

На фиг. 4 показана экспериментальная зависимость толщины ударной волны δ от числа Рейнольдса. Верхняя кривая получена для цилиндра с отношением диаметра к длине 0,5, а нижняя — 0,25. Кривые эквидистантны, при одних и тех же параметрах обтекания наблюдается утолщение ударной волны для первого случая примерно на 20%. Значение отхода ударной волны практически не изменяется. Концентричность скачка уплотнения сохраняется лишь в малом диапазоне углов (5—10°) в окрестностях линии торможения, с увеличением числа Маха этот диапазон несколько увеличивается.

Отметим в заключение, что характер зависимостей и порядок полученных величин согласуется как с теоретическими, так и с экспериментальными результатами [1].

Поступило 21 IX 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. В. Плотность вблизи передней критической точки затупленного тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком разреженного газа. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 2.
2. Королев Ф. А., Акимов А. И., Кромский Г. И., Скоков И. В. О применении эталона Фабри-Перо для изучения воздушных потоков низкой плотности. Приборы и техн. эксперим., 1965, № 4.
3. Королев Ф. А., Кромский Г. И., Скоков И. В. Применение фазового метода многолучевой интерферометрии для изучения малых плотностей газов. Изв. высш. учебн. завед., Физика, 1963, № 5.
4. Скоков И. В. Сравнение чувствительности двухлучевого и многолучевого интерферометров к измерению малых вариаций показателя преломления. Вестн. Моск. ун-та, 1962, № 2.
5. Хейз У., Прост и Р. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.

К ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА МЕЖДУ ДВУМЯ КОАКСИАЛЬНЫМИ ЦИЛИНДРАМИ

Б. Т. ПОРОДНОВ, П. Е. СУЕТИН

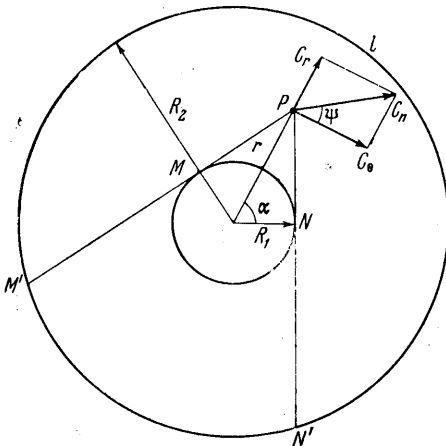
(Свердловск)

С кинетической точки зрения, исследование течения разреженного газа связано с решением уравнения Больцмана для функции распределения. Однако в некоторых случаях при решении подобных задач оказывается возможным использовать другие приближенные методы, которые позволяют избежать математических трудностей, возникающих при непосредственном решении кинетического уравнения.

В работе [1] исследовалась теплопередача между двумя неподвижными коаксиальными цилиндрами, имеющими различную температуру, при любых числах Кнудсена. Метод решения основан на использовании интегрального уравнения переноса для молекулярного признака ϕ , являющегося функцией компонент абсолютной скорости v , и «двухсторонней» функции распределения Максвелла по скоростям. Полученные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Представляет интерес исследовать этим методом задачу о движении одноатомного газа между двумя коаксиальными цилиндрами, вызываемом аксиальным градиентом давления.

Рассмотрим движение одноатомного газа между двумя неподвижными коаксиальными цилиндрами с радиусами R_1 и R_2 (фиг. 1). Будем полагать, что движение газа изотермическое и градиент давления, как



Фиг. 1

и средне-массовая скорость, направлены вдоль оси z (ось коаксиальных цилиндров). Далее считаем, что течение газа стационарное и скорость его движения мала по сравнению со скоростью звука. Тогда функция распределения по скоростям мо-

жет быть приближенно представлена в цилиндрической системе координат пространства скоростей в виде

$$f = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-c_r^2 - c_\theta^2 - c_z^2) [1 + a(r)c_z] = f^0 [1 + a(r)c_z] \quad (1)$$

$$c = \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} v$$

Здесь n — плотность молекул, m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, T — температура газа и стенок, c — безразмерная скорость, v — абсолютная скорость молекулы относительно неподвижной системы координат, f^0 — равновесная максвелловская функция распределения. Такое представление искомой функции распределения соответствует разложению в ряд локализованного максвелловского распределения, ограничиваясь двумя первыми членами разложения.

Введение «двухсторонней» функции распределения сводится к следующему. Предположим, что все молекулы, которые после отражения от поверхности внутреннего цилиндра пришли в точку P без столкновений, имея направление молекулярных скоростей, лежащих в «клине влияния» MPN (область 1 на фиг. 1), характеризуются функцией распределения

$$f = f_1 = f^0 (1 + a_1 c_z)$$

Тогда все молекулы, направления скоростей которых лежат вне этого «клина влияния», характеризуются функцией распределения

$$f = f_2 = f^0 (1 + a_2 c_z)$$

Таким образом, наиболее важным свойством данного метода является наличие разрывности для функции распределения по обе стороны «клина влияния».

Из фиг. 1 видно, что область 1 является областью влияния поверхности внутреннего цилиндра в точке P и ограничена прямыми PM и PN и дугой MN , а область 2 — область влияния внешней поверхности, ограниченная прямыми PM' и PN' и дугой $M'N'$. Замена радиальной и угловой компонент скорости c_r и c_θ по формулам

$$c_r = c_n \sin \psi, \quad c_\theta = c_n \cos \psi$$

позволяет разграничить области 1 и 2. Нетрудно видеть, что область 1 соответствует интервалу $\alpha < \psi < \pi - \alpha$, а область 2 — интервалу $\pi - \alpha < \psi < 2\pi + \alpha$, где $\alpha = \arcsin R_1 / r$.

Функция распределения для этих областей определяется выражениями

$$\begin{aligned} f_1 &= f^0 (1 + a_1 c_z) & (\alpha < \psi < \pi - \alpha) \\ f_2 &= f^0 (1 + a_2 c_z) & (\pi - \alpha < \psi < 2\pi + \alpha) \end{aligned} \quad (2)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 , как функции радиального расстояния, определяют среднее значение какой-либо величины Q усреднением по всему пространству скоростей

$$Q = \int_{\alpha}^{\pi - \alpha} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q f_1 c_n dc_n dc_z d\psi + \int_{\pi - \alpha}^{2\pi + \alpha} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Q f_2 c_n dc_n dc_z d\psi \quad (3)$$

В частности, средне-массовая скорость $\langle v_z(r) \rangle$ как функция r имеет вид

$$\langle v_z(r) \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \left[a_1 + a_2 + \frac{2\alpha}{\pi} (a_2 - a_1) \right] \quad (4)$$

Коэффициенты a_1 и a_2 определяются из системы двух интегральных уравнений переноса для молекулярных признаков Φ_1 и Φ_2 , выбранных такими, чтобы получилась полная система для нахождения неизвестных функций.

В цилиндрической системе координат интегральное уравнение переноса в безразмерном виде относительно скорости имеет вид (1)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \int \Phi f c_r dv \right] + \frac{\partial}{\partial z} \int \Phi f c_z dv - \frac{1}{r} \int f \left(c_\theta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial c_r} - c_r c_\theta \frac{\partial \Phi}{\partial c_\theta} \right) dv = \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} \Delta \Phi \quad (5)$$

$$\Delta \Phi = \iiint \int \Phi (f' f_1' - f f_1) g b db dz dv dv_1$$

Здесь Φ — молекулярный признак, являющийся функцией компонент скорости; $\Delta \Phi$ — интеграл столкновений; ввиду осесимметричности рассматриваемой задачи в (5) член, учитывающий изменение по углу θ , полагается равным 0.

Используя безразмерную радиальную переменную \bar{r} и величину q в виде $r = \bar{r}R_2$ и $q = R_1/R_2$ и выбирая в качестве молекулярных признаков $\Phi_1 = mc_z$ и $\Phi_2 = mc_z c_r$, получаем систему двух уравнений для искомых функций a_1 и a_2 (черта над безразмерной переменной опущена)

$$a_1 - a_2 = -r^2 \sqrt{\pi} \frac{R_2}{q} \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} + B \quad (6)$$

$$r \frac{d}{dr} [a_1(\pi - 2\alpha + \sin 2\alpha) + a_2(\pi + 2\alpha - \sin 2\alpha)] + 2(a_1 - a_2) \sin 2\alpha = -\frac{\pi R_1}{\lambda} (a_1 - a_2)$$

где B — постоянная интегрирования и $\alpha = \arccos q/r$

Интегралы столкновений в системе уравнений (6) для упрощения расчета вычислены для максвелловских молекул. Для молекулярного признака Φ_1 имеем $\Delta\Phi_1 = 0$ — в силу закона сохранения импульса при столкновении двух молекул. Интеграл столкновений для Φ_2 вычислен согласно [2]

$$\Delta c_z c_r = -3/2 \sqrt{2K/m} n^2 A_2(5) \langle c_z c_r \rangle, \quad A_2(5) = 1.3682 \quad (7)$$

Здесь K — постоянная максвелловского взаимодействия. После вычисления $\langle c_z c_r \rangle$ с использованием (3) имеем

$$\Delta c_z c_r \left(\frac{m}{2kT}\right)^{1/2} = -\frac{n}{8\lambda} \frac{q}{r} (a_1^* - a_2), \quad \lambda = \frac{\sqrt{2\pi RT}}{3n A_2(5)} \left(\frac{m}{2K}\right)^{1/2} \quad (8)$$

Здесь λ — длина свободного пробега для максвелловских молекул [3], R — газовая постоянная.

Коэффициенты a_1 и a_2 , полученные из (6), определяются выражениями (r — размерная переменная)

$$a_1 = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} r^2 \left(\frac{1}{2\lambda} - \frac{1}{R_1} \right) + J(r) \right] \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} - \frac{R_1}{2\lambda} B \ln \frac{r}{R_2} + \frac{1}{2} (C + B) \quad (9)$$

$$a_2 = \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} r^2 \left(\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{R_1} \right) + J(r) \right] \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} - \frac{R_1}{2\lambda} B \ln \frac{r}{R_2} + \frac{1}{2} (C - B)$$

$$J(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} [3 \sqrt{r^2 - R_1^2} - (2R_1 + \frac{r^2}{R_1}) \arccos \frac{R_1}{r}]$$

Произвольные постоянные интегрирования B и C находятся из граничных условий, предполагая, что молекулы отражаются от поверхностей цилиндров диффузно с максвелловским распределением по скоростям. В соответствии с этим граничные условия для a_1 и a_2 имеют вид

$$a_1(R_1) = 0, \quad a_2(R_2) = 0 \quad (10)$$

Решая совместно (9) и (10), нетрудно определить B и C

$$B = \delta \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{R_2^2 - R_1^2}{2\lambda} + \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1} \right) + J(R_2) \right] \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \quad (11)$$

$$C = \delta \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(-\frac{R_2^2 + R_1^2}{2\lambda} + \frac{R_1^2 - R_2^2}{R_1} \right) - J(R_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{R_1}{2\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} \left[\sqrt{\pi} \left(\frac{R_2^2}{2\lambda} + \frac{R_2^2}{R_1} \right) + 2J(R_2) \right] \right\} \frac{1}{n} \frac{dn}{dz}$$

$$\delta = \left(1 + \frac{R_1}{2\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} \right)^{-1}$$

Из (4), (9) и (11) можно найти средне-массовую скорость $\langle v_z(r) \rangle$ как функцию r .

Рассмотрим выражение для средне-массовой скорости при различных режимах течения газа. Поскольку ни R_1/λ , ни R_2/λ не могут характеризовать течение газа между коаксиальными цилиндрами, то, следуя Лизу [1], выберем в качестве характерного параметра величину $R_1/2\lambda \ln R_2/R_1$. Из определения δ (11) можно установить условие, определяющее свободно-молекулярное течение газа

$$\frac{R_1}{2\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} \ll 1, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{R_2 - R_1} \gg \frac{1}{2} \frac{\ln(R_2/R_1)}{R_2/R_1 - 1} \quad (12)$$

и условие, определяющее вязкое течение газа

$$\frac{R_1}{2\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} \gg 1, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{R_2 - R_1} \ll \frac{1}{2} \frac{\ln R_2/R_1}{R_2/R_1 - 1} \quad (13)$$

Любые другие значения отношения R_2/R_1 определяют переходную область. При выполнении условия (12) получаем выражение для среднемассовой скорости в виде

$$\langle v_z(r) \rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \left\{ 2J(r) - \sqrt{\pi} \frac{R_2^2 - R_1^2}{2R_1} - J(R_2) + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{R_1} \left(r^2 - \frac{R_2^2 + R_1^2}{2} \right) - J(R_2) \right] \arccos \frac{R_1}{r} \right\} \frac{1}{n} \frac{dn}{dz} \quad (14)$$

Из (14) и (6) видно, что даже в случае свободно-молекулярного течения, когда столкновениями между молекулами можно пренебречь (интеграл столкновений равен 0), средне-массовая скорость является функцией радиального расстояния. Для вязкого течения (условие 13) получаем

$$\langle v_z(r) \rangle = - \frac{1}{4\eta} \left(R_2^2 - r^2 + \frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2/R_1)} \ln \frac{r}{R_2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \lambda D \right) \frac{dP}{dz}$$

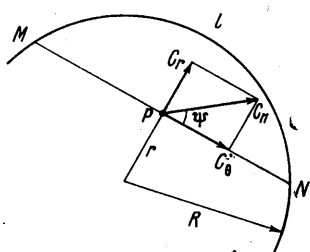
$$D = \left[\sqrt{\pi} \frac{R_2^2 + R_1^2}{R_1} + 2J(R_2) \right] \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_2/R_1)} + \frac{\sqrt{\pi}}{R_1} \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{2 \ln(R_2/R_1)} + R_2^2 \right) + 2 \left[J(R_2) - J(r) \right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{R_1} \left(r^2 - \frac{R_2^2 - R_1^2}{2 \ln(R_2/R_1)} \right) \arccos \frac{R_1}{r} \quad (15)$$

При очень малых λ выражение для $\langle v_z(r) \rangle$ (15) в точности равно соответствующему выражению, полученному из решения уравнения Навье — Стокса для вязкого течения несжимаемого газа в предположении, что скорость скольжения на поверхности цилиндров равна 0 [4]. Коэффициент вязкости η определяется как

$$\eta = \frac{2kT}{3A_2(5)} \left(\frac{m}{2K} \right)^{1/2} \quad (16)$$

и равен коэффициенту вязкости, вычисленному по методу Чепмена-Энскога для максвелловских молекул [5].

Из (15) можно получить скорости скольжения газа на цилиндрах, которые называются различными, причем $\langle v_z(R_2) \rangle > \langle v_z(R_1) \rangle$. Следует отметить, что при $R_1 \rightarrow 0$ общее выражение для средне-массовой скорости не переходит в решение для течения газа в цилиндре. Это и неудивительно, так как в этом случае область 1 (фиг.1) уменьшается в длину. Рассмотренный метод можно применить к задаче о течении газа в цилиндре с радиусом R . Из фиг. 2 видно, что при решении этой задачи областями 1 и 2 будут области, ограниченные прямой MN и дугами MmN и MIN соответственно.



Фиг. 2

Аналогично (2), можно записать

$$f_1 = f^0 (1 + a_1 c_z) \quad \text{при } 0 < \psi < \pi$$

$$f_2 = f^0 (1 + a_2 c_z) \quad \text{при } \pi < \psi < 2\pi \quad (17)$$

Нетрудно показать, пользуясь предложенной методикой расчета, что средне-массовая скорость $\langle \bar{v}_z(r) \rangle$ определяется выражением

$$\langle \bar{v}_z(r) \rangle = - \frac{1}{4\eta} (R^2 - r^2 + 2\lambda R) \frac{dP}{dz} \quad (18)$$

При $R_1 \rightarrow R_2$ общее решение переходит в соответствующее решение для течения газа между двумя бесконечными параллельными пластинами, как и в работах Лиза [1] и В. П. Шидловского [8].

Применяя рассматриваемый метод к решению такой задачи с использованием функции распределения, аналогичной (17), и интегрального уравнения переноса для признака ϕ в декартовой системе координат, можно получить значение средне-массовой скорости

$$\langle v_z(r) \rangle = - \frac{1}{2\eta} \left(\frac{d^2}{4} - x^2 + \lambda d \right) \frac{dP}{dz} \quad (19)$$

где d — расстояние между пластинками.

Выражения (18) и (19) совпадают с аналогичными результатами, полученными при макроскопическом подходе к решению задачи (6). Коэффициент скольжения оказывается равным λ и соответствует общепринятому коэффициенту в теории вязкого течения газа со скольжением. Коэффициент вязкости η определяется из (16).

Таким образом, метод решения с использованием разрывной локально-максвелловской функции распределения позволяет получить решение, описывающее течение одноатомного газа между коаксиальными цилиндрами, в цилиндре и между бесконечными параллельными пластинами. Общее решение для коаксиальных цилиндров переходит в аналогичное решение для течения газа между параллельными пластинками.

Поступило 25 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Lees L., Liu C.-I. Kinetic-theory description of conductive heat transfer from a fine wire. *Phys. Fluids*, 1962, vol. 5, No. 10, 1137—1148.
2. Б о л ь ц м а н Л. Лекции по теории газов. Гостехиздат, 1956.
3. Ш и д л о в с к и й В. П. Введение в динамику разреженного газа, Изд-во «Наука», 1965.
4. Л а н д а у Л. Д., Л и ф ш и ц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
5. Ч е м п е н С., К а у л и н г Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. литер., 1960.
6. Д е в и е н Д. Течение и теплообмен разреженных газов. Изд. иностр. лит., 1962.

ДИФфуЗИОННЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ КАПЛИ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЕМНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

В. С. КРЫЛОВ (*Москва*)

Теоретическое описание элементарных актов массопередачи в системах жидкость — газ и жидкость — жидкость при наличии объемных химических реакций, в которых участвует передаваемое вещество, обычно основывается на так называемой пенетрационной модели, или модели проникания [1]. В этой модели рассматриваются весьма малые (по сравнению с временем релаксации диффузионного процесса) времена контакта фаз, в течение которых роль конвективного переноса в фазе, лимитирующей скорость процесса, можно не учитывать. При этом предполагается, что в случае турбулентного движения фаз конвективный перенос осуществляется посредством замены участков среды, прилегающих к границе раздела, новыми, не обедненными (или не обогащенными) растворенным веществом участками, поступающими из объема соответствующей фазы вследствие турбулентного движения [2—4]. Частота смены старых участков новыми, или интенсивность обновления поверхности, характеризуется так называемым «периодом обновления» Δt . Этот период фигурирует в вышеупомянутых теориях [2—4] в качестве параметра, не поддающегося, к сожалению, ни теоретическому расчету, ни экспериментальному определению. В случае же ламинарного движения фаз модель проникания вообще не позволяет учесть влияния гидродинамики на скорость массопередачи. Между тем было показано [5], что в случае ламинарного движения капель и пузырьков при больших числах Пекле модель проникания неадекватна физической картине явления и описывает лишь самую начальную стадию процесса массопередачи, не имеющую практического значения. По этой причине нам представляется весьма важным как в теоретическом, так и в практическом отношении обобщение теории диффузионного пограничного слоя, наиболее корректно учитывающей роль конвективного переноса, на случай систем с объемными химическими реакциями.

С этой целью ниже будет решена задача о диффузионном потоке на каплю радиуса R , движущуюся в вязкой среде по закону Адамара — Рыбчинского, при условии, что скорость массопередачи лимитируется сопротивлением внешней фазы и что в объеме внешней фазы диффундирующее вещество участвует в химической реакции первого порядка. Если считать, что в начальный момент времени концентрация вещества всюду во внешней фазе равна нулю, то задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \cdot \nabla c = D \Delta c - kc \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$c(R, \vartheta, t) = c_0, \quad c(\infty, \vartheta, t) = 0, \quad c(r, \vartheta, 0) = 0 \quad (2)$$