

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА

Я. М. КОТЛЯР

(Москва)

Уравнение Рейнольдса, описывающее распределение давления p в зазоре газового подшипника (фиг. 1), состоящего из движущейся со скоростью V в направлении оси x плоскости xy и неподвижной поверхности $z = h(x, y)$, как известно, имеет вид [1, 2]

$$(h^3 p p)_x + (h^3 p p)_y = \Lambda (h p)_x, \quad \Lambda = \frac{6\mu V R}{\delta^3 p_a} \quad (1)$$

Все входящие в уравнение (1) величины безразмерные: координаты x, y отнесены к некоторому характерному размеру R ; давление p — к атмосферному давлению p_a ; зазор h — к характерному размеру δ ; параметр Λ — безразмерная скорость; μ — коэффициент абсолютной вязкости. У всех полных подшипников зазор h , а следовательно, и давление p — функции периодические в направлении оси x , т. е.

$$h(x + 2\pi, y) = h(x, y), \quad p(x + 2\pi, y) = p(x, y) \quad (2)$$

то только этот случай и рассматривается в дальнейшем.

Уравнение (1) решается обычно при граничных условиях

$$p(x, y_-) = 1, \quad p(x, y_+) = 1 \quad (3)$$

соответствующих атмосферному давлению на нижнем (y_-) и верхнем (y_+) торцах подшипника.

Цель настоящей статьи заключается в определении асимптотических решений $p_\infty(x, y)$ уравнения (1), соответствующих значению параметра $\Lambda = \infty$, при любых периодических зазорах $h(x, y)$. Асимптотические решения представляют интерес по двум причинам. Во-первых, по ним можно судить о поведении решений уравнения (1) при больших значениях параметра Λ (скорости V). Во-вторых, при построении приближенных решений уравнения (1) часто приходится требовать, чтобы приближенное решение при $\Lambda \rightarrow \infty$ переходило в точное, для чего обычно нужно знать это точное асимптотическое решение.

Применительно к цилиндрическому подшипнику при соосном положении его вкладыша вопрос об асимптотических решениях ставился в работе [1].

Перейдем к определению асимптотических решений $p_\infty(x, y)$ уравнения (1). Полагая в этом уравнении $\Lambda = \infty$, получаем $(h p_\infty)_x = 0$, откуда

$$p_\infty^2 = F(y) / h^2(x, y) \quad (4)$$

где $F(y)$ — произвольная функция, для определения которой воспользуемся следующим свойством решений уравнения (1). Интегрируя обе части (1) по x от 0 до 2π и учитывая периодичность (2) функций h и p , при любом конечном значении параметра Λ , будем иметь [3]

$$\int_0^{2\pi} [h^3 (p^2)_y]_y dx = 0 \quad (5)$$

Условие непрерывности интеграла (5) при $\Lambda = \infty$ приводит к соотношению

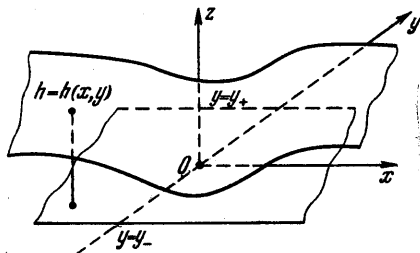
$$\int_0^{2\pi} [h^3 (p_\infty^2)_y]_y dx = 0 \quad (6)$$

которое позволит определить функцию $F(y)$. Физический смысл равенств (5), (6) очевиден, если учесть, что расход G газа в направлении оси y в рассматриваемом подшипнике с точностью до постоянного множителя определяется выражением

$$G \sim \int_0^{2\pi} h^3 (p^2)_y dx \quad (7)$$

Подставляя теперь выражение (4) под интеграл (6), приходим к линейному дифференциальному уравнению первого порядка для определения $F(y)$

$$h_0 F' - 2h_0' F = c_1 \left(h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x, y) dx \right) \quad (8)$$



Фиг. 1

Решая это уравнение, находим $F(y)$

$$F(y) = c_1 h_0^2(y) s(y) + c_2 h_0^2(y) \quad \left(s(y) = \int_{y_-}^y \frac{dy}{h^3(y)} \right) \quad (9)$$

Следовательно,

$$p_{\infty}(x, y) = \frac{h_0(y)}{h(x, y)} \sqrt{c_1 s(y) + c_2} \quad (10)$$

где c_1, c_2 — постоянные, подлежащие определению.

Постоянные c_1, c_2 нельзя найти при помощи граничных условий (3), так как асимптотическое решение (10) не удовлетворяет этим условиям ни при каких значениях постоянных c_1, c_2 . Введем для этой цели функцию $u(x, y)$, связанную с $p(x, y)$ так:

$$u_{yy} = [h^3(p^2)]_y, \quad u(x, y_-) = 0, \quad u(x, y_+) = 0 \quad (11)$$

Интегрируя (11), имеем

$$u_y = h^3(p^2)_y + c(x), \quad u(x, y) - u(x, y_-) = \int_{y_-}^y h^3(p^2)_y dy + c(x)(y - y_-)$$

При помощи формулы интегрирования по частям, используя условия (11) и (3), получаем явное выражение u через p , в следующем виде

$$u = h^3 p^2 - 3 \int_{y_-}^y h^2 h_y p^2 dy + \frac{y - y_-}{y_+ - y_-} \left[3 \int_{y_-}^{y_+} h^2 h_y p^2 dy + h_-^3 - h_+^3 \right] - h_-^3 \quad (12)$$

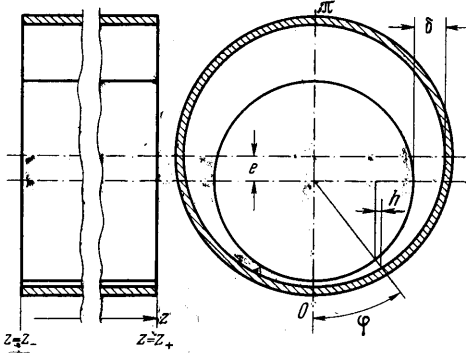
Здесь и ниже индексами « \leftarrow » или « \rightarrow » обозначаются значения соответствующих функций при $y = y_-$ или $y = y_+$. Существование, что выражение (12) удовлетворяет условиям (11) при конечных Λ и не удовлетворяет им при $\Lambda = \infty$.

Из (11) и (5) получаем (для конечных Λ)

$$\int_0^{2\pi} u_{yy} dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} u dx = 0 \quad (13)$$

Условие непрерывности второго интеграла (13) при $\Lambda = \infty$, подобно предыдущему, приводит к соотношению

$$\int_0^{2\pi} u_{\infty} dy = 0 \quad (14)$$



Фиг. 2

которое позволяет определить постоянные c_1 и c_2 формулы (10). С этой целью подставим выражение (4) в (12). Получим

$$u_{\infty} = hF - I + \frac{y - y_-}{y_+ - y_-} (I_+ + H_- - H_+) - H_-, \quad I = 3 \int_{y_-}^y h_y F dy, \quad H = h^3 \quad (15)$$

Введем обозначения

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y) dx, \quad f_{0-} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y_-) dx, \quad f_{0+} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y_+) dx \quad (16)$$

Здесь $f(x, y)$ — любая интегрируемая функция; f_0 — функция y ; f_{0-}, f_{0+} — числа. Тогда, интегрируя (15) по x от 0 до 2π , будем иметь

$$u_{\infty 0}(y) = h_0(y) F(y) - I_0(y) + \frac{y - y_-}{y_+ - y_-} (I_{0+} + H_{0-} - H_{0+}) - H_{0-} \quad (17)$$

Подсчитаем величину $I_0(y)$. Как следует из соотношений (16), (15) и (9)]

$$I_0(y) = \frac{3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_{y_-}^y h_y(x, y) F(y) dy \right] dx = 3 \int_{y_-}^y F \frac{dh_0}{dy} dy = 3c_1 \int_{y_-}^y h_0^2 s h_0' dy + 3c_2 \int_{y_-}^y h_0^2 h_0' dy$$

Отсюда, интегрируя по частям и используя (9), получаем

$$I_0(y) = c_1 [h_0^3 s - (y - y_-)] + c_2 [h_0^3 - h_{0-}^3] \quad (18)$$

Следовательно, $h_0 F - I_0 = c_1 (y - y_-) + c_2 h_{0-}^3$ и формула (17) принимает вид

$$u_{\infty 0} = c_2 h_{0-}^3 - H_{0-} + \frac{y - y_-}{y_+ - y_-} [c_1 h_{0+}^3 s_+ + c_2 h_{0+}^3 - H_{0+} - (c_2 h_{0-}^3 - H_{0-})]$$

Отсюда видно, что условие (14), которое в обозначениях (16) напишется: $u_{\infty 0} = 0$, будет удовлетворено, если

$$c_2 h_{0-}^3 - H_{0-} = 0, \quad c_1 h_{0+}^3 s_+ + c_2 h_{0+}^3 - H_{0+} = 0$$

т. е. для искомых постоянных получаются выражения

$$c_1 = \frac{\psi_+ - \psi_-}{s_+}, \quad c_2 = \psi_- \left(\psi = \frac{H_0(y)}{h_0^3(y)} \right) \quad (19)$$

Большинство применяемых на практике газовых опор имеет зазоры h , описываемые функцией

$$h = M(y) + N(y) \cos x \quad (20)$$

К числу таких опор относятся, в частности, цилиндрический и сферический подшипники. Так как в данном случае

$$h_0 = M(y), \quad H_0 = M^3(y) + \frac{3}{2} M(y) N^2(y), \quad s(y) = \int_{y-}^y \frac{dy}{M^3(y)} \quad (21)$$

то на основании формул (19) и (10) получаем следующие расчетные соотношения для определения асимптотического распределения давления $p_{\infty}(x, y)$:

$$\psi = 1 + \frac{3N^2}{2M^2}, \quad c_1 = \frac{\psi_+ - \psi_-}{s_+}, \quad c_2 = \psi_-, \quad p_{\infty} = \sqrt{c_1 s + c_2} \frac{M}{h} \quad (22)$$

где величина s определяется формулой (9).

В качестве первого примера применения полученных соотношений (22) рассмотрим цилиндрический газовый подшипник (фиг. 2). Уравнение Рейнольдса для такого подшипника имеет вид [1,2]

$$(h^3 p p_{\varphi})_{\varphi} + (h^3 p p_z)_z = \Lambda (h p)_{\varphi} \quad (23)$$

Здесь φ, z — цилиндрические координаты, причем z отнесена к радиусу R подшипника. Параметр Λ определяется формулой (1), в которой $V = \omega R$, где ω — угловая скорость вращения вкладыша; δ — равномерный зазор при эксцентриситете $e = 0$. Зазор h определяется так (ε — относительный эксцентриситет):

$$h = 1 - \varepsilon \cos \varphi \quad (\varepsilon = e / \delta) \quad (24)$$

Граничные условия, соответствующие атмосферному давлению на торцах подшипника, записываются так:

$$p(\varphi, z_-) = 1, \quad p(\varphi, z_+) = 1 \quad (25)$$

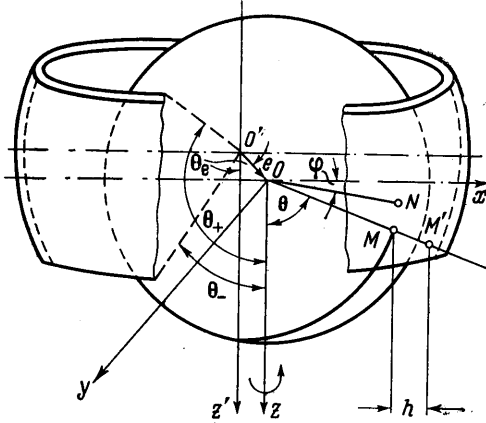
Подстановка $x = \varphi, y = z$ приводит уравнение (23) к виду (1), граничные условия (25) — к виду (3), а зазор (24) — к виду $h = 1 - \varepsilon \cos x$. При этом $M(y) = 1, N(y) = -\varepsilon$, а тогда на основании (22)

$$p_{\infty} = \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{2} \varepsilon^2}}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad (26)$$

В качестве второго примера рассмотрим сферический газовый подшипник (фиг. 3). Уравнение Рейнольдса для такого подшипника в сферических координатах φ, θ имеет вид

$$(h^3 p p_{\varphi})_{\varphi} + \sin \theta (h^3 \sin \theta p p_{\theta})_{\theta} = \Lambda \sin^2 \theta (h p)_{\varphi} \quad (27)$$

Здесь параметр Λ определяется по-прежнему формулой (1), и входящие в него величины имеют тот же смысл, что и в случае цилиндрического подшипника.



Фиг. 3

Зазор h определяется выражением [4]

$$h = 1 - \varepsilon (\cos \theta_e \cos \theta + \sin \theta_e \sin \theta \cos \varphi) \quad (28)$$

Граничные условия, соответствующие атмосферному давлению на торцах $\theta = \theta_-$ и $\theta = \theta_+$ подшипника, записываются так:

$$p(\varphi, \theta_-) = 1 \quad p(\varphi, \theta_+) = 1 \quad (29)$$

Подстановка [5]

$$x = \varphi, \quad y = \ln \operatorname{tg}^{1/2} \theta \quad (30)$$

приводит уравнение (27) к виду

$$(h^3 p p_x)_x + (h^3 p p_y)_y = \Lambda (h p)_x / \operatorname{ch}^2 y \quad (31)$$

граничные условия (29) — к виду (3), а зазор (28) к виду

$$h = 1 + \varepsilon (\cos \theta_e \operatorname{th} y - \sin \theta_e \cos x / \operatorname{ch} y) \quad (32)$$

так как

$$dy = \operatorname{csc} \theta d\theta, \quad \cos \theta = -\operatorname{th} y, \quad \sin \theta = 1/\operatorname{ch} y$$

Асимптотические решения ($\Lambda = \infty$) уравнений (31) и (1) совпадают и по-прежнему применимы формулы (22). Найдем входящие в эти формулы величины.

Сравнение (32) и (20) показывает, что

$$\begin{aligned} M(y) &= 1 + \varepsilon \cos \theta_e \operatorname{th} y, & N(y) &= -\varepsilon \sin \theta_e / \operatorname{ch} y \\ M(\theta) &= 1 - \varepsilon \cos \theta_e \cos \theta, & N(\theta) &= -\varepsilon \sin \theta_e \sin \theta \end{aligned} \quad (33)$$

и далее, учитывая, что $h_0(y) = M(y)$ на основании (9):

$$s(y) = \int_{y^-}^y \frac{dy}{(1 + \varepsilon \cos \theta_e \operatorname{th} y)^2}, \quad s(\theta) = \int_{\theta_-}^{\theta} \frac{d\theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta_e \cos \theta)^2 \sin \theta} \quad (34)$$

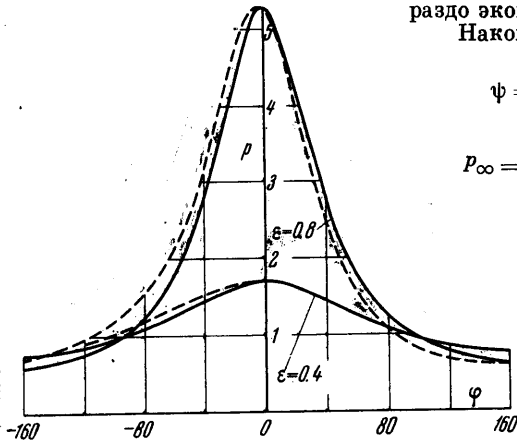
Заметим, что, хотя интегралы (34) выражаются в элементарных функциях, но получаемые при этом выражения громоздки и гораздо экономнее находить их значения численно.

Наконец, на основании формул (22), имеем

$$\begin{aligned} \psi &= 1 + \frac{3\varepsilon^2}{2} \sin^2 \theta_e \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \varepsilon \cos \theta_e \cos \theta)^2} \\ p_\infty &= \sqrt{c_1 s(\theta) + c_2} \frac{1 - \varepsilon \cos \theta_e \cos \theta}{h(\theta, \varphi)} \end{aligned} \quad (35)$$

Отметим один частный случай формулы (35). Если $\theta_e = 1/2 \pi$ (число боковое смещение внутренней сферы) и $\theta_+ = \pi - \theta_-$ (выходные отверстия симметрично расположены относительно экваториальной плоскости), то

$$p_\infty = \frac{\sqrt{1 + 3/2 \varepsilon^2 \sin^2 \theta}}{1 - \varepsilon \sin \theta \cos \varphi} \quad (36)$$



Фиг. 4

На фиг. 4 сплошными кривыми показано асимптотическое ($\Lambda = \infty$) распределение давления p_∞ в экваториальном сечении ($\theta = 1/2 \pi$) сферического подшипника, выходные сечения которого находятся на уровнях $\theta_- = 20^\circ$, $\theta_+ = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$. Расчеты проводились по формуле (36) для двух значений эксцентриситета $\varepsilon = 0.4$ и $\varepsilon = 0.8$. На этой же фигуре штриховыми линиями приведено распределение давления p в экваториальном сечении того же подшипника, полученное путем численного интегрирования уравнения (27) на БЭСМ при значении параметра $\Lambda = 15$. Тот факт, что кривая распределения при $\Lambda = 15$ смещена немного влево относительно асимптотической кривой и, следовательно, несимметрична относительно ординаты $\varphi = 180^\circ$, свидетельствует, что при $\Lambda = 15$ экваториальное сечение подшипника не вышло полностью на асимптотический режим. Однако смещение это невелико, а по характеру и максимальному значению давления сравниваемые кривые совпадают.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шейнберг С. А. Газовая смазка подшипников скольжения. Сб. Трение и износ в машинах, Изд-во АН СССР, 1953, т. 8.
2. Коровчинский М. В. Теоретические основы работы подшипников скольжения. Машгиз, 1959.
3. Elrod H., Burgdorfer A. Refinement of the theory of the infinitely long self-acting gas lubricated journal bearing. Report, First international simposium on gas lubricated bearing, Washington, 1959.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, 1957.
5. Лойцянский Л. Г., Степанянц Л. Г. Гидродинамическая теория сферического подвеса. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 198, Машгиз, 1958.

ВЫТЭСНЕНИЕ ОДНОЙ ЖИДКОСТИ ДРУГОЙ ЖИДКОСТЬЮ С ОБРАЗОВАНИЕМ ЗОНЫ ДВУХФАЗНОГО ТЕЧЕНИЯ

М. В. ФИЛИНОВ

(Москва)

Рассмотрим задачу о нагнетании жидкости 1 в бесконечную область, занятую жидкостью 2. Будем предполагать, что образующаяся зона совместной фильтрации отделяется четкой подвижной границей от внешней бесконечной зоны, и на границе раздела существует скачок насыщенности. Для случая фильтрации двух несжимаемых жидкостей подобная задача была впервые решена Баклеем и Левереттом [1].

В дальнейшем указанная задача исследовалась И. А. Чарным [2] и его учениками [3, 4], а также Д. А. Эфросом [5] и М. И. Швидлером [7]. Будем считать для простоты, что в зоне совместной двухфазной фильтрации жидкости 1 и 2 несжимаемы, тогда как во внешней бесконечной зоне жидкость 2 является упругой. Рассмотрим случаи линейного и осесимметричного движений.

1. **Линейное вытеснение.** В зоне двухфазного движения фильтрация каждой из жидкостей описывается уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_1^*(\sigma)}{\mu_1} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] = m \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{k_2^*(\sigma)}{\mu_2} \frac{\partial p_1}{\partial x} \right] = -m \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (0 < x < x_0(t)) \quad (1.1)$$

Во внешней области справедливо уравнение упругого режима фильтрации

$$a \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} = \frac{\partial p_2}{\partial t} \quad 0 < x < \infty \quad (1.2)$$

Соответствующие начальные и граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} p_1(0, t) = p_1 = \text{const}, \quad p_2(\infty, t) = p_0 = \text{const} \quad (1.3) \\ p_1(x_0, t) = p_2(x_0, t) = p^0, \quad \left(\frac{k_1(\sigma)}{\mu_1} + \frac{k_2(\sigma)}{\mu_2} \right) \frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{k_0}{\mu_2} \frac{\partial p_2}{\partial x} \end{aligned}$$

Неизвестными функциями являются давления $p_1(x, t)$ и $p_2(x, t)$, насыщенность вытесняющей жидкости σ и расстояние от подвижной границы раздела $x_0(t)$. В равенствах (1.1) — (1.3) введены следующие обозначения: μ_1 и μ_2 — вязкость жидкостей 1 и 2; m — пористость; K — модуль совместной упругости жидкости и пористой среды; a — коэффициент пьезопроводности; $k_1^*(\sigma) = k_0 k_1(\sigma)$, $k_2^*(\sigma) = k_0 k_2(\sigma)$ — соответствующие фазовые проницаемости; k_0 — проницаемость для однородной жидкости. Индексы 1 и 2 относятся соответственно к зоне смеси и внешней зоне.

В такой постановке задача является автомодельной.

Подстановка

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{at}}, \quad a = \frac{kK}{m\mu_2} \quad (1.4)$$