О ВЛИЯНИИ ДИСПЕРГИРОВАННОЙ ПРИМЕСИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Ю. А. БУЕВИЧ, В. М. САФРАЙ

(Москва)

Присутствие в потоках жидкости взвешенных твердых частиц приводит к значительному изменению некоторых их характеристик по сравнению с аналогичными потоками однородной жидкости, даже если концентрация частиц в смеси весьма мала. Так, например, взвешенные частицы существенно ускоряют вырождение турбулентности жидкости [1, 2], способствуя тем самым установлению ламинарного режима течения. С другой стороны, наличие частиц сильно сказывается на устойчивости самих ламинарных движений и переходе к турбулентному режиму, причем частицы могут оказывать как стабилизирующее [3, 4], так и дестабилизирующее [5] влияние на устойчивость. В этой связи представляет интерес рассмотреть также их влияние на характеристики гельмгольцевской устойчивости поверхностей раздела. В предлагаемой работе это исследование проведено на примере вязкого ламинарного течения тонкой жидкой пленки по вертикальной искривленной подложке под действием силы тяжести, градиента давления и гидродинамического трения на свободной поверхности. При этом постановка задачи и методы ее решения аналогичны таковым в работе [6].

Запишем уравнения движения и сохранения масс обеих фаз [7]

$$d_1(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t^*}+v_j^*\frac{\partial}{\partial x_j^*}\right)v_i^* = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*}+$$

$$+\mu\frac{\partial}{\partial x_j^*}\left(\frac{\partial v_i^*}{\partial x_j^*}+\frac{\partial v_j^*}{\partial x_i^*}\right)+d_1(1-\rho)g_i-f_i$$

$$d_2\rho\left(\frac{\partial}{\partial t^*}+w_j^*\frac{\partial}{\partial x_j^*}\right)w_i^* = d_2\rho g_i+f_i \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t^*}-(1-\rho)\operatorname{div}v^*+v^*\nabla\rho=0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t^*}+\rho\operatorname{div}w^*+w^*\nabla\rho=0$$

Здесь v_i^* и w_i^* — скорости жидкости и диспергированной фазы, d_1 и d_2 — плотности жидкости и материала частиц, g_i — вектор ускорения силы тяжести, ρ — объемная концентрация частиц, f_i — сила взаимодействия между фазами, отнесенная к единице объема смеси, μ — эффективная вязкость смеси. В уравнениях (1) предположено, что $\rho \ll 1$; это дает право считать $\mu = \mu_0(1+2.5\rho)$, где μ_0 — вязкость однородной жидкости.

Предполагая частицы сферическими, используем для силы межфазового взаимодействия соотношение работы [8]

$$f=\frac{1}{2}d_1\rho\left(\frac{\partial}{\partial t^*}+w^*\nabla\right)(v^*-w^*)-\rho\nabla p^*+c^*\rho(v^*-w^*)-d_1\rho g,\qquad c^*=\frac{9\mu_0}{2a^2} \tag{2}$$

Здесь фактически предполагается, что радиус частиц a достаточно мал, так что можно пренебречь нестационарным членом в выражении для силы линейного сопротивления.

Введем систему координат, направив ось x вдоль вектора g, ось y — перпендикулярно подложке и разместив начало координат на свободной поверхности пленки. Введем безразмерные величины

$$t=\frac{t^*v_0}{h^*},\qquad (x,y,r)=\frac{(x^*,y^*,r^*)}{h^*},\qquad (v,w)=\frac{(v^*,w^*)}{v_0}$$

$$p=\frac{p^*}{d_1v_0^2},\qquad \tau=\frac{\tau^*h^*}{\mu_0v_0},\qquad T=\frac{\sigma}{d_1h^*v_0^2},\qquad R=\frac{d_1h^*v_0}{\mu_0} \tag{3}$$

$$\varkappa=\frac{d_1}{d_2}\qquad \theta=\frac{d_1h^{*2}}{\mu_0v_0}\qquad c=\frac{9h^{*2}}{2a^2}$$

Здесь h^* — толщина пленки, r^* — радиус кривизны подложки ($r\gg1$), v_0 — некоторая характерная скорость течения, τ^* — действующее на свободной поверхности касательное напряжение, σ — коэффициент поверхностного натяжения. С учетом (2) и (3) уравнения (1) примут вид

$$R\left[(1-\rho)\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)v_i+\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(v_i-w_i)+(1-\rho)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right]=$$

$$=(1+2.5\rho)\left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i\partial x_j}\right)+\theta g\delta_{i1}-c\rho(v_i-w_i) \tag{4}$$

$$R\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+w_j\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\left[w_i-\frac{1}{2}\varkappa(v_i-w_i)\right]+\varkappa\frac{\partial p}{\partial x_i}\right\}=(1-\varkappa)\theta g\delta_{i1}+\varkappa c(v_i-w_i)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-(1-\rho)\operatorname{div}v+v\nabla\rho=0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\operatorname{div}w+w\nabla\rho=0$$

Полагая в невозмущенном одномерном течении в направлении оси x величину $\rho=\rho_0$ постоянной и налагая граничные условия

$$v_{10}(1)=0,\qquad dv_{10}/dy\,|_{y=0}=-\tau(1+2.5\,\rho_0)^{-1}$$

получим для скоростей этого движения

$$v_{10}(y)=b(1-y^2)+\tau(1+2.5\,\rho_0)^{-1}(1-y),\qquad w_{10}(y)=w_0+v_{10}(y) \tag{5}$$

В выражениях (5) введены параметры

$$b=\frac{1}{2(1+2.5\rho_0)}[\theta g+c\rho_0w_0+(1-\rho_0)Rn] \tag{6}$$

$$w_0=\frac{1}{c\varkappa}[(1-\varkappa)\theta g+\varkappa Rn],\qquad n=\frac{dp_0}{dx}=\text{const}$$

Учитывая теорему Сквайра, а также результаты [6], рассматриваем в дальнейшем только двумерные возмущения в плоскости xy.

Представим неизвестные функции в виде $\varphi=\varphi_0+\varphi'$, причем $\varphi'\ll\varphi_0$. Из уравнений (4) легко получить линеаризированные уравнения для φ', к которым практически без изменений применима схема последовательных приближений по степеням kR (где k — волновое число возмущений), использованная в работе [6]. Для целей данной работы вполне достаточно рассмотреть только нулевое приближение по R (первое приближение работы [6]). Пренебрегая ρ_0 по сравнению с единицей и опуская штрихи в обозначениях, получим из (4) в этом приближении

$$R\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\rho n\right)=\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial x\partial x_j}+2.5\rho\frac{d^2v_{10}}{dy^2}+c\rho w_0$$

$$R\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_j\partial x_j}+\frac{\partial^2 v_j}{\partial y\partial x_j},\quad R\frac{\partial p}{\partial x}=c(v_1-w_1);\quad R\frac{\partial p}{\partial y}=c(v_2-w_2) \tag{7}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}-\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+v_{10}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial w_i}{\partial x_i}+w_{10}\frac{\partial\rho}{\partial x}=0$$

В дальнейшем для простоты заменим v_{10} и w_{10} в уравнениях сохранения массы фаз в (7) на некоторые средние $\langle v_{10}\rangle$ и $\langle w_{10}\rangle$. Далее станет ясно, что это не сказывается на окончательных результатах.

Вводя возмущение свободной поверхности $\eta(x,\,t)$, запишем граничные условия обращения в нуль компонент скорости жидкой фазы у подложки

$$v_1(1)=v_2(1)=0,$$

а также кинематическое соотношение и приведенные к плоскости $y=0$ условия непрерывности касательного и нормального напряжений на свободной поверхности

$$\frac{d^2 v_{10}}{\partial y^2}\eta+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{R}{\varkappa}\rho_0(w_{10}-c^\circ)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}=0,\qquad y=0$$

$$\frac{2}{R}\frac{\partial v_2}{\partial y}-p+T\left(\frac{\eta}{r^2}+\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\right)=0,\quad y=0 \tag{8}$$

$$v_2=\frac{\partial\eta}{\partial t}+v_{10}\frac{\partial\eta}{\partial x},\qquad y=0$$

Последний член в условии для касательных напряжений отвечает импульсу, передаваемому единице площади свободной поверхности частицами, приходящими к ней за единицу времени. Даже при $\rho_0 \ll 1$ пренебрегать этим членом, как делалось выше, нельзя, ибо он содержит множители $\varkappa^{-1}$ и $\sim w_{10}$, которые могут быть весьма велики. Величина c° представляет собой скорость распространения волны возмущения. Очевидно, аналогичный член в условии для нормальных напряжений имеет второй порядок малости по амплитудам возмущения и потому должен быть отброшен.

Представляя возмущения в виде

$$\varphi=\Phi(y)e^{\alpha t+ikx},\qquad \rho=G(y)e^{\alpha t+ikx},\qquad \eta(x,t)=\eta_0e^{\alpha t+ikx}$$

получим из (7) систему линейных уравнений для амплитуд $\Phi(y)$ и $G(y)$. Корни характеристического уравнения этой системы равны

$$\lambda_1=\lambda_2=k,\quad \lambda_3=\lambda_4=-k,\quad \lambda_5=\lambda,\quad \lambda_6=-\lambda,\quad \lambda=\left(\frac{c}{2\rho_0}\frac{\alpha+ik\langle w_{10}\rangle}{\alpha+ik\langle v_{10}\rangle}\right)^{1/2}$$

После довольно громоздких подсчетов получим для частных решений, соответствующих кратным корням $\pm k$,

$$V_1^\pm=(B^\pm+A^\pm y)e^{\pm ky},\qquad V_2^\pm=\left(\frac{i}{k}A^\pm\mp iB^\pm\mp iA^\pm y\right)e^{\pm ky}$$

$$W_1^\pm=\left(\mp\frac{2k}{c}A^\pm+B^\pm+A^\pm y\right)e^{\pm ky},\quad W_2^\pm=\left[iA^\pm\left(\frac{2k}{c}+\frac{1}{k}\right)\mp iB^\pm\mp iA^\pm y\right]e^{\pm ky}$$

$$P^\pm=\mp\frac{2i}{R}A^\pm e^{\pm ky},\qquad G^\pm=0 \tag{9}$$

Корням $\pm\lambda$ отвечают решения, которые при малых k имеют вид

$$V_1^\pm=C^\pm\frac{1}{\lambda^2}(5b-cw_0+Rn)e^{\pm\lambda y},\qquad V_2^\pm=\pm C^\pm\frac{\alpha}{\lambda}e^{\pm\lambda y}$$

$$W_1^\pm=C^\pm\frac{1}{\lambda^2}(5b-cw_0+Rn)e^{\pm\lambda y},\quad W_2^\pm=\pm C^\pm\frac{\alpha(c-2\lambda^2)}{c\lambda}e^{\pm\lambda y}, \tag{10}$$

$$P^\pm=C^\pm\frac{2\alpha}{R}e^{\pm\lambda y},\qquad G^\pm=C^\pm e^{\pm\lambda y}$$

По определению, величины $C^\pm \ll \rho_0$ или $C^\pm \lll |v_{10}|$. Амплитуды возмущения $V_i^\pm$, соответствующего корням $\pm\lambda$, имеют порядок величины

$$C^\pm\rho_0c^{-1}|v_{10}|\ll\rho_0^2c^{-1}|v_{10}|\lll|v_{10}|$$

С другой стороны, амплитуды $A^\pm$, $B^\pm$ подчинены единственному условию $A^\pm, B^\pm \ll |v_{10}|$. Поэтому, вообще говоря, вклад, вносимый возмущениями, соответствующими корням $\pm\lambda$ характеристического уравнения, в полные величины V_i, W_i и P, весьма мал и может не учитываться.

Подставляя сумму решений (9) в условия (8), приходим к системе линейных алгебраических уравнений для введенных постоянных, которые отличаются от аналогичной системы в [6] только тем, что вместо величины $2bi$ в них содержится величина

$$2bi+Rk\varkappa^{-1}[w_{10}(0)-c^0]^2\rho_0$$

Поэтому характеристическое уравнение этой системы имеет вид

$$s\omega(\operatorname{sh} 2k - 2k) + k^3\omega R\varkappa^{-1}[w_{10}(0) - c^0]^2\rho_0 + 2ibk^2\omega + k(\operatorname{ch} 2k + 1 + 2k^2) = 0$$

$$s = {}^1/_2 RT(k^2 - r^{-2}), \qquad \omega = [\alpha + ik(b + \tau)]^{-1}$$

После вычислений для скорости распространения волны получим

$$c^0 = b[2(\operatorname{ch} 2k + 1 + 2k^2)^{-1} + 1] + \tau$$

Условие устойчивости выразится в форме

$$T(k^2 - r^{-2}) + 2k^3\rho_0\varkappa^{-1}[w_0 - 2b(\operatorname{ch} 2k + 1 + 2k^2)^{-1}]^2(\operatorname{sh} 2k - 2k)^{-1} > 0 \qquad (11)$$

Это условие отличается от аналогичного условия в случае однородной пленки наличием второго члена в левой части, который всегда положителен. Отсюда вытекает, что присутствие в жидкости диспергированной фазы ведет к стабилизации течения жидкой пленки. Соответствующая кривая нейтральной устойчивости в этом случае, представленная в координатах $(k, 1/r)$, расположена ниже соответствующей кривой для однородной пленки и при $k \to \infty$ асимптотически приближается к последней. В области малых k (или малых $1/r$) различие между указанными кривыми становится весьма существенным. В частности, легко видеть, что кривая нейтральной устойчивости двухфазной смеси пересекает ось $1/r$ не в нуле, а в точке

$$r_0 = \left(\frac{\varkappa T}{12\rho_0}\right)^{1/2} |w_0 - b|^{-1}$$

При $r > r_0$ двухфазная пленка оказывается абсолютно устойчивой.

Существенно, что критическая длина волны возмущения для неоднородной пленки зависит также от градиента приложенного давления. Гидродинамическое трение на свободной поверхности по-прежнему влияет только на скорость волны c^0, но не на условие устойчивости.

Вообще говоря, взвешенные частицы приводят к возникновению двух типов эффектов, влияющих на устойчивость: изменению уравнения Орра — Зоммерфельда по сравнению со случаем течения однородной жидкости и изменению граничных условий на поверхности раздела. Как явствует из изложенного, при больших $\varkappa^{-1}$ влияние дополнительных членов в уравнении Орра — Зоммерфельда, которые выше были просто опущены ввиду $\rho_0 \ll 1$, незначительно по сравнению с влиянием второго фактора. Однако, как следует из работы [9], в которой влияние примеси на устойчивость Гельмгольца исследовалось в предположении идеальности жидкости и условие на касательные напряжения вообще не налагалось, такие дополнительные члены также ведут к стабилизации течения взвешенными частицами.

Поступило 26 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. О влиянии взвешенных в жидкости частиц на вырождение изотропной турбулентности. ПМТФ, 1965, № 4.
2. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. Искажение энергетического спектра вырождающейся изотропной турбулентности под влиянием взвешенных в жидкости частиц. ПМТФ, 1965, № 5.
3. Гупало Ю. П. Об устойчивости ламинарного движения жидкости с тяжелой примесью. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1960, № 6.
4. Saffman P. G. On the Stability of Laminar Flow of a Dusty Gas. J. Fluid Mech., 1962, vol. 13, No. 1,
5. Дорожкин В. С., Желтов Ю. В., Желтов Ю. П. О движении смеси жидкости с песком в скважине и трещине при гидравлическом разрыве нефтеносного пласта. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 11.
6. Буевич Ю. А., Гупало Ю. П. Устойчивость ламинарного течения жидкой пленки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 1.
7. Баренблатт Г. И. О движении взвешенных частиц в турбулентном потоке. ПММ, 1953, т. 17. вып. 3.
8. Corrsin S., Lumley J. On the Equation of Motion for a Particle in Turbulent Fluid. Appl. Sci. Res., A, 1956, vol. 6, No. 2—3.
9. Michael D. H. Kelvin-Helmholz Instability of a Dusty Gas. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1965, vol. 61, No. 2.