

К ОБТЕКАНИЮ ПЛАСТИНКИ ВЯЗКИМ ПОТОКОМ НЕРАВНОВЕСНОГО ГАЗА

В. М. КУЗНЕЦОВ, С. Н. СЕЛИВЕРСТОВ

(Москва)

1. Рассмотрим уравнения релаксационной гидродинамики для двухатомного совершенного газа в случае, когда вращательные степени свободы находятся в равновесии с поступательными, колебательные степени релаксируют, а диссоциация еще не наступила.

Гидродинамические течения, соответствующие такой модели газа, имеют место за умеренно сильными ударными волнами, а также в пограничных слоях при температурах торможения в несколько тысяч градусов.

В последнем случае на характер неравновесных явлений в газе оказывают влияние не только диссипативные процессы в самом слое, но и свойства обтекаемой поверхности (каталитичность стенки). Система уравнений Навье — Стокса для сильно неравновесной модели газа имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} + n \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{P} = m \sum_{(N)} \int f \mathbf{V} \mathbf{V} d\mathbf{V} \\ n \frac{dE}{dt} + \mathbf{P} : \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{Q} = - \left(\lambda_a \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (1.1) \\ n \frac{dE_k}{dt} + \frac{\partial \mathbf{q}_k}{\partial \mathbf{r}} + \Omega = 0, \quad \mathbf{q}_k = - \lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial \mathbf{r}} \end{aligned}$$

Здесь \mathbf{P} — тензор давления, \mathbf{Q} — полный поток энергии, \mathbf{q}_k — внутренний поток, обусловленный колебательными степенями свободы. Всюду в работе используются стандартные обозначения кинетической теории газов [2, 3].

Система (1.1) может быть получена из уравнения Больцмана во втором приближении по функции распределения $f^{(1)}$. При этом

$$f^{(1)} = f^{(0)}(1 + \Phi), \quad \Phi = \mathbf{A}^{(1)} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{A}^{(2)} \frac{\partial T_k}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{B} : \frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{A}_3 \quad (1.2)$$

где $f^{(0)}$ — равновесная функция.

Выражение для Φ учитывает в гидродинамическом приближении отклонение от состояния равновесия, причем каждый член указывает на определенный вид диссипации. Так, векторы $\mathbf{A}^{(1)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$ определяют теплопроводность, а тензор \mathbf{B} — вязкое трение.

Выражение для Ω в (1.1), связанное с релаксационными процессами, имеет вид

$$\Omega = \sum_{(N)} E_N \int (f^{(1)'} f_1^{(1)'} - f^{(1)} f_1^{(1)}) P g b db d\varphi dv \quad (1.3)$$

Здесь суммирование идет по всем квантовым числам при неупругих столкновениях молекул, а $P \Rightarrow P(NN_1 \rightarrow N'N'_1)$ означает вероятность обмена энергией при столкновении. Величина E_N обозначает внутреннюю энергию в N -м состоянии. Поскольку в расчетах использовалась модель гармонического осциллятора, то

$$E_N = h\nu \left(N + \frac{1}{2} \right) \quad (1.4)$$

Опишем кратко физическую сущность процессов, имеющих место в релаксационных течениях.

Пусть l_a, l_k обозначают длины установления равновесия в активных (соответственно поступательных и вращательных) и в инертных (колебательных) степенях свободы, а l_{ak} характеризует общую длину релаксации, т. е. длину установления полного термодинамического равновесия. Тогда, если характерный размер обтекаемого тела $\sim L$, то при $l_a \sim l_k \sim l_{ak} \ll L$ имеем течения, близкие к равновесным, при $l_a \sim l_k \sim l_{ak} \gg L$ — течения, близкие к замороженным, а при $l_a \sim l_k \ll l_{ak} \sim L$ — так называемую двухтемпературную релаксацию — наиболее интересный случай для аэродинамики, поскольку он позволяет рассматривать течения с любой степенью неравновесности. Кинетические коэффициенты для системы уравнений пограничного слоя следует выбирать с учетом влияния релаксационных явлений на процессы диссипации [4]. При этом оказывается, что диссипация, связанная с A_3 в (1.2), пренебрежимо мала [4] и ее можно не учитывать¹.

Поэтому в уравнениях неравновесного пограничного слоя остаются те же коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ_a , которые содержатся в пограничном слое для квазиравновесного газа (в λ_a дают вклад поступательные и вращательные степени свободы). Однако коэффициент внутренней теплопроводности λ_k является сильной функцией температур T и T_k и, кроме того, содержит добавку за счет механизма резонансного обмена квантами колебательной энергии при столкновении [4] (на величину этого коэффициента вращательные степени свободы не влияют [7]).

2. Рассмотрим неравновесный, стационарный и сжимаемый пограничный слой на плоской, полубесконечной пластинке. Исходные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) &= 0 \\ \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_a \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \rho \left(u \frac{\partial E_k}{\partial x} + v \frac{\partial E_k}{\partial y} \right) &= \rho \frac{E_k(T) - E_k(T_k)}{\tau(\rho, T)} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_k \frac{\partial T_k}{\partial y} \right) \\ p &= nkT, \quad \partial p / \partial y = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь $\rho = nm$ — плотность газа, u, v — компоненты скорости, а h — удельная энтальпия. Система (2.1) не может быть сведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям при $(T - T_k)/T \sim 1$ в отличие от классической задачи Блязиуса.

¹ Отметим, что при учете вращений в рассматриваемой модели газа [2], пользуясь методами работы [6], можно показать, что тензор давления в уравнениях Навье — Стокса помимо членов со сдвиговой μ и объемной вязкостью ζ содержит за счет величины типа A_3 добавочный член вида

$$\Delta p = \frac{\zeta}{kT} \frac{[E_k(T) - E_k(T_k)]}{\tau}$$

Последний однако, небрежимо мал в пограничном слое, но имеет смысл в релаксационной зоне за вязким скачком уплотнения.

Как показано в [8, 9], можно построить ее упрощенное решение, но при существенных предположениях. Во-первых, время релаксации τ , параметр $\rho\mu/\rho_\infty\mu_\infty$ и теплоемкость колебательных степеней свободы c_{vk} считаются постоянными, и, во-вторых, не учитывается влияние неравновесности на коэффициенты переноса. В общем случае таких предположений делать нельзя.

Так как в системе пограничного слоя (2.1) присутствует релаксационное уравнение, необходимо ввести граничные условия для внутренней температуры T_k на стенке и во внешнем потоке $T_k(y = \infty)$, $T_k(y = 0)$ либо dT_k/dy ($y = 0$). Точные условия для T , T_k на стенке задаются сложными законами взаимодействия частиц газа с молекулами стенки, но характер такого взаимодействия в сплошной среде можно определить через каталитическое влияние обтекаемой поверхности.

Время релаксации τ в системе (2.1) определяется формулой (6) из работы [10], а граничные условия имеют вид для некаталитической пластинки

$$\begin{aligned} u = v = 0 \quad (y = 0), \quad dT/dy = dT_k/dy = 0 \quad (y = 0) \\ u = u_\infty \quad (y = \infty), \quad T = T_k = T_\infty \quad (y = \infty) \end{aligned} \quad (2.2)$$

для каталитической пластинки

$$\begin{aligned} u = v = 0 \quad (y = 0), \quad T = T_w, \quad T_k = T_{wk} \quad (y = 0) \\ u = u_\infty \quad (y = \infty), \quad T = T_k = T_\infty \quad (y = \infty) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть течение газа у пластинки таково, что на внешней границе пограничного слоя $T = T_k$. В общем случае, т. е. для других аэродинамических профилей вполне реально условие $T \neq T_k$, которое может быть учтено применяемым в данной работе методом.

Преобразуем систему (2.1) к форме, общепринятой в теории пограничного слоя. Введем при помощи уравнения неразрывности функцию тока $\psi = \psi_*(x)f$ и заменим переменную y на η через соотношение

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\rho u_\infty}{\psi_*}, \quad \psi_* = \left(2 \int_0^x u_\infty \rho_\infty \mu_\infty dx \right)^{1/2}$$

Тогда после ряда преобразований получим систему уравнений в безразмерных переменных (отмеченных индексом нуль сверху там, где это необходимо)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\rho\mu}{\rho_\infty\mu_\infty} f'' \right)' + f''f = \alpha \left(f' \frac{\partial f'}{\partial \xi} - f'' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \quad (2.4) \\ \left(\frac{\rho\mu}{\rho_\infty\mu_\infty} \frac{c_{vk}^\circ}{\sigma_k} \theta_k' \right)' + c_{vk}^\circ f \theta_k' + \alpha \frac{E_k^\circ(\theta) - E_k^\circ(\theta_k)}{\tau_0^\circ} = \alpha c_{vk}^\circ \left(f' \frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} - \theta_k' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \\ \left(\frac{\rho\mu}{\rho_\infty\mu_\infty} \frac{\theta'}{\sigma} \right)' + f\theta' + \frac{2\rho\mu}{\eta_\infty\mu_\infty} u_\infty^{\circ 2} - \alpha \frac{E_k^\circ(\theta) - E_k^\circ(\theta_k)}{\tau^\circ} \left(\frac{c_{vk}}{c_{pa}} \right)_\infty = \\ = \alpha \left(f' \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \theta' \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f = f' = 0, \quad \theta = \theta_w, \quad \theta_k = \theta_{wk} \text{ или } \theta' = \theta_k' = 0, \quad \eta = 0 \\ f' = 1, \quad \theta = \theta_k = 1, \quad \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.5)$$

В уравнениях (2.4) использованы безразмерные комбинации:

$$\theta = \frac{T}{T_\infty}, \quad \theta_k = \frac{T_k}{T_\infty}, \quad c_{vk}^\circ = \frac{c_{vk}}{(c_{vk})_\infty}$$

$$E_k^\circ(\theta) = \frac{E_k(\theta)}{E_{k\infty}}, \quad E_k^\circ(\theta_k) = \frac{E_k(\theta_k)}{E_{k\infty}}, \quad u_\infty^{\circ 2} = \frac{u_\infty^2}{(c_{pa}T)_\infty} \quad (2.6)$$

$$\sigma_k = \frac{c_{vk}\mu}{\lambda_k}, \quad \sigma = \frac{c_{pa}\mu}{\lambda_a}, \quad a = 2X^\circ, \quad X^\circ = \xi \equiv \frac{x}{u_\infty \tau_\infty}$$

Здесь X° — параметр неравновесности, σ — число Прандтля.

Уравнения (2.4) с условиями (2.5) интегрировались численно на ЭВМ. В основу расчета была положена программа, пригодная для широкого класса задач плоского пограничного слоя при весьма произвольных граничных условиях [11], составленная по методу работы [12]. Интегралы столкновений $\Omega^{(l,s)}$ в кинетических коэффициентах аппроксимировались согласно [13]. Рассматриваемая математическая модель позволяет строго исследовать неравновесные пограничные слои при всех значениях X° (2.6).

При этом замороженные течения получаются автоматически для $X^\circ \ll 1$, а равновесные — для $X^\circ \gg 1$.

Однако при определении понятия неравновесного пограничного слоя возникает ряд особенностей, связанных с видом граничных условий. Поскольку в рассматриваемом классе задач речь идет о температурной релаксации, назовем неравновесным пограничным слоем ту область по координате x , в которой имеет место неравенство $T \neq T_k$ по y . При этом не появляется никаких противоречий, если граничные условия всюду равновесные. Если же на стенке $T \neq T_k$, то возникает вопрос, чему соответствует решение задачи, когда $X^\circ \rightarrow \infty$.

Очевидно, в этом случае полезно ввести понятие частично равновесного слоя, в котором на некотором непрерывном отрезке по y (а по x от нуля до ∞) профили T и T_k совпадают, а в некоторой области, прилегающей к стенке, различаются.

Очевидно, что понятие частично равновесного слоя отличается от понятия квазиравновесного слоя, так как в первом случае степень отклонения от равновесия может быть любой. Важно, однако, чтобы при $X^\circ \rightarrow \infty$ значение T_k совпадало с T в некоторой непрерывной области, а не в изолированных точках. В последнем случае, если $T \neq T_k$ в конечном числе изолированных точек, пограничный слой следует считать полностью неравновесным. Поскольку влияние релаксационных эффектов на динамические характеристики мало, наиболее существенным является изучение профилей температур и тепловых потоков.

3. Рассмотрим распределение температур θ и θ_k в пограничном слое, а также безразмерные тепловые потоки на стенке, имеющие вид

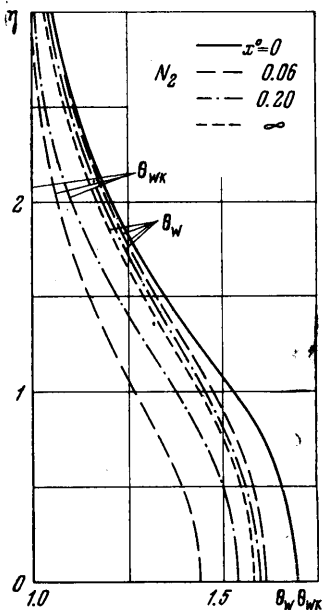
$$q_{wa}^\circ = \frac{q_{wa} \sqrt{R_x}}{u_\infty \rho_\infty c_{v\infty} T_\infty} = \left(\frac{\theta'}{\sqrt{\theta}} \right)_w \left\{ \sigma \sqrt{2} \left[\left(\frac{c_{vk}}{c_{pa}} \right)_\infty + \frac{1}{\gamma} \right] \right\}^{-1} \quad (2.7)$$

$$q_{wk}^\circ = \frac{q_{wk} \sqrt{R_x}}{u_\infty \rho_\infty c_{v\infty} T_\infty} = \left(\frac{\theta_k'}{\sqrt{\theta}} \right)_w (c_{vk}^\circ)_w \left\{ A_k (1 - B_k \theta) \sqrt{2} \left[1 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{c_{pa}}{c_{vk}} \right)_\infty \right] \right\}^{-1}$$

Здесь q_{wa}° , q_{wk}° — потоки от активных и колебательных степеней свободы, а $c_{v\infty}$ — общая теплоемкость, R_x — число Рейнольдса.

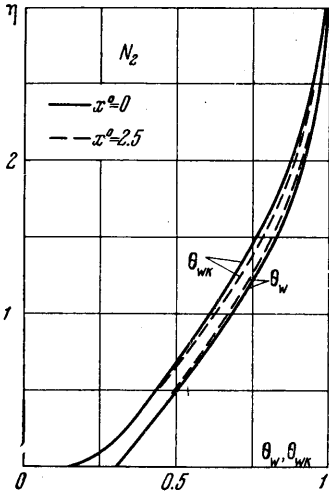
При этом вид $\sigma_k = A_k(1 - B_k\theta)$ связан с учетом вклада резонансных обменов в σ_k [4], а γ — показатель адиабаты. Поверхностное трение τ_w° и толщина вытеснения $\delta^{*\circ}$ определяются формулами

$$\tau_w^\circ = \frac{\tau_w \sqrt{R_x}}{\rho_\infty u_\infty^2} = \left(\frac{f''}{\sqrt{2\theta}} \right)_w, \quad \delta^{*\circ} = \frac{\sqrt{2R_x}}{2x} \delta^* \quad (2.8)$$

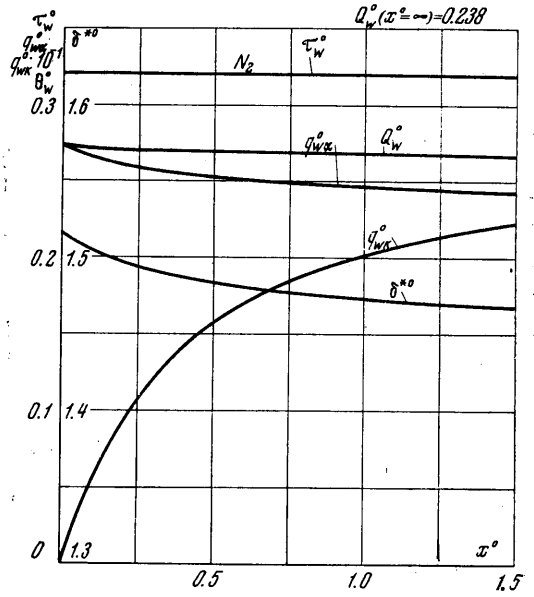


Фиг. 1

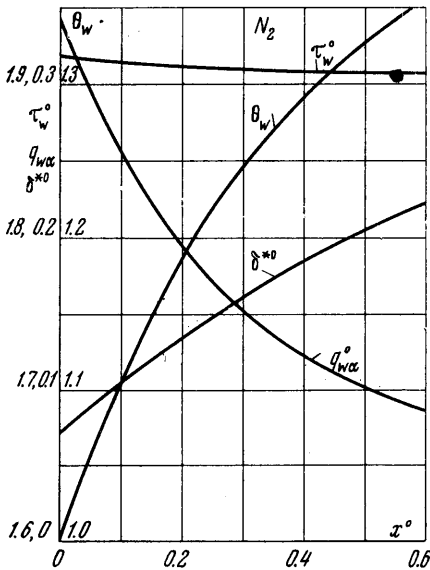
На фиг. 1, 2 построены значения θ , θ_k по η для азота (N_2) при различных X° для теплоизолированной ($M_\infty = 2$, $\theta_w' = \theta_{wk}' = 0$, $T_\infty = 3336^\circ K$) и неравновесной стенок ($M_\infty = 2$, $T_w = 1000^\circ K$, $T_{wk} = 500^\circ K$, $T_\infty = 3336^\circ K$). Так как принципиальная сторона неравновесных явлений идентична в различных двухатомных газах, расчеты, проведенные для O_2 , Cl_2 , J_2 , в этой работе не приводятся. Однако ввиду малой энергоемкости колебательных степеней свободы, наряду с N_2 по-



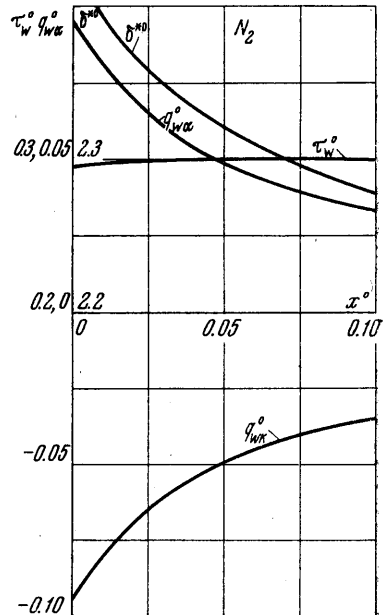
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

дробно изучалась гипотетическая модель азота N_2 (фиг. 4—6), в которой вращательные степени свободы были заменены колебательными.

На фиг. 3 ($M_\infty = 2$, $T_w = T_{wk} = 3336^\circ K$, $T_\infty = 3336^\circ K$) представлены расчеты Q_w° , q_{wa}° , q_{wk}° , τ_w° , δ_w° , θ_w в зависимости от X° , а на фиг. 4 — те же характеристики

пограничного слоя при краевых условиях вида ($M_\infty = 2$, $\theta_{wk}' = 0$, $\theta_{wk} = \theta_w$, $T_\infty = 3336^\circ \text{K}$). На фиг. 5 представлен расчет пограничного слоя для полностью теплоизолированной пластинки ($M_\infty = 2$, $T_\infty = 3336^\circ \text{K}$, $q_{wa} + q_{wk} = 0$, $\theta_w = \theta_{wk}$).

На фиг. 6 показаны профили θ , θ_k по η при гиперзвуковом обтекании ($M_\infty = 8$, $T_w = 1000^\circ \text{K}$, $T_{wk} = 550^\circ \text{K}$, $T_\infty = 330^\circ \text{K}$) без учета задачи взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком. Из оценок, входящих в уравнения величин, следует, что это не очень существенное ограничение.

Анализируя проведенные расчеты, можно сделать следующие выводы:

а) для теплоизолированной и каталитической пластинки (при $T_w = T_{wk}$ и $T_w \neq T_{wk}$) во всей области неравновесности

$$\tau_w^\circ(X^\circ) \approx \text{const}, \quad \delta^\circ(X^\circ) \approx \text{const}$$

б) на изменение суммарного теплового потока к стенке в зависимости от X° сильно влияют значения T_w , T_{wk} и энергоемкость релаксирующих степеней свободы;

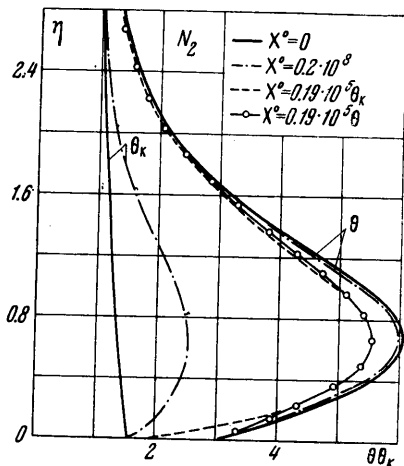
с) в количественном отношении изменение теплового потока

$$\Delta Q_w^\circ = \frac{Q_{w3}^\circ - Q_{w2}^\circ}{Q_{w3}^\circ}$$

невелико. Так, например, для N_2 при $M_\infty = 8$, $T_\infty = 330^\circ$, величина ΔQ_w° составляет: 12% — при $T_w = T_{wk} = 3336^\circ \text{K}$, 1% — при $T_w = T_{wk} = 1000^\circ \text{K}$, 0,03% — при $T_w = T_{wk} = 330^\circ \text{K}$. Если $M_\infty = 2$, $T_\infty = 3336^\circ \text{K}$, то ΔQ_w° для N_2 составляет 13% — при $T_w = T_{wk} = 3336^\circ \text{K}$ и 1% — при $T_w = T_{wk} = 1000^\circ \text{K}$;

д) для гипотетической модели N_2 с повышенной энергоемкостью колебательных степеней ΔQ_w° при $M_\infty = 2$, $T_\infty = 3336^\circ \text{K}$, $T_w = T_{wk} = 3336^\circ \text{K}$ составляет 25%;

е) характер и влияние неравновесности в пограничном слое сильно зависят от вида граничных условий и могут стать значительными в более энергоемких по сравнению с колебаниями внутренних степеней свободы (например, при неравновесной диссоциации или ионизации).



Фиг. 6

Поступило 25 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

- Жигулев В. Н. Уравнения движения неравновесной среды с учетом излучения. Инж. ж., 1964, т. 4, № 2, 3.
- Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. Изд. иностр. лит., 1960.
- Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. Изд. иностр. лит., 1961.
- Кузнецов В. М. Кинетические коэффициенты в теории двухтемпературной колебательной релаксации. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
- Коган М. Н. Об уравнениях неравновесных течений газа. ПМТФ, 1965, № 1.
- Кузнецов В. М. Диссипативные коэффициенты в сильно неравновесных газовых смесях с бинарными столкновениями. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 5.
- Mason E. A., Monchick L., Heat Conductivity of Polyatomic and Polar Gases. J. Chem. Phys., 1962, vol. 36, No. 6.
- Лунькин Ю. П., Ян Си Цинь. Влияние вращательной и колебательной релаксации на ламинарный пограничный слой на пластинке. ПМТФ, 1963, № 1.
- Ладнова Л. А. Ламинарный неравновесный пограничный слой на пластинке. Вестн. Ленингр. у-та, 1964, № 19, вып. 4.
- Егоров Б. В. О релаксационном уравнении для колебательных степеней свободы двухатомного газа. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
- Селиверстов С. Н. Расчет ламинарного пограничного слоя на сфере с подводом гелия в качестве охладителя. Инж. ж., 1965, т. 5, № 4.
- Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений. Сб. Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. Изд-во «Наука», 1964.
- Климов В. Л. Аппроксимирующие формулы для интегралов столкновений. Теплофиз. высокие температуры, 1965, № 5.