашем случае предполагается, что $f(\sigma)$ не имеет угловых точек.

Таким образом, распределение давления в зоне смеси и внешней области, занятой чистой жидкостью 2, имеет вид

$$p_1(\eta) = p_1 - (p_1 - p^0)\frac{G(\eta)}{G(\eta_0)}, \quad p_2(\eta) = p_0 + (p^0 - p_0)\frac{1 - \Phi(\eta)}{1 - \Phi(\eta_0)} \tag{1.17}$$

Исключим давление на границе раздела p^0 из (1.17), для чего воспользуемся вторым условием (1.3), выражающим равенство нормальных составляющих скоростей фильтрации смеси и чистой жидкости 2. Получим

$$p^0 = \frac{p_1 + p_0 F(\eta_0)}{1 + F(\eta_0)}, \quad F(\eta_0) = \frac{2\exp(-\eta_0^2)G(\eta_0)}{\sqrt{\pi}(1 - \Phi(\eta_0))} \tag{1.18}$$

Учитывая выражение для p^0, напишем окончательные равенства для давлений в соответствующих областях и постоянной

$$p_1(\eta) = p_1 - (p_1 - p_0)\frac{F(\eta_0)}{1 + F(\eta_0)}\frac{G(\eta)}{G(\eta_0)} \tag{1.19}$$

$$p_2(\eta) = p_0 + (p_1 - p_0)\frac{1 - \Phi(\eta)}{[1 - \Phi(\eta_0)][1 + F(\eta_0)]}, \quad C_1 = -\frac{(p_1 - p_0)F(\eta_0)}{[1 + F(\eta_0)]G(\eta_0)} \tag{1.20}$$

Остается найти расстояние η_0 до фронта вытеснения и тогда по равенствам (1.19) и (1.20) можем найти распределение давления. Найдем η_0.

Из соображений материального баланса для вытесняющей жидкости на фронте вытеснения имеем

$$m\sigma_0\frac{dx_0}{dt} = -\left(\frac{k_1}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)_{x=x_0} \tag{1.21}$$

Индекс (0) указывает, что соответствующая величина относится к фронту вытеснения. Из (1.19) и (1.21) получим

$$\eta_0 = \frac{F(\eta_0)(p_1 - p_0)f(\sigma_0)}{2\sigma_0[1 + F(\eta_0)]G(\eta_0)} \tag{1.22}$$

Как и следовало ожидать, η_0 зависит только от параметров пористой среды, жидкости и граничных условий.

Найдем насыщенность на фронте. Распределение насыщенности в зоне смеси определяется равенством (1.11). Оно справедливо и на фронте вытеснения, где имеет вид

$$C_1 f'(\sigma_0) = -2\eta_0 \tag{1.23}$$

С другой стороны, положение фронта η_0 определяется равенством (1.22). Сравнивая (1.22) и (1.23) и исключая η_0, получим

$$f'(\sigma_0) = \sigma_0^{-1}f(\sigma_0) \tag{1.24}$$

Последнее равенство хорошо известно. Оно было из других соображений получено И. А. Чарным и позволяет определять фронтовую насыщенность. Геометрически такое определение сводится (без учета остаточной насыщенности) к построению касательной, проводимой из начала координат, к кривой $f(\sigma)$ в координатах $f(\sigma)$ и σ. Точка, отсекаемая перпендикуляром, опущенным на ось σ, даст положение фронтовой насыщенности.

Насыщенность σ на источнике определится из (1.11) при $\eta \to 0$. Принимая $\eta = 0$, получим $f'(\sigma) = 0$ или $k_2(\sigma) = 0$, т. е. $\sigma = 1$.

Этого следовало ожидать, поскольку заканчивается чистая жидкость 1, а остаточная насыщенность не учитывается. Определим дебит на единицу площади галереи

$$Q = -\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial x}\bigg|_{x\to 0} = am(p_1 - p_0)\frac{F(\eta_0)G'(\eta_0)}{[1 + F(\eta_0)]G(\eta_0)}\frac{1}{2\sqrt{at}} =$$

$$= \frac{(p_1 - p_0)m\sqrt{a}}{2[1 + F(\eta_0)]G(\eta_0)}\frac{1}{\sqrt{t}} \tag{1.25}$$

Получим в линейном случае, как и в других автомодельных задачах подобного рода, Q обратно пропорционально $\sqrt{t}$ [6].

Окончательно можно наметить следующий ход решения задачи. Прежде всего из (1.24) определяется σ_0. Определив σ_0 из (1.22), получаем положение фронта η_0. При этом для вычисления интегралов, зависящих от η, следует перейти к интегрированию по σ, воспользовавшись равенством (1.11). После этого легко построить распределение насыщенности и давления в соответствующих областях.

2. Осесимметричное движение. Уравнения фильтрации для каждой из фаз в зоне смеси имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{k_1^*(\sigma)}{\mu_1} r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right] = mr\frac{\partial\sigma}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{k_2(\sigma)}{\mu_2} r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right] = -mr\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$
$$(0 < r < r_0(t)) \tag{2.1}$$

Уравнение движения во внешней зоне

$$a\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right] = r\frac{\partial p_2}{\partial t} \qquad (r_0 < r < \infty) \tag{2.2}$$

Начальные и граничные условия будут

$$Q = -2\pi h\left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1}+\frac{k_2(\sigma)}{\mu_2}\right)\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r\to 0} = \text{const}, \quad p_2(\infty, t) = p_2(r, 0) = p_0 \tag{2.3}$$

На подвижной границе раздела

$$p_1(r_0, t) = p_2(r_0, t) = p^0, \quad \left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1}+\frac{k_2(\sigma)}{\mu_2}\right)\frac{\partial p_1(r_0, t)}{\partial r} = \frac{k_0}{\mu_2}\frac{\partial p_2(r_0, t)}{\partial r} \tag{2.4}$$

Отличие приведенных граничных условий от условий предыдущего параграфа состоит в задании постоянного расхода жидкости на скважине вместо постоянного движения. Остальные условия прежние.

Подстановка (1.5) переводит уравнения (2.1) — (2.2) в соответствующие обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\frac{d}{d\eta}\left[\mu_0 k_1(\sigma)\eta\frac{dp_1}{d\eta}\right] = -2\eta^2\frac{d\sigma}{d\eta}, \qquad \frac{d}{d\eta}\left[k_2(\sigma)\eta\frac{dp_1}{d\eta}\right] = 2\eta^2\frac{d\sigma}{d\eta} \tag{2.5}$$

$$\frac{d^2p_2}{d\eta^2}+\left(\frac{1}{2\eta}+\eta\right)\frac{dp_2}{d\eta} = 0 \qquad (\eta_0 < \eta < \infty) \tag{2.6}$$

Сложим уравнения (2.5)

$$\frac{d}{d\eta}\left[(\mu_0 k_1 + k_2)\eta\frac{dp_1}{d\eta}\right] = 0 \tag{2.7}$$

Из (2.7) можно найти первый интеграл

$$\eta\frac{dp_1}{d\eta} = \frac{C_1}{\mu_0 k_1 + k_2} \tag{2.8}$$

Интегрируя (2.8), будем иметь

$$p_1(\eta) = C_1\int\frac{1}{\mu_0 k_1 + k_2}\frac{d\eta}{\eta} + C_2 \tag{2.9}$$

Из решения (2.9), определив произвольные постоянные C_1 и C_2, можно найти распределение давления в зоне смеси.

Подставляя второе выражение равенства (2.8) в первое из уравнений (2.5), получим

$$(C_1 f'(\sigma) + 2\eta^2)\frac{d\sigma}{d\eta} = 0 \tag{2.10}$$

Здесь $f(\sigma)$ — функция Леверетта. Из (2.10) следует, что

$$C_1 f'(\sigma) = -2\eta^2 \tag{2.11}$$

Равенство (2.11) позволяет определить насыщенность в любой точке пласта.

Решая уравнение (2.6), найдем распределение давления во внешней зоне, которое имеет вид

$$p_2(\eta) = A_0 \mathrm{Ei}(-\eta^2) + A_1, \qquad -\mathrm{Ei}(-\eta^2) = \int\limits_{\eta^2}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du \tag{2.12}$$

Постоянные C_1, C_2, A_0 и A_1 определяются из граничных условий (2.3), (2.4) и имеют вид

$$C_1 = -\frac{Q}{2\pi amh}$$

$$C_2 = p_0 - \frac{Q\exp(\eta_0^2)}{4a\pi mh}\mathrm{Ei}(-\eta_0^2) + \frac{Q}{2a\pi mh}\int\limits_0^{\eta_0} \frac{1}{\mu_0 k_1 + k_2}\frac{d\eta}{\eta} \tag{2.13}$$

$$A_0 = -\frac{Q\exp(\eta_0^2)}{4a\pi mh}, \qquad A_1 = p_0 \tag{2.14}$$

Подставляя найденные коэффициенты в (2.9) и (2.12), получим выражение для распределения давления в соответствующих зонах

$$p_1(\eta) = p_0 - \frac{Q\exp(\eta_0^2)}{4a\pi mh}\mathrm{Ei}(-\eta_0^2) + \frac{Q}{2a\pi mh}\int\limits_{\eta_0}^{\eta} \frac{1}{\mu_0 k_1 + k_2}\frac{d\eta}{\eta}$$

$$p_2(\eta) = p_0 - \frac{Q\exp(\eta_0^2)}{4a\pi mh}\mathrm{Ei}(-\eta_0^2) \tag{2.15}$$

Рассматривая материальный баланс вытесняющей фазы на фронте вытеснения, получим соотношение

$$m\sigma_0 \frac{dr_0}{dt} = -\left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)_{r=r_0} \tag{2.16}$$

Из первого равенства (2.15) и (2.16) имеем для η_0

$$\eta_0^2 = \frac{Qf(\sigma_0)}{4a\pi mh\sigma_0} \tag{2.17}$$

Равенство (2.17) позволяет, зная фронтовую насыщенность, определить положение границы раздела. Для нахождения фронтовой насыщенности поступаем следующим образом. В выражении (2.11), справедливом во всей области смеси, в том числе и на фронте вытеснения, положим $\eta = \eta_0$.

Из полученного выражения и выражения (2.17) найдем, что

$$f'(\sigma_0) = \sigma_0^{-1} f(\sigma_0) \tag{2.18}$$

Для определения насыщенности при $r = 0$, в равенстве (2.11) положим $\eta = 0$. Тогда получим

$$f'(\sigma) = 0, \quad k_2(\sigma) = 0, \quad \text{или} \quad \sigma = 1$$

Окончательно ход решения задачи полностью совпадает с указанным в конце предыдущего параграфа.

Автор благодарит И. А. Чарного за полезные советы, полученные при обсуждении настоящей работы.

Поступило 23 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Buckley S. F., Leverett M. C. Trans. AIME., 1942.
2. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
3. Бузинов С. Н., Чарный И. А. О движении скачков насыщенности при фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 7.
4. Рыжик В. М., Чарный И. А., Чэнь Чжун-сян. О некоторых точных решениях уравнений нестационарной фильтрации двухфазной жидкости. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
5. Эфрос Д. А. Исследование фильтрации неоднородных систем. Гостоптехиздат, 1963.
6. Веригин Н. Н. Нагнетание вяжущих растворов в горные породы в целях повышения прочности и водонепроницаемости оснований гидротехнических сооружений. Изв. АН СССР, ОТН, 1952, № 5.
7. Швидлер М. И. Теоретические исследования фильтрационных потоков, переходящих из однофазного состояния в двухфазное. Тр. ВНИИ, Гостоптехиздат, 1959, вып. 25.

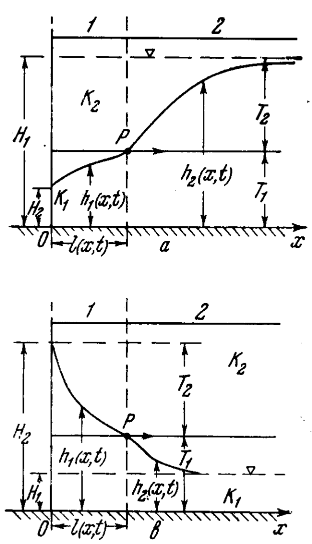
НЕУСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ВБЛИЗИ КАНАЛОВ И ДРЕН В МНОГОСЛОЙНЫХ ГРУНТАХ

Н. Н. ВЕРИГИН, Е. С. ДЗЕКЦЕР

(Москва)

Для расчета горизонтального дренажа, а также фильтрации из каналов и водохранилищ требуется исследование неустановившейся фильтрации в многослойной среде, состоящей из горизонтальных слоев грунта разной проницаемости. Ряд задач для случаев, когда депрессионная поверхность грунтовых вод располагается только в верхнем слое, рассмотрены ранее [1–6].

Однако часто требуется произвести расчет неустановившейся фильтрации в случае пересечения депрессионной кривой границы раздела двух, трех и более слоев грунта.



Фиг. 1

Рассмотрим фильтрацию из канала, прорезающего многослойную водоносную толщу до водоупора и фильтрацию к совершенной горизонтальной дрене. Обозначим напор в канале и дрене через H_2, а напор грунтового потока — через H_1 (фиг. 1, где a — дрена; b — канал).

В случае каналов с горизонтом воды выше уровня грунтовых вод $H_2 > H_1$, а в случае дрен $H_2 < H_1$.

1. Двухслойная среда (фиг. 1). Область фильтрации разбивается на две зоны: первую, где кривая депрессии находится только в верхнем слое с коэффициентом фильтрации k_2 — для канала, или только в нижнем слое с коэффициентом фильтрации k_1 — для дрены, и вторую, где она размещается только в нижнем слое (канал) или только в верхнем слое (дрена). Тогда уравнения движения грунтовых вод для выделенных зон запишутся следующим образом:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 h_1}{\partial x^2} \quad (0 < x < l_1(t)), \qquad a_1 = \frac{k_1 h_1^\circ}{\mu_1}$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 h_2}{\partial x^2} \quad (l_1(t) < x < \infty), \qquad a_2 = \frac{k_2 h_2^\circ}{\mu_2} \tag{1.1}$$

$$h_1^\circ = T_1, \qquad h_2^\circ = T_2 + T_1 k_1 / k_2 \qquad \text{(для дрены)}$$

$$h_1^\circ = T_2 + T_1 k_1 / k_2, \qquad h_2^\circ = T_1 \qquad \text{(для канала)}$$

Здесь $l_1(t)$ — длина первой зоны, h_1° и h_2° — средняя глубина потока в первой и второй зонах.