ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В., Румынский А. Н. Развитие пограничного слоя в потоке с распределенной по линиям тока энтальпией торможения. МЖГ, 1966, № 5.
2. Lees L. Laminar Heat Transfer over Blunt Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds Jet. Proplls. 1956, No. 4.
3. Кемр Н., Роуз П., Детра Р. Ламинарный теплообмен тупых тел с потоком диссоциированного воздуха. Сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций», Изд. иностр. лит., 1962.
4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
5. Ферри А. Влияние кривизны ударной волны на поведение гиперзвукового пограничного слоя. Механика. Сб. перев. и обз. ин., 1960, т. 5.
6. Эккерт. Инженерные методы расчета ламинарного и турбулентного пограничного теплообмена при обтекании поверхностей с постоянным давлением и температурой потоком газа большой сверхзвуковой скоростью. Вопросы ракетной механики, 1957, № 4.
7. Glauert. The Boundary layer in simple shear flow past a flat plate, JAS, No. 11, 1957.
8. Kemp H. Vorticity Interaction at an Axisymmetric Stagnation Point an a Viscous Incompressible Fluid JAS, 1958, No. 8.
9. Moeckel Some effects of Bluntness an Boundary Transition and Heat Transfer at Supersonic Speeds, NACA Rep. 1312.
10. Лунев В. В. Закон подобия для гиперзвуковых обтеканий тонких притупленных тел вязким газом. ПММ, 1961, вып. 6.
11. Мурзинов И. Н. Ламинарный пограничный слой на затупленных телах с учетом завихренности внешего потока. Механика жидкости и газа. 1966, № 6.

ТЕЧЕНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

В. Д. СОВЕРШЕННЫЙ

(Москва)

В настоящей работе дается точное решение уравнений, описывающих течение многокомпонентного газа между двумя параллельными проницаемыми плоскостями, из которых одна перемещается параллельно другой с постоянной скоростью (т. е. исследуется течение типа течения Куэтта).

Обозначения

y — координата;
u, v — компоненты скорости;
ρ — плотность;
c_i — массовая концентрация i-й компоненты;
I_i — диффузионный поток i-й компоненты;
H — полное теплосодержание;
T — температура;
m — молекулярный вес;
μ — коэффициент вязкости;
λ — коэффициент теплопроводности;
c_p — удельная теплоемкость смеси;
D_{ij} — бинарные коэффициенты диффузии;
P — число Прандтля;
S_{ij} — числа Шмидта;
N — общее число компонент;
n — число компонент, содержащихся во вдуваемом газе;
l — расстояние между плоскостями.

Индексы: i, j — номера компонент, w относится к величинам при $y = 0$, * — звездочка в верхнем индексе — относится к величинам при $y = l$, второй индекс 1 — относится к величинам с внешней стороны неподвижной проницаемой поверхности.

1. Рассмотрим стационарное течение газа между двумя параллельными плоскостями, из которых одна движется относительно другой с постоянной скоростью u^*. В отличие от простого течения Куэтта, здесь рассматривается течение многокомпонентного газа, являющегося результатом сложения двух течений: основного течения, вызываемого движением подвижной плоскости, и дополнительного, осуществляемого посредством вдува многокомпонентного газа, содержащего n компонент, через неподвижную поверхность по нормали к ней. Через подвижную поверхность также осуществляется проникновение вещества таким образом, что на ней имеют заданные

значения концентрации всех N компонент, содержащихся в газовой смеси между плоскостями. В общем случае $N > n$. Температуры на плоскостях могут быть различны, т. е. существенна теплопередача по нормали к плоскостям. Термодиффузия и химические реакции не рассматриваются.

Формулируемая задача описывается следующей системой уравнений неразрывности, движения, диффузии и энергии:

$$\frac{d\rho v}{dy} = 0, \quad \rho v \frac{du}{dy} = \frac{d}{dy} \mu \frac{du}{dy} \tag{1.1}$$

$$\rho v \frac{dc_i}{dy} = -\frac{dI_i}{dy} \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{1.2}$$

$$\rho v \frac{dH}{dy} = \frac{d}{dy} \frac{\mu}{P} \frac{dH}{dy} + \frac{d}{dy} \mu \left(1 - \frac{1}{P}\right) \frac{d}{dy} \frac{u^2}{2} - \frac{d}{dy} \left[\sum_{k=1}^{N} h_k \left(I_k + \frac{\lambda}{c_p} \frac{dc_k}{dy} \right) \right] \tag{1.3}$$

Связь диффузионных потоков с концентрациями дается соотношениями диффузии Максвелла [1], которые, будучи представленными через массовые концентрации, имеют вид

$$\frac{d}{dy}(c_i m) = \frac{m^2}{\rho} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{m_j D_{ij}} (c_i I_j - c_j I_i) \qquad (i = 1, \ldots, N), \qquad m = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{c_i}{m_i} \right)^{-1} \tag{1.4}$$

Здесь m — молекулярный вес смеси.

Система уравнений (1.1)—(1.4) будет решаться при следующих граничных условиях [2]:

$$y = 0, \quad \rho v = (\rho v)_w, \quad u = 0, \quad T = T_w, \quad (\rho v)_w (c_{i1} - c_{iw}) = I_{iw}$$

$$y = l, \quad u = u^*, \quad H = H^*, \quad c_i = c_i^* \tag{1.5}$$

2. Наибольшую трудность обычно представляет решение нелинейной системы уравнений (1.2), (1.4) для определения полей концентраций. В рассматриваемом случае эту систему удается свести к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если проинтегрировать уравнение диффузии (1.2), то с использованием уравнения (1.1) и граничных условий (1.5) можно получить выражение для диффузионного потока i-й компоненты

$$I_i = (\rho v)_w (c_{i1} - c_i) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

Тогда систему уравнений (1.4) можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{dy}(c_i m) = (\rho v)_w \frac{m^2}{\rho} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{m_j D_{ij}} (c_i c_{j1} - c_j c_{i1}) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.1}$$

Введем новые переменные по формулам

$$g_i = c_i m \qquad (i = 1, \ldots, N), \qquad \xi = (\rho v)_w \int_0^y \frac{m\,dy}{\mu} \tag{2.2}$$

Тогда система уравнений (2.1) сводится к системе линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{dg_i}{d\xi} = \sum_{j=1}^{N} \frac{S_{ij}}{m_i} (c_{j1} g_i - c_{i1} g_j) \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.3}$$

Предполагается, что числа Шмидта, определенные по бинарным коэффициентам диффузии, постоянны, т. е. $S_{ij} = \mathrm{const}$.

Частные решения системы (2.3) естественно искать в виде показательных функций [3]

$$g_i = \gamma_i e^{\lambda \xi} \qquad (i = 1, \ldots, N) \tag{2.4}$$

где γ_i, λ — константы, которые позднее будут определены.

Подстановка соотношений (2.4) в систему уравнений (2.3) приводит ее к системе алгебраических уравнений

$$(\sigma_{ii}-\lambda)\gamma_i+\sum_{j=1}^{N}\sigma_{ij}\gamma_j=0 \qquad (i=1,\ldots,N)$$

$$\sigma_{ii}=\sum_{j=1}^{N}\frac{c_{j1}}{m_j}S_{ij},\qquad \sigma_{ij}=-\frac{c_{i1}}{m_j}S_{ij}\qquad (i\neq j) \tag{2.5}$$

Для получения нетривиального решения (2.4) нужно, чтобы не все γ_i были равны нулю, т. е. определитель системы уравнений (2.5) относительно γ_i должен быть равен нулю, таким образом получается характеристическое уравнение N-й степени

$$\det\|\sigma_{ij}-\delta_{ij}\lambda\|=0,\qquad \delta_{ij}=1\ \text{ при } i=j,\qquad \delta_{ij}=0\ \text{ при } i\neq j. \tag{2.6}$$

В общем случае в виде радикалов могут быть разрешены алгебраические уравнения лишь до четвертой степени включительно. В настоящем случае имеются обстоятельства, которые позволяют получить корни алгебраического уравнения (2.6) и для более высоких степеней.

а) Можно доказать, что уравнение (2.6) не содержит свободного члена. Следовательно, всегда существует нулевой корень

$$\lambda_1=0$$

б) Некоторые компоненты не содержатся во вдуваемом газе, т. е. $c_{i1}=0$ при $n<i<N$, где n — число компонент, содержащихся во вдуваемом газе. В этом случае можно определить значения $(N-n)$ корней уравнения (2.6) в виде

$$\lambda_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_{j1}}{m_j}S_{ij}\qquad (n+1\leqslant i\leqslant N)$$

Таким образом, по крайней мере, при $n-1\leqslant 4$ все корни характеристического уравнения могут быть выражены через радикалы, что соответствует вдуву газа, содержащего до пяти компонент. Число компонент, концентрации которых заданы на подвижной поверхности, может быть неограниченным, поскольку трудность решения характеристического уравнения при этом не возрастает.

После определения корней характеристического уравнения построение фундаментальной системы решений производится обычным методом [3]. При этом могут представиться два случая в зависимости от того, являются ли все корни характеристического уравнения простыми или среди корней есть кратные.

В частных случаях, которые будут ниже рассмотрены, все корни для кратности изложения полагаются простыми. В случае кратных корней построение общего решения также не встречает затруднений.

а) Рассмотрим течение многокомпонентного газа со вдувом одной компоненты $(n=1)$. Корни характеристического уравнения при этом определяются в виде

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\frac{c_{11}}{m_1}S_{21},\ldots,\lambda_N=\frac{c_{11}}{m_1}S_{N1}$$

После нахождения γ_i из системы (2.5) получается общее решение уравнений (2.3)

$$g_1=A_1-\sum_{j=2}^{N}\frac{m_1}{m_j}A_j\exp\left(\frac{c_{11}}{m_1}S_{j1}\xi\right)$$

$$g_i=A_i\exp\left(\frac{c_{11}}{m_1}S_{i1}\xi\right)\qquad (i=2,3,\ldots,N)$$

Константы интегрирования A_i определяются из граничных условий, после чего решение принимает вид

$$g_1=g_1^*+\sum_{j=2}^{N}\frac{m_1}{m_j}g_j^*\left\{1-\exp\left[\frac{c_{11}}{m_1}S_{j1}(\xi-\xi^*)\right]\right\} \tag{2.7}$$

$$g_i=g_i^*\exp\left[\frac{c_{11}}{m_1}S_{i1}(\xi-\xi^*)\right]\qquad (i=2,3,\ldots,N)$$

Если предположить, что в газовой смеси между поверхностями содержится, кроме вдуваемой, еще лишь одна компонента, то в этом случае решение (2.7) сводится к известному решению для бинарного потока.

б) Рассмотрим течение многокомпонентного газа со вдувом двухкомпонентной газовой смеси ($n = 2$). Корни характеристического уравнения в этом случае равны

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{c_{11}}{m_1} S_{21} + \frac{c_{21}}{m_2} S_{12}, \quad \lambda_3 = \frac{c_{11}}{m_1} S_{31} + \frac{c_{21}}{m_2} S_{32}, \ldots, \lambda_N = \frac{c_{11}}{m_1} S_{N1} + \frac{c_{21}}{m_2} S_{N2}$$

Решение уравнений (2.3), удовлетворяющее граничным условиям, получается в виде

$$g_1 = b_1 - \frac{m_1}{m_2} b_2 \exp[\lambda_2(\xi - \xi^*)] + \sum_{j=3}^{N} b_{1j} g_j^* \exp[\lambda_j(\xi - \xi^*)]$$

$$g_2 = \frac{c_{21}}{c_{11}} b_1 + b_2 \exp[\lambda_2(\xi - \xi^*)] + \sum_{j=3}^{N} b_{2j} g_j^* \exp[\lambda_i(\xi - \xi^*)]$$

$$g_i = g_i^* \exp[\lambda_i(\xi - \xi^*)] \qquad (i = 3, 4, \ldots, N)$$

$$b_1 = \left[g_1^* + \frac{m_1}{m_2} g_2^* - \sum_{j=3}^{N} \left(b_{1j} + \frac{m_1}{m_2} b_{2j} \right) g_j^* \right] \left(\frac{m_1}{m_2} \frac{c_{21}}{c_{11}} + 1 \right)^{-1}$$

$$b_2 = \left[g_2^* - \frac{c_{21}}{c_{11}} g_1^* - \sum_{j=3}^{N} \left(b_{2j} + \frac{c_{21}}{c_{11}} b_{1j} \right) g_j^* \right] \left(\frac{m_1}{m_2} \frac{c_{21}}{c_{11}} + 1 \right)^{-1}$$

$$b_{1i} = \frac{m_1 m_2 c_{11}}{m_i} \frac{S_{1i}[m_2 c_{11}(S_{21} - S_{i1}) - m_1 c_{21} S_{i2}] + m_1 c_{21} S_{12} S_{2i}}{[m_1 c_{21}(S_{12} - S_{i2}) - m_2 c_{11} S_{i1}][m_2 c_{11}(S_{21} - S_{i1}) - m_1 c_{21} S_{i2}] - m_1 m_2 c_{11} c_{21} S_{12} S_{21}}$$

$$b_{2i} = \frac{m_1 m_2 c_{21}}{m_i} \frac{S_{2i}[m_1 c_{21}(S_{12} - S_{i2}) - m_2 c_{11} S_{i1}] + m_2 c_{11} S_{21} S_{1i}}{[m_1 c_{21}(S_{12} - S_{i2}) - m_2 c_{11} S_{i1}][m_2 c_{11}(S_{21} - S_{i1}) - m_1 c_{21} S_{i2}] - m_1 m_2 c_{11} c_{21} S_{12} S_{21}}$$

в) При вдуве трехкомпонентной газовой смеси в многокомпонентный газ ($n = 3$) корни характеристического уравнения получаются в виде

$$\lambda_1 = 0, \ \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{c_{11}}{m_1}(S_{21} + S_{31}) + \frac{c_{21}}{m_2}(S_{12} + S_{32}) + \frac{c_{31}}{m_3}(S_{13} + S_{23}) \pm \right.$$

$$\pm \left[\left(\frac{c_{11}}{m_1}(S_{21} - S_{31}) + \frac{c_{21}}{m_2}(S_{12} - S_{32}) + \frac{c_{31}}{m_3}(S_{13} - S_{23}) \right)^2 - \right.$$

$$\left. \left. - 4 \frac{c_{11}}{m_1} \frac{c_{31}}{m_3} (S_{21} - S_{31})(S_{13} - S_{23}) \right]^{1/2} \right\}$$

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{c_{j1}}{m_j} S_{ij} \qquad (3 < i \leqslant N)$$

Решение системы (2.3) при $n = 3$ не приводится из-за его громоздкого вида. Аналогично могут быть рассмотрены случаи течения при $n > 3$.

3. Решая уравнение движения, можно получить выражение для профиля скорости

$$u/u^* = [\varphi(\xi) - 1]/[\varphi(\xi^*) - 1], \qquad \varphi(\xi) = \exp \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{m}$$

Поскольку профили скорости и концентрации компонент уже найдены, интегрирование уравнения энергии также не вызывает затруднений. Решение получается в виде

$$\frac{H\varphi_1(\xi)c_{pw}/c_p - H_w + \Psi(\xi)}{H^*\varphi_1(\xi^*)c_{pw}/c_p^* - H_w + \Psi(\xi^*)} = \frac{\varphi_1(\xi)-1}{\varphi_1(\xi^*)-1}, \qquad \varphi_1(\xi) = \exp\left(-\int_0^\xi \frac{c_{p1}P}{c_p m}d\xi\right)$$

$$c_{p1} = \sum_{j=1}^N c_{j1}c_{pj}$$

$$\Psi(\xi) = \int_0^\xi \left[(P-1)\frac{d}{d\xi}\frac{u^2}{2} + \left(\frac{P}{m}\frac{c_{p1}}{c_p} - \frac{P}{m} + \frac{d\ln c_p}{d\xi}\right)\frac{u^2}{2}\right]\frac{c_{pw}}{c_p}\varphi_1(\xi)\,d\xi$$

Из соотношений (2.2) следует, что связь переменной ξ с координатой y можно представить в виде

$$y = \frac{1}{(\rho v)_w}\int_0^\xi \frac{\mu d\xi}{m} \qquad \mu = \mu(T, c_i) = f(\xi), \qquad m = \sum_{i=1}^N g_i(\xi)$$

Таким образом, решение получено в параметрическом виде. Искомые функции c_i, u, H и координата y получены как функции параметра ξ.

Поступило 3 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Merk H. J. The macroscopic equations for simultaneous heat and mass transfer in isotropic, continuous and closed systems. Appl. Scient. Res, A, 1958, vol. 8, N 1.
2. Тирский Г. А. Условия на поверхностях сильного разрыва в многокомпонентных смесях. ПММ, 1964, т. 25, вып. 2.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. Изд. 6-е, Гостехтеоретиздат, 1953.

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ В СЛУЧАЕ ОДНОРОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ МАКСВЕЛЛОВА ГАЗА

А. С. БОРИСОВ

(Москва)

Известно [1], что если моменты функции распределения молекул одноатомного максвеллова газа при отсутствии внешних сил зависят только от времени t, а компоненты массовой скорости u_i — еще линейно от координат x_i то бесконечная система уравнений кинетических моментов распадается на ряд последовательно решаемых замкнутых систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Таким же свойством обладают уравнения кинетических моментов смеси одноатомных максвелловых газов при наличии внешних сил определенного класса [2].

Общее решение уравнений для коэффициентов, характеризующих зависимость u_i от t для таких однородных течений, было получено в работе [3]. Исследование асимптотики некоторых решений указанной системы уравнений при больших t проводилось в работе [4].

Ниже изучаются асимптотические свойства решений систем уравнений кинетических коэффициентов данного класса при $t \to \infty$. Начальные условия и характерные числа Кнудсена фиксированы (так же, как и в работе [4]). Отметим, что, например, при исследовании применения уравнений метода Чепмена — Энскога ищется другое асимптотическое разложение: по малым K при фиксированных t. Показано, что, вообще говоря, функция распределения не стремится к максвелловской при $t \to \infty$, даже если в начальный момент она являлась максвелловской.