

Приводим значения первых четырех коэффициентов влияния для рассматриваемых решеток.

	1	2	3	4	5	6	7
$K(0)$	1	1	1	1	1	1	1
$K(1)$	-0.514	-0.534	-0.562	-0.528	-0.593	-0.513	-0.434
$K(2)$	-0.096	0.114	0.119	0.101	0.182	0.103	0.035
$K(3)$	-0.043	-0.030	-0.041	-0.037	-0.077	-0.048	-0.023
$K(4)$	0.002	0.001	0.000	0.009	0.015	0.000	0.009

	8	9	10	11
$K(0)$	1	1	1	1
$K(1)$	-0.375	-0.202	-0.421	-0.173
$K(2)$	0.028	0.033	0.023	0.030
$K(3)$	-0.016	-0.014	-0.001	-0.015
$K(4)$	0.009	0.012	0.000	0.001

Коэффициент влияния весьма быстро убывает с ростом номера профиля. В редких решетках влиянием соседних профилей можно пренебречь.

Поступило 18 VIII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

- Самойлович Г. С. К расчету нестационарного потока вокруг решетки произвольных профилей, вибрирующих с произвольным сдвигом физ. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
- Жуковский М. И. Расчет обтекания решеток профилей турбомашин. Машгиз, 1960.

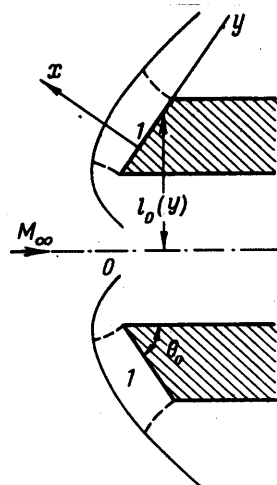
### О НЕВЯЗКОМ ОБТЕКАНИИ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ПРОТОКОМ В РЕЖИМЕ С КОЛЬЦЕВОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТЬЮ

С. К. БЕТЯЕВ (Москва)

Режим обтекания с кольцевой эллиптической областью между ударной волной и телом с протоком реализуется, когда отношение диаметра протока к характерной толщине корпуса достаточно велико, а противодействие достаточно мало. В настоящей работе рассмотрено применение метода интегральных соотношений в первом приближении к расчету такого течения. Расчеты примеров выполнены на ЭВМ.

§ 1. Постановка задачи. Известны [1] два режима сверхзвукового обтекания тел с протоком: режим с выбитой (отошедшей) головной волной, характеризующийся наличием односвязной эллиптической области, и режим обтекания с кольцевой эллиптической зоной. При прочих равных условиях первый из них реализуется, когда относительная (отнесенная, например, к характерному диаметру протока) толщина корпуса достаточно велика, второй — когда, наоборот, относительная толщина достаточно мала. Схема течения с кольцевой эллиптической зоной показана на фиг. 1 ( $l$  — эллиптическая область, пунктирные линии — линии, лежащие на звуковой поверхности и плоскости разреза, сплошная линия — ударная волна). С уменьшением относительной толщины корпуса кольцевая эллиптическая зона уменьшается по своим размерам, но лишь в математически идеализированном случае, когда радиус затупления кромки равен нулю (и угол между касательной к образующей и осью симметрии меньше критического на определенную конечную величину), она исчезает, скачок уплотнения становится присоединенным к телу.

Режим обтекания с кольцевой эллиптической зоной характерен тем, что обтекание носовой части тела не зависит от формы протока за внутренней предельной характеристикой и может быть исследовано подобно тому, как определяется обтекание сверхзвуковым потоком плоского тела [2]. Поместим начало координат в некоторой, пока произвольной точке носовой части тела, ось  $y$  направим вдоль образующей, а ось  $x$  — по нормали к ней (выбор такой системы координат оправдан в том случае, если из любой точки рассматриваемой области можно провести к образующей только



Фиг. 1

одну нормаль). Составляющие скорости  $u$  и  $v$  по направлениям  $x$  и  $y$  отнесем к максимальной скорости, плотность  $\rho$  и давление  $p$  — к плотности и давлению торможения до ударной волны. Тогда уравнение для продольной составляющей импульса и уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ r [1 + xk(y)k] (\mu p + \rho u^2) \right\} + \frac{\partial r \rho u v}{\partial y} = A \quad \left( \mu = \frac{\kappa - 1}{2\kappa} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ r [1 + xk(y)] \rho u \} + \frac{\partial r \rho v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$A = rk(y) (\mu p + \rho v^2) + [1 + xk(y)] \mu p \cos \theta_0, \quad r = x \cos \theta_0 + l_0(y)$$

Здесь  $r$  — расстояние от оси симметрии,  $\kappa$  — показатель адиабаты,  $l_0(y)$  — расстояние от точки контура тела до оси симметрии,  $\theta_0(y)$  — угол между касательной к образующей и осью симметрии,  $k(y)$  — кривизна образующей тела.

Интеграл Бернулли и уравнение сохранения энтропийной функции вдоль линий тока замыкают систему (1.1). При  $l_0(0) \rightarrow \infty$  система (1.1) описывает обтекание плоского тела (диаметр протока бесконечно велик), в случае  $l_0(0) = 0$  уравнения (1.1) описывают осесимметричное течение. Начиная с некоторого критического значения  $l_0(0)$ , зависящего от числа Маха невозмущенного потока  $M_\infty$ , и для значений  $l_0(0)$ , меньших критического, решения с кольцевой дозвуковой зоной не существует, дозвуковая область перед телом будет односвязной, и соответственно изменится форма ударной волны. Не исключена возможность гистерезисного перехода одного вида течения в другой. Реализация режима с кольцевой дозвуковой зоной, конечно, возможна, если проток достаточно широк по всей длине, а противодавление мало.

Значения искомых функций на ударной волне будем отмечать индексом 1, а на теле — индексом 0. Граничные условия будут иметь такой вид:

$$u_0 = 0 \quad (1.2)$$

$$v_1 = w_\infty \cos \sigma \cos(\sigma - \theta_0) + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1 - w_\infty^2 \cos^2 \sigma}{w_\infty \sin \sigma} \sin(\sigma - \theta_0)$$

$$u_1 = w_\infty \cos \sigma \sin(\sigma - \theta_0) - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{1 - w_\infty^2 \cos^2 \sigma}{w_\infty \sin \sigma} \cos(\sigma - \theta_0) \quad (1.3)$$

$$p_1 = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} (1 - w_\infty^2)^{\kappa/(\kappa-1)} \left[ \frac{w_\infty^2 \sin^2 \sigma}{1 - w_\infty^2} - \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} \right]$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{1 - u_1^2 - v_1^2} \quad \left( w_\infty^2 = \frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 + 2/(\kappa - 1)} \right)$$

Здесь  $\sigma$  — угол наклона ударной волны к направлению невозмущенного потока.

Будем искать решение поставленной задачи в кольцевой эллиптической области, ограниченной ударной волной, телом и двумя звуковыми поверхностями.

§ 2. Метод решения. Для решения задачи воспользуемся методом интегральных соотношений [3] в первом приближении. Из уравнений (1.1) и геометрических соотношений получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$x_1' = \frac{dx_1}{dy} = [1 + x_1 k(y)] \operatorname{tg}(\sigma - \theta_0)$$

$$\frac{d\sigma}{dy} = \left( x_1 r_1 \frac{\partial \rho_1 u_1 v_1}{\partial \sigma} \right)^{-1} [2r_0 \mu p_0 + x_1 (A_0 + A_1) - 2r_1 (1 + x_1 k) (\mu p_1 + \rho_1 u_1^2) -$$

$$- x_1 r_1 \rho_1 (u_1^2 - v_1^2) \theta_0' - \rho_1 u_1 v_1 (x_1 l_0' - x_1' l_0 - x_1^2 \theta_0' \sin \theta_0)] \quad (2.1)$$

$$\frac{dv_0}{dy} = \frac{1 - v_0^2}{x_1 r_0 \rho_0} \left( 1 - \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} v_0^2 \right)^{-1} \left[ (r_1 \rho_1 v_1 - r_0 \rho_0 v_0) x_1' - 2(1 + x_1 k) \rho_1 u_1 r_1 - \right.$$

$$\left. - x_1 r_0' \rho_0 v_0 - x_1 r_1' \rho_1 v_1 - x_1 r_1 \left( \rho_1 u_1 \theta_0' + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dy} \right) \right]$$

$$r_0' = l_0' = \frac{dl_0(y)}{dy} \quad r_1' = x_1' \cos \theta_0 - x_1 \sin \theta_0 \theta_0' + l_0', \quad \theta_0' = \frac{d\theta_0(y)}{dy}$$

Частные производные по  $\sigma$  определяются из условий на ударной волне (1.3). Численное решение задачи приводится для случая  $\theta_0(y) = \text{const}$ . При этом  $h(y) \equiv 0$  и  $l_0 = h + y \sin \theta_0$ , где  $h$  — расстояние от начала координат до оси симметрии. Примем, что на линиях излома образующей достигается скорость звука [4]. Выберем начало координат на теле таким образом, чтобы критическая поверхность тока пересекала скачок при  $y = 0$ , все линейные размеры отнесем к расстоянию от тела до ударной волны по оси  $x$  при  $y = 0$ .

Энтропийная функция  $\varphi_0 = p_1(0)\rho_1^{-\kappa}(0)$ , согласно условиям (1.3), будет зависеть от  $\sigma(0)$ . Остаются неизвестными начальные значения  $\sigma(0)$  и  $v_0(0)$ . Для их определения можно использовать условие равенства нулю расхода газа через нормальную к телу часть конической поверхности, проходящей через линию пересечения критической поверхности тока со скачком (ср. [6])

$$\int_0^{x_1} r \rho v dx = 0 \quad (2.2)$$

Линейно аппроксимируя подынтегральное выражение в условии (2.2), как это и делается в методе интегральных соотношений, получим:

$$v_0(0)[1 - v_0^2(0)]^{1/(\kappa-1)} + \frac{h + \cos \theta_0}{h} v_1(0)[1 - v_1^2(0) - u_1^2(0)]^{1/(\kappa-1)} = 0 \quad (2.3)$$

С использованием условия (2.3) схема расчета может быть следующей. Задавая некоторое значение  $\sigma(0)$ , находим из условий (1.3) значения  $v_1(0)$ ,  $u_1(0)$ , из условия (2.3) — значение  $v_0(0)$  и начинаем интегрирование аппроксимирующей системы (2.1) в сторону уменьшения  $|v_0(y)|$  при заданных значениях  $h$ ,  $\theta_0$ ,  $M_\infty$  и  $\kappa$ . Одновременно определяем уравнение критической линии тока  $x_2 = x_2(y)$  по формуле<sup>1</sup>

$$\frac{dx_2}{dy} = \frac{u_1 x_2}{v_1 x_2 + v_0(x_1 - x_2)} \quad (2.4)$$

В точке  $y|_{x_2=0} = y_1$  должно выполняться условие

$$v_0(y_1) = 0 \quad (2.5)$$

Значение  $\sigma(0)$  подбирается таким образом, чтобы удовлетворить условию (2.5). После выбора значения  $\sigma(0)$ , а следовательно, и  $v_0(0)$ , по условию (2.3), интегрирование системы (2.1) продолжается в обоих направлениях до тех пор, пока скорость не будет равна скорости звука при значениях  $y = y_{\min} < 0$  и  $y = y_{\max} > 0$ . При заданной относительной толщине корпуса  $g = (y_{\max} - y_{\min}) / (h \csc \theta_0 + y_{\min})$  необходимо провести еще раз стрельбу по параметру с тем, чтобы добиться совпадения вычисленного значения  $g$  с заданным.

Решение системы (2.1) проводилось на ЭВМ методом Рунге — Кутты четвертого порядка точности.

Что касается точности метода интегральных соотношений для рассматриваемой задачи, то следует ожидать, что она такого же порядка, как и для более простых тел: плоской пластины [6] или цилиндрического торца.

§ 3. Результаты расчетов. Все расчеты проводились при  $\kappa = 1.405$ .

Рассмотрим сначала случай  $\theta_0 = 1/2\pi$  (цилиндрический торец с протоком). Уравнению (2.3) удовлетворяют следующие начальные данные:  $v_0(0) = 0$ ,  $\sigma(0) =$

$= 1/2\pi$ . Анализ показал, что в окрестности этих значений других решений нет. Таким образом, в данном случае критическая поверхность тока проходит через прямой скачок и является цилиндрической. При этом условие (2.2) также удовлетворяется. На фиг. 2 показана зависимость  $v_0$ ,  $p_0$  и  $x_1$ , от  $y_0$  при  $M_\infty = 5$ . Линейные размеры отнесены к толщине носовой части корпуса,  $y_0 = (y - y_{\min}) / (y_{\max} - y_{\min})$ . Решение приведено для значений  $h = 3$  и  $\infty$ . Случай  $h = \infty$  соответствует<sup>2</sup> задаче о симметричном обтекании плоской пластины [6]. Численные расчеты в этом случае практически совпали с расчетами, приведенными в работе [6] для плоской пластины.

<sup>1</sup> При подходе к точке торможения ( $x_2 = 0$ ,  $v_0 = 0$ ) уравнение (2.4) имеет особенность, раскрыв которую получим

$$\frac{dx_2}{dy} = \left( u_1 - x_1 \frac{dv_0}{dy} \right) \frac{1}{v_1}$$

<sup>2</sup> При численном счете в этом случае полагалось  $h = 10^4$ .

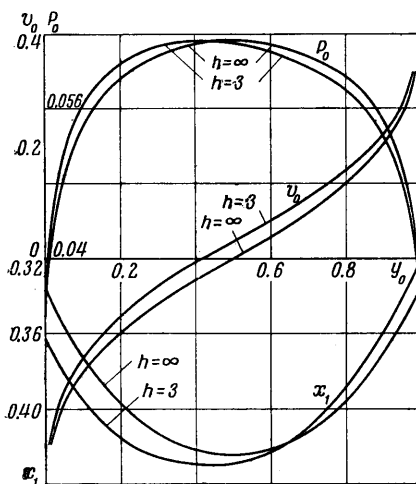
Видно, что зависимость решения от параметра  $h$  слабая. С уменьшением  $h$  давление незначительно уменьшается при  $y_0 > 0,6$  и незначительно увеличивается при  $y_0 < 0,4$ . Такое изменение давления приводит к тому, что коэффициент лобового сопротивления носика при заданном  $M_\infty$  почти не зависит от значения  $h$ . Ударная волна с уменьшением  $h$  отходит от внутренней линии пазома. Такой же характер имеет решение и при других значениях  $M_\infty$ .

Для ряда значений  $h$  приводим вычисленные значения коэффициента сжатия струи  $\alpha = h^2 / (h + y_{\min})^2$ , а также значения  $g$

$h = 10$	8	6	5	4	3	2	
$\alpha = 1.218$	1.280	1.390	1.486	1.643	1.939	2.685	( $M_\infty = 3$ )
$\alpha = 1.250$	1.323	1.453	1.567	1.750	2.113	3.029	( $M_\infty = 4$ )
$\alpha = 1.269$	1.348	1.490	1.614	1.819	2.216	3.236	( $M_\infty = 5$ )
$\alpha = 1.288$	1.373	1.527	1.662	1.887	2.324	3.453	( $M_\infty = 7$ )
$\alpha = 1.299$	1.388	1.549	1.692	1.929	2.390	3.586	( $M_\infty = 10$ )
$\alpha = 1.308$	1.400	1.567	1.715	1.961	2.442	3.692	( $M_\infty = 20$ )
$g = 0.247$	0.317	0.443	0.551	0.727	1.059	1.877	( $M_\infty = 4$ )

Отсюда видно, что коэффициент сжатия струи существенно зависит от параметра  $h$ . Характерной особенностью режима обтекания с кольцевой эллиптической областью является то, что коэффициент сжатия всюду больше единицы,  $\alpha \rightarrow 1$  сверху при  $h \rightarrow \infty$ . Поскольку рассмотрение течения перед телом не позволяет точно определить критическое значение параметра  $h$  (или  $\alpha$ ), при котором наступает разрушение режима с кольцевой эллиптической областью, решение приводится вплоть до значений  $h = 2$ . Зависимость  $\alpha$  от  $g$  приведена выше при  $M_\infty = 4$ . Однако в результате численных расчетов оказалось, что функция  $\alpha(g)$  практически не зависит от параметра  $M_\infty$  и близка к линейной.

В случае  $\theta_0 \neq 1/2\pi$  тривиальным решением условий (2.3) и (2.5) будет  $v_1(0) = v_0(0) = 0$ . При этом критическая поверхность тока после скачка перпендикулярна к обечайке. Для различных значений  $\theta_0$  (от  $60$  до  $120^\circ$ ) при  $M_\infty = 5$ ,  $h = 5$  проводилась стрельба по параметру  $\sigma(0)$ . Оказалось, что в реальном диапазоне значений  $\sigma(0)$  тривиальное решение  $v_1(0) = 0$  является единственным. Однако при значительных отклонениях  $\theta_0$  от  $1/2\pi$  такое решение становится несправедливым, так как, например, оно неверно определяет угол  $\theta_0$ , при котором скачок присоединяется к кромке. Кроме этого, тривиальное решение зависит от выбора линии интегрирования в условии (2.2), т. е. по существу — от выбора направления аппроксимации функций в методе интегральных соотношений. По-видимому, вместо условия (2.2) лучше использовать условие  $\sigma(0) = 1/2\pi$ , как и в задаче об обтекании плоской пластины [6].



Фиг. 2

Поступило 2 VI 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Гостехиздат, 1953.
2. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания кругового цилиндра с отошедшей ударной волной. Сб. «Вычисл. матем.». Изд-во АН СССР, 1958, № 3.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Физматгиз, 1963.
4. Chubb D. L. Solution to the Flow about a Two-Dimensional Flat Plate at Infinite Mach Number. Princeton, 1959, Juli, 17.
5. Vaglian-Laurin R. On the PLK-Metod and the Supersonic Body Problem. Gas Paper, 1961, I, No. 61—62.
6. Базжин А. П. К расчету обтекания сверхзвуковым потоком газа плоской пластинки с неприсоединенным скачком уплотнения. Инж. ж., 1963, т. 3, № 2.