Поскольку профили скорости и концентрации компонент уже найдены, интегрирование уравнения энергии также не вызывает затруднений. Решение получается в виде

$$\frac{H\varphi_1(\xi)c_{pw}/c_p - H_w + \Psi(\xi)}{H^*\varphi_1(\xi^*)c_{pw}/c_p^* - H_w + \Psi(\xi^*)} = \frac{\varphi_1(\xi)-1}{\varphi_1(\xi^*)-1}, \qquad \varphi_1(\xi) = \exp\left(-\int_0^\xi \frac{c_{p1}P}{c_p m}\, d\xi\right)$$

$$c_{p1} = \sum_{j=1}^{N} c_{j1}c_{pj}$$

$$\Psi(\xi) = \int_0^\xi \left[(P-1)\frac{d}{d\xi}\frac{u^2}{2} + \left(\frac{P}{m}\frac{c_{p1}}{c_p} - \frac{P}{m} + \frac{d\ln c_p}{d\xi}\right)\frac{u^2}{2}\right]\frac{c_{pw}}{c_p}\varphi_1(\xi)\, d\xi$$

Из соотношений (2.2) следует, что связь переменной ξ с координатой y можно представить в виде

$$y = \frac{1}{(\rho v)_w}\int_0^\xi \frac{\mu d\xi}{m} \qquad \mu = \mu(T, c_i) = f(\xi), \qquad m = \sum_{i=1}^{N} g_i(\xi)$$

Таким образом, решение получено в параметрическом виде. Искомые функции c_i, u, H и координата y получены как функции параметра ξ.

Поступило 3 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Merk H. J. The macroscopic equations for simultaneous heat and mass transfer in isotropic, continuous and closed systems. Appl. Scient. Res, A, 1958, vol. 8, N 1.
2. Тирский Г. А. Условия на поверхностях сильного разрыва в многокомпонентных смесях. ПММ, 1964, т. 25, вып. 2.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 6-е, Гостехтеоретиздат, 1953.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ МАКСВЕЛЛОВА ГАЗА

А. С. БОРИСОВ

(Москва)

Известно [1], что если моменты функции распределения молекул одноатомного максвеллова газа при отсутствии внешних сил зависят только от времени t, а компоненты массовой скорости u_i — еще линейно от координат x_i то бесконечная система уравнений кинетических моментов распадается на ряд последовательно решаемых замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Таким же свойством обладают уравнения кинетических моментов смеси одноатомных максвелловых газов при наличии внешних сил определенного класса [2].

Общее решение уравнений для коэффициентов, характеризующих зависимость u_i от t для таких однородных течений, было получено в работе [3]. Исследование асимптотики некоторых решений указанной системы уравнений при больших t проводилось в работе [4].

Ниже изучаются асимптотические свойства решений систем уравнений кинетических коэффициентов данного класса при $t \to \infty$. Начальные условия и характерные числа Кнудсена фиксированы (так же, как и в работе [4]). Отметим, что, например, при исследовании применения уравнений метода Чепмена — Энскога ищется другое асимптотическое разложение: по малым K при фиксированных t. Показано, что, вообще говоря, функция распределения не стремится к максвелловской при $t \to \infty$, даже если в начальный момент она являлась максвелловской.

1. В обозначениях работы [5] имеем для указанного класса течений:

$$\frac{da^{(n)}}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_i}a_i^{(n)}+\frac{n}{2RT}\frac{dRT}{dt}a^{(n)}+\left(\frac{1}{RT}\frac{dRT}{dt}\delta+\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}\right)a^{(n-2)}=J^{(n)},$$

$$J^{(n)}=\rho\sum_{k=0}^{n}C_k a^{(k)}a^{(n-k)},\quad C_k=\mathrm{const}\tag{1.1}$$

Здесь $\rho=\rho(t)$ — массовая плотность.

Рассмотрим сначала плоское расширение газа:

$$u_1=x_1/t,\quad u_2=x_2/t,\quad u_3=0$$

Из уравнений энергии и неразрывности соответственно получаем следующие соотношения:

$$\dot T/T=(2/3t)a_{33}-4/3t,\qquad \dot T\equiv \mathrm{d}T/\mathrm{d}t,\qquad \rho=\rho_0(t_0/t)^2$$

Здесь индекс 0 относится к начальному состоянию.

С учетом этих соотношений для a_{ij} получим:

$$\dot a_{11}+\frac{2}{t}a_{11}+\frac{2}{3t}(a_{11}+1)(a_{11}-2)+\frac{2}{t}=-\frac{\beta}{t^2}a_{11}\tag{1.2}$$

$$\dot a_{12}+\frac{2}{t}a_{12}+\frac{2}{3t}(a_{33}-2)a_{12}=-\frac{\beta}{t^2}a_{12}\tag{1.3}$$

$$\dot a_{33}+\frac{2}{3t}(a_{33}+1)(a_{33}-2)=-\frac{\beta}{t^2}a_{33}\tag{1.4}$$

$$a_{22}=a_{11},\qquad a_{23}=a_{13}=a_{12},\qquad \beta=\frac{R\rho_0 t_0^2}{\mu_0},\qquad \mu_0=\frac{\mu}{T}\tag{1.5}$$

(μ — коэффициент вязкости).

Уравнение (1.4), являющееся уравнением Риккати, имеет следующие два линейно-независимых решения, стремящиеся к постоянным, отличным от 0 при $t\to\infty$ [6]:

$$a_{33}(t)=2-2\beta/t+o(1/t)\tag{1.6}$$

$$a_{33}(t)=-1-\beta/3t+o(1/t)\tag{1.7}$$

Отсюда в случае (1.6)

$$\dot T/T=-4\beta/3t^2+o(1/t^2)\tag{1.8}$$

Тогда из уравнений (1.2) — (1.5) имеем:

$$\lim_{t\to\infty}a_{ij}=0(i\neq j),\qquad \lim_{t\to\infty}a_{11}=\lim_{t\to\infty}a_{22}=-1\tag{1.9}$$

В случае же (1.7) величины $a_{11}(t)$ и $a_{22}(t)$ стремятся к постоянным, зависящим от начальных условий.

Для a_{ijk} имеем систему:

$$\dot a_{ijk}+a_{ijr}\Psi_{kr}+a_{irk}\Psi_{jr}+a_{rjk}\Psi_{ir}+\frac{3\dot T}{2T}a_{ijk}=$$

$$=(\beta/6t^2)(a_i\delta_{jk}+a_j\delta_{ik}+a_k\delta_{ij}-9a_{ijk}),\qquad a_n=a_{nmm}\tag{1.10}$$

Для плоского расширения

$$\Psi_{11}=\Psi_{22}=1/t,\qquad \Psi_{ij}=0\qquad (i=j=3,\quad i\neq j)$$

Введем в системе (1.10) новый аргумент $\tau=\ln t$ и запишем (1.10) в векторно-матричном виде [7]:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau}=Az+B(\tau)z,\qquad \int^{\infty}\|B(\tau)\|d\tau<\infty,\qquad \lim_{\tau\to\infty}B(\tau)=0\tag{1.11}$$

Здесь $z = \{a_{111}, \ldots, a_{333}\}$ — вектор-столбец, A — постоянная диагональная матрица, $\|B(\tau)\|$ — норма матрицы B.

Уравнение (1.11) эквивалентно линейному интегральному уравнению:

$$z = y + \int_0^\tau Y(\tau - \tau_1) B(\tau_1) z(\tau_1)\, d\tau_1 \tag{1.12}$$

Здесь использовано преобразование $\tau^* = \tau - \tau_0$, а затем звездочка опущена. Величины y и Y в уравнении (1.12) представляют собой соответственно решения следующих задач Коши:

$$dy / d\tau = Ay, \qquad y(0) = z(0), \qquad dY / d\tau = AY, \qquad Y(0) = E$$

где E — единичная матрица.

В случае выполнения формулы (1.7) матрица A имеет положительное характеристическое число, и поэтому решение системы (1.11), а, следовательно, и системы (1.10) оказывается неограниченным при $t \to \infty$ ([8]). При этом функция распределения может отличаться от максвелловской на любую заданную величину, начиная с некоторого момента времени, если только при $t = 0$ функция распределения не была максвелловской (в силу однородности система (1.10) имеет тривиальное решение $a_{ijk}(t) \equiv 0$). Такой случай мы далее рассматривать не будем.

Пусть выполняется равенство (1.8). Обозначим первообразную в (1.12) через $\Phi(\tau)$. Так как последний диагональный элемент в матрице A равен 0, а все предыдущие отрицательны, то на основании теорем 1 и 2 работы [7] (см. стр. 45, 47) получаем при $t \to \infty$

$$\lim a_{ijk} = 0 \quad (\text{если не все } i,\ j,\ k \text{ равны } 3), \quad \lim a_{333} = \Phi(t_0) < \infty$$

(здесь вернулись к старому аргументу).

Далее методом индукции легко показать, что любые коэффициенты $a^{(n)}$ стремятся к конечным величинам при $t \to \infty$.

Если рассмотреть соответствующее свободно-молекулярное течение (ему соответствует система с выброшенными столкновительными членами $J^{(n)}$), то получим аналогичную ситуацию, однако здесь предельные постоянные при тех же начальных условиях будут другими. Последние легко получить последовательно друг за другом, так как решение свободно-молекулярной системы не представляет затруднений (при известном отношении $|\dot{T} / T| \sim 1 / t$).

Итак, в случае плоского расширения $a^{(n)}$ стремятся к некоторым постоянным, которые достигаются и при свободно-молекулярном режиме, но при других начальных условиях. Чтобы выяснить зависимость между начальными условиями, при которых решения систем для $a^{(n)}$ в случае плоского расширения и в случае соответствующего свободно-молекулярного течения стремятся к одним и тем же предельным значениям, надо знать постоянные C_k в формуле для $J^{(n)}$. В приближении модельного уравнения Батнагара — Крука упомянутую зависимость между начальными условиями легко установить в явном виде.

Аналогичные результаты справедливы и для общего плоского однородного течения, рассмотренного в работах [1, 4].

2. Рассмотрим трехмерное расширение максвеллова газа:

$$u_1 = x_1 / t, \qquad u_2 = x_2 / t, \qquad u_3 = x_3 / t$$

Тогда $\dot{T} / T = -2 / t$ и система для $a^{(n)}$ принимает вид:

$$\frac{da^{(n)}}{dt} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^2 J^{(n)}(t, a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \tag{2.1}$$

Здесь $J^{(n)}$ — правая часть n-го уравнения системы для коэффициентов $a^{(n)}$, соответствующей однородному покоящемуся газу.

Переходя к новому аргументу τ по формуле $d\tau / dt = (t_0 / t)^2$, получим систему для покоящегося газа:

$$da^{(n)} / d\tau = J^{(n)}(\tau, a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$$

Это соответствие между покоящимся и сферически расширяющимся газом было установлено А. А. Никольским [9], не только для максвелловских молекул, но и для газа с произвольным показателем степени в силе отталкивания межмолекулярного взаимодействия. Но, с другой стороны, так же как и системы п. 1, система (2.1) имеет ограниченные решения, стремящиеся к конечным пределам. Очевидно, что эти предельные значения, которые достигаются для покоящегося газа при конечном моменте времени, соответствуют решениям свободно-молекулярной системы $da^{(n)} / dt = 0$, если в последней за начальные данные выбрать упомянутые предельные значения. В приближении модельного уравнения Крука эти значения суть известные величины [10].

Легко показать, что указанное соответствие между однородным и свободно-молекулярным течениями имеет место, вообще говоря, и в случае самого общего закона макроскопического расширения [3], если только порядок убывания массовой плотности при $t \to \infty$ выше порядка убывания коэффициентов переносных членов в кинетической системе Грэда. Математическую формулировку последнего условия для общих однородных течений легко получить, воспользовавшись результатами работы [3]. Простейшими примерами однородных течений, когда это условие не выполняется и указанного соответствия может и не быть, являются одномерное расширение и сдвиговое течение [1, 2].

В заключение выражаю благодарность А. А. Никольскому и В. С. Галкину за обсуждение работы.

Поступило 2 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. «Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда». Прикл. матем. и мех., 1958 г., т. 22, вып. 3.
2. Галкин В. С. «О точных решениях уравнений кинетических моментов смеси одноатомных газов». ЖМГ, 1966, № 5.
3. Никольский А. А. «Об общем классе однородных движений сплошных сред и разреженных газов». Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6.
4. Борисов А. С. «Асимптотика некоторых решений системы кинетических моментов Грэда». Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6.
5. Грэд Г. «О кинетической теории разреженных газов». Механика, ИЛ, 1952, № 4—5.
6. Камке Э. «Справочник по дифференциальным уравнениям». ИЛ, 1965.
7. Беллман Р. «Устойчивость решений дифференциальных уравнений». 1954, ИЛ.
8. Коддингтон Э. А. и Левинсон Н. «Теория обыкновенных дифференциальных уравнений». 1958, ИЛ.
9. Никольский А. А. «Трехмерное однородное расширение — сжатие разреженного газа со степенными функциями взаимодействия». Докл. АН СССР, 1963, 151, 3.
10. Борисов А. С., Черемисин Ф. Г. «Задача с начальными данными для релаксационного кинетического уравнения в однородно-расширяющемся (сжимающемся) газе». Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 2.

ОБТЕКАНИЕ ЦИЛИНДРА ПОТОКОМ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

И. В. СКОКОВ

(Москва)

Исследование процессов обтекания тел потоком разреженного газа позволяет получать обширную информацию о механизме взаимодействия модели и потока (распределение плотности, структура ударной волны, геометрия фронта ударной волны и т. д.). Определение упомянутых выше параметров оказывает существенную пользу при решении целого ряда аэродинамических задач.

Из весьма малочисленных экспериментальных работ по изучению скачков уплотнения в разреженном газе можно указать на недавнюю работу [1], в которой при числе Маха $M_\infty = 6$ и числе Рейнольдса $R_\infty = 200$ исследовались параметры обтекания сферы и диска в области передней критической точки.

Развитие техники интерференционных измерений, в частности разработка высокочувствительного метода многолучевой интерферометрии, позволило впервые визуализировать газовые потоки в области течения со скольжением и проводить количественные исследования параметров обтекания [2—4]. При помощи этого метода, отличающегося от обычных интерферометрических методов изучения газовых потоков многократным прохождением светового луча через исследуемый объект, было проведено определение некоторых характеристик обтекания кругового цилиндра, установленного перпендикулярно оси потока. Коническое сопло, рассчитанное на $M_\infty = 4$, ускоряло газовый поток, который проходил между зеркалами интерферометра с коэффициентом отражения 85%; интерферометр освещался коллимированным пучком монохроматического света с длиной волны 577 *нм*; регистрация интерференционной картины осуществлялась при помощи фотоаппарата «Зенит». Обработка интерферограмм