

## ЛИТЕРАТУРА

1. Цинобер А. Б., Щербинин Э. В. О влиянии поперечного магнитного поля на сопротивление пластины. Изв. АН Латв. ССР, 1963, № 6.
2. Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. 1965, № 3.
3. Dhana K. M. Heat Transfer in Magnetohydrodynamic Flow in an Entrance. Trans. ASME, ser. C, 1965, vol. 87, No. 2.
4. Hugelmann R. D., Haworth D. R. An MHD Boundary — Layer compatibility Condition. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 7.
5. Лойцянский Л. Г. МЖГ, изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
6. Китанин Э. Л., Соковишин Ю. А. Пограничный слой проводящей среды в магнитном поле. Магнитная гидродинамика. 1966, № 1.

МЕТОД СРЕДНЕМАССОВЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ  
ВО ВНЕШНЕМ ПОТОКЕ С ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В. В. ЛУНЕВ

(Москва)

Предложен инженерный метод расчета трения и теплопередачи через пограничный слой, в начальном сечении которого  $x_0$  задано неоднородное по линиям тока распределение скорости, полной и статической энтальпии. Подобные задачи возникают при вихревом взаимодействии пограничного слоя с высокочастотным на тонких притупленных телах, при внезапном изменении граничных условий для уже развитого пограничного слоя (скачок температуры, излом поверхности), при обтекании тела спутным следом и т. д.

Обозначения:  $x, y$  — продольная и поперечная к телу координаты;  $u, \psi, H, h$  — скорость газа, функция тока, полная и статическая энтальпия;  $p, \rho, \mu, \sigma$  — давление, плотность, вязкость, число Прандтля;  $\tau, q$  — трение и тепловой поток на поверхности тела;  $r(x), \delta(x)$  — форма поверхности тела и толщина пограничного слоя;  $V, M$  — скорость и число Маха невозмущенного потока;  $u^{(0)}(x_0, \psi), H^{(0)}(x_0, \psi), h^{(0)}(x_0, \psi)$  — распределение параметров в начальном сечении;  $u^{(0)}(x, \psi), H^{(0)}(x, \psi), h^{(0)}(x, \psi)$  — профили величин во внешнем потоке при отсутствии трения и теплопередачи на поверхности тела.

Степени  $\nu = 0.1$  относятся к плоским и осесимметричным течениям, индексы  $\delta, w, b, \infty$  — к величинам на внешней границе внутреннего пограничного слоя, на поверхности тела в вязком и невязком потоках и в невозмущенном потоке соответственно.

1. При решении подобного рода задач возмущенную область можно разбить на две: внутренний пограничный слой, определяемый как область практического влияния граничных условий на поверхности, и внешняя область, развитие которой за счет вязкости и теплопроводности можно определять независимо от условий на поверхности как для свободного безграничного потока; граница раздела  $\delta(x)$  между областями определится из условий достаточно гладкого (теоретически асимптотического) склеивания решения. Возможность такого разбиения, помимо общих соображений, продемонстрирована на частном примере степенной зависимости  $h^{(0)}$  от  $\psi$  и постоянной скорости  $u^{(0)} = V$  в работе [4].

Однако известное внешнее поле еще не дает оснований для непосредственного использования приближенных методов, типа методов локального подобия [2, 3] или интегральных соотношений [4], разработанных для потенциальных внешних течений, хотя градиенты величин на внешней границе пограничного слоя часто пренебрежимо малы по сравнению с градиентами в пограничном слое (например на поверхности притупленных тел [5]).

Дело в том, что эти методы учитывают предысторию пограничного слоя только через его толщину, и если она известна, то тепловой поток и трение определяются через местную граничную скорость и энтальпию, которые в потенциальном внешнем потоке определяют полные импульс  $u_0\psi_0$  и теплосодержание  $H_0\psi_0$ , поступившие в пограничный слой из внешнего потока. В случае же неоднородного внешнего потока эти величины соответственно равны

$$\psi u_0(x, \psi) = \int_0^{\psi} u^{(0)}(x, \psi) d\psi, \quad \psi H_0(x, \psi) = \int_0^{\psi} u^{(0)}(x, \psi) d\psi$$

(при  $\psi = \psi_0$ ) (1.1)

Здесь  $u^{(0)}(x, \psi)$ ,  $H^{(0)}(x, \psi)$  — профили в сечении  $x$  во внешнем потоке, полученные без учета влияния поверхности тела, при отсутствии трения и теплопередачи на ней.

Очевидно, что поступившее через внешнюю границу пограничного слоя количество тепла или движения, прежде чем оказать влияние на пристеночную область течения, должно распределиться на всю возмущенную массу пограничного слоя. Поэтому трение и теплообмен на поверхности будут в большей степени определяться среднемассовыми величинами  $u_0$  и  $H_0$ , чем местными граничными условиями.

Примем гипотезу, что расчет трения и теплообмена на поверхности, омываемой неоднородным по нормали потоком, можно вести обычными приближенными методами, если в них вместо истинных граничных значений скорости и энтальпии торжественно использовать среднемассовые величины  $u_0$ ,  $H_0$ . При этом среднюю статическую энтальпию будем определять через них из уравнения Бернулли  $h_0 = H_0 - 1/2 u_0^2$ . Заметим, что для ламинарного пограничного слоя энтальпия  $h_0$  слабо влияет на решение (совсем не влияет при  $\rho\mu = \text{const}$ ).

Рассмотрим далее лишь ламинарный слой. Из приближенных методов наибольшей простотой обладает метод локального подобия [2, 3], который и используем здесь для иллюстрации возможностей метода среднемассовых величин.

Формально вывод локального подобия состоит в переходе к переменным

$$\xi = \int_{x_0}^x \rho_0 \mu_0 u_0 r^{2\nu} dx, \quad \zeta = \frac{u_0 r^\nu}{\sqrt{\xi}} \int_0^y \rho dy, \quad \frac{u}{u_0} = f'(\zeta), \quad \frac{H}{H_0} = g(\zeta) \quad (1.2)$$

$$\psi = f\sqrt{\xi}, \quad \rho_0 = \rho(h_0), \quad \mu_0 = \mu(h_0)$$

и в отбрасывании в уравнениях (вообще говоря, без особого теоретического обоснования) производных по  $\xi$ , в результате чего уравнения принимают тот же вид (в функциях  $f'$  и  $g$ ), что и для пластины с постоянными параметрами на внешней границе. В отличие от классического варианта, здесь примем дополнительное допущение о возможности использования решения для пластины с условиями  $f' \rightarrow 1$ ,  $g \rightarrow 1$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ , не удовлетворяющими точным граничным условиям задачи.

Расход через пограничный слой определим как  $\psi_\delta = f_\delta \sqrt{\xi}$ , где  $f_\delta = f(\zeta_\delta)$ , а  $\zeta_\delta$  — практическая граница пограничного слоя. Объединяя эту формулу с формулой (1.2) для  $\xi$ , получим основное уравнение для определения зависимости  $\psi_\delta$ ,  $u_0$  и  $H_0$  от  $x$

$$\frac{d\psi_\delta^2}{dx} = f_\delta^2 \rho_0 \mu_0 r^{2\nu} u_0 \quad (1.3)$$

$$u_0(x) = u_0(x, \psi_\delta), \quad H_0(x) = H_0(x, \psi_\delta)$$

Расчет трения и теплопередачи далее проводится по формулам

$$\tau = A \rho_0 \mu_0 u_0^2 r^\nu \xi^{-1/2}, \quad q = B \rho_0 \mu_0 u_0 H_0 r^\nu \xi^{-1/2} \quad (1.4)$$

Эти формулы совпадают с теми же для пластины с постоянными параметрами на внешней границе, равными местным значениям  $u_0$ ,  $H_0$ , и с длиной  $\xi / \rho_0 \mu_0 u_0 r^{2\nu}$ .

Коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются из решения уравнений пограничного слоя на пластине с произвольными в общем случае зависимостями  $l = \rho\mu / \rho_0 \mu_0$  и  $\sigma$  от  $h$ . Для степенной зависимости  $l = (h_0/h)^n$  (для воздуха  $n \approx 0.3$ ) и постоянного числа Прандтля (или при сильно охлажденной поверхности) для  $A$  и  $B$  известны аппроксимирующие формулы Эккерта [6]

$$A = 0.332 l^{*1/2}, \quad B = A \sigma_w^{-2/3} (H_e - H_w) / H_0$$

$$l^* = l(h^*), \quad h^* = 1/2(h_0 + H_w) + 0.22(H_e - H_w), \quad H_e = H_0 - 1/2(1 - \sigma^{1/2})u_0^2 \quad (1.5)$$

В уравнение (1.3) входит, вообще говоря, условная величина  $f_\delta$ , и неопределенность в ее выборе входит в ошибку метода. Примем ее соответствующей значению  $f'(\zeta_\delta) \approx 0.99$ , что при  $l = 1$  дает  $f_\delta \approx 3.3$ . В общем случае, для  $f_\delta$ , к сожалению, нет аппроксимирующих формул типа (1.4). Заметим, что одним значением  $f_\delta$  для теплового и динамического пограничных слоев можно обойтись, по-видимому, лишь при  $\sigma \sim 1$ , когда толщины этих слоев примерно одинаковы.

2. Использование предлагаемого метода может быть затруднено необходимостью рассчитывать внешнее поле  $u^{(0)}(x, \psi)$ ,  $H^{(0)}(x, \psi)$ . Однако во многих случаях, например, если начальный профиль образован предшествующим пограничным слоем или высокоэнтальпийным слоем на тонких притупленных телах (задачи, рассмотренные для

иллюстрации метода в п. 3, 4), изменением за счет вязкости и теплопроводности начального распределения параметров до встречи соответствующих линий тока с границей пограничного слоя можно пренебречь.

В этом можно убедиться путем непосредственных вычислений для точных решений (например задача Блазуса для пластины или решение [1], см. п. 3), а также используя для оценок уравнения в форме Мизеса

$$\begin{aligned} \Delta u &\sim \rho \mu u \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \psi^2} (x - x_0) \sim \frac{\psi^2}{f_0^2} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \psi^2} \Big|_{x=x_0}, \\ \Delta H &\sim \frac{\psi^2}{f_0^2} \left[ \frac{\partial^2 H^{(0)}}{\partial \psi^2} + \frac{1 - \sigma}{\sigma} u^{(0)} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial \psi^2} \right]_{x=x_0}, \\ \psi_0^2 &\sim f_0^2 \rho \mu u (x - x_0) \end{aligned} \tag{2.1}$$

В этом случае вычисление средних величин  $u_0$ ,  $H_0$  и  $h_0$  сводится к вычислению их в начальном сечении  $x_0$  по формулам (1.1). Полная энтальпия  $H_0$  зависит при этом лишь от  $\psi$ , а зависимость  $u_0$  и  $h_0$  от  $x$  будем учитывать через распределение давления, используя уравнения адиабаты и Бернулли

$$\begin{aligned} u_0(x, \psi) &= \sqrt{2[H_0(\psi) - h_0(p, \psi)]}, & h_0(p, \psi) &= h_0[h_0(x_0, \psi), p_0, p] \\ h_0(x_0, \psi) &= H_0(x_0, \psi) - \frac{1}{2} u_0^2(x_0, \psi), & p_0 &= p(x_0) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Формула (2.2) для  $u_0(x, \psi)$ , не совпадает с (1.1), но значительно проще.

При безотрывном обтекании пограничным слоем угловой точки поверхности течение в ее окрестности, как можно показать, также можно считать невязким, за исключением тонкого подслоя с относительным расходом порядка  $(\rho_0 V x_0 / \mu_0)^{-1/2}$ . В этом случае начальные профили удобно брать в сечении перед угловой точкой. Заметим также, что вместо точных начальных профилей можно пользоваться известными профилями  $f'(f)$  и  $g(f)$  для пластины при  $l = 1$ ,  $\sigma = \cos \alpha t$ ; распределение параметров по  $\psi$  рассчитывается при этом с использованием связи  $\psi = f\sqrt{\xi}$  и значения  $\xi$  для предшествующего пограничного слоя.

Примером, в котором нельзя пренебречь деформацией начальных профилей, будет случай, когда поверхность отделена от основного потока слоем газа с другими параметрами; внешнее поле здесь определяется смешением этих потоков.

3. Изложенный метод основан на интуитивных соображениях, поэтому для иллюстрации его практического использования рассмотрим несколько примеров.

(а) Рассмотрим обтекание пластины слабозавихренным потоком жидкости

$$u^{(0)} = u_b + \omega y = u_b + (\omega / \rho u_b) \psi, \quad u_0 = u_b + \frac{1}{2} (\omega / \rho u_b) \psi, \quad (\omega y \ll u_b)$$

Уравнения (1.3), (1.4) для малых  $\omega$  дают ( $\tau_0$  — трение при  $\omega = 0$ )

$$\frac{\tau}{\tau_0} = 1 + k \frac{\omega \mu}{\rho u_b^2} \left( \frac{\rho u_b x}{\mu} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{5f_0}{6}$$

При  $f_0 \approx 3.3$  имеем  $k = 2.76$ , что близко к точному [7] значению  $k = 2.4$ . Обычный метод локального подобия, т. е. использование скорости  $u_b$  вместо  $u_0$ , дает значение  $k = 5.5$ , более чем вдвое превышающее точное.

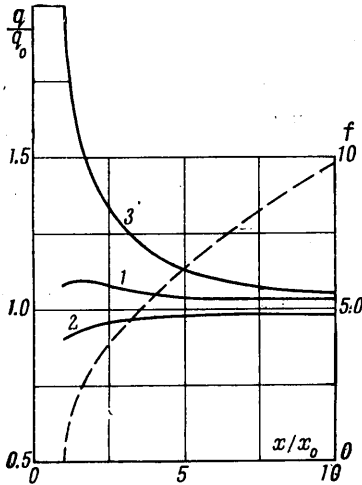
(б) Пусть в сечении  $x = x_0$  заданы профили скорости и энтальпии, соответствующие решению Блазуса на пластине длины  $x_0$  при постоянных  $\rho \mu$  и  $\sigma$ . За безразмерную функцию тока примем функцию Блазуса в начальном сечении  $f = \psi(\rho \mu V x_0)^{-1/2}$ . Тогда

$$u^{(0)} = V f'(f), \quad H^{(0)} = H_\infty g(f), \quad \frac{u_0}{V} = \Phi = \frac{1}{f} \int_0^f f' df, \quad \frac{H_0}{H_\infty} = \frac{1}{f} \int_0^f g df$$

Очевидно,  $u_0 \rightarrow V$ ,  $H_0 \rightarrow H_\infty$  при  $f \rightarrow \infty$ , однако это асимптотическое значение достигается лишь при значениях  $f \approx 15$ , далеко выходящих за действительную границу пограничного слоя ( $f_0 \approx 3.3$ ). Из (1.3), (1.4) здесь следует ( $\tau_0$ ,  $q_0$  — точные значения величин)

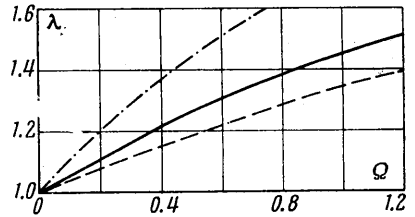
$$\frac{x}{x_0} = 1 + \frac{2}{f_0^2} \int_0^f \frac{f}{\Phi} df, \quad \frac{\tau}{\tau_0} = \left( \frac{x}{x_0} \right)^{1/2} f_0 \Phi^2, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{\tau}{\tau_0} \frac{H_e - H_w}{\Phi(H_{e\infty} - H_w)}$$

Отношение  $\tau/\tau_0$  отличается от единицы не более чем на 2 ÷ 3% во всем диапазоне  $f > 0$ . При  $\sigma = 1$ , очевидно,  $q/q_0 = \tau/\tau_0$ . Для  $\sigma = 0.72$  отношение  $q/q_0$  в зависимости от  $x/x_0$  показано на фиг. 1 сплошными линиями для значений  $c = V^2/2H_\infty = 0$  и  $c = 1$ ,  $H/H_\infty = 0.5$  (кривые 1 и 2). Как видно, приближенное решение дает точность около 10%. Там же для сравнения показано (кривая 3) отношение  $q/q_0$  при  $c = 0$ , подсчитанное по граничной скорости  $u_0$  вместо  $u_0$ , которое может в два раза превосходить точное.



Фиг. 1

Зависимость  $f(x/x_0)$  показана на фиг. 1 пунктиром. Заметим, что отношение  $\kappa$  скорости на границе внутреннего пограничного слоя в сечении  $x$  к скорости на той же линии тока  $f$  в начальном сечении  $x_0$  изменяется в пределах от 0.92 до 1. Поэтому в подтверждение п. 2, можно принять  $\kappa \approx 1$ .



Фиг. 2

При малых  $f$ , т. е. для линейного по  $y$  профиля скорости, формулы (1.3)–(1.5) при  $c = 0$  имеют вид

$$f' = f_w'' \zeta = a_1 f^{1/2}, \quad \Phi = \frac{2}{3} a_1 f^{1/2}, \quad a_1 (2f_w'')^{1/2} = 0.826$$

$$\frac{x - x_0}{x_0} = \frac{2f^{1/2}}{a_1 f_0^2}, \quad \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{4}{3} a_1^2 f_0 = 0.97, \quad \frac{q}{q_0} = \sigma^{1/2} \frac{\tau}{\tau_0}$$

(в) Рассмотрим пограничный слой в завихренном потоке в окрестности критической точки при гиперзвуковом обтекании тупого тела [8]. В этом случае

$$u^{(0)} = ax(1 + by) = ax\sqrt{1 + 2z}, \quad u_0 = a_0x, \quad r = x, \quad H = H_\infty$$

$$z = \frac{b\psi}{\rho ax^{1+\nu}}, \quad \frac{a_0}{a} = \varphi(z) = \frac{(1 + 2z)^{3/2} - 1}{3z}, \quad \xi = \frac{\rho\mu a_0}{2(\nu + 1)} x^{2(\nu+1)}$$

$$\frac{q}{q_0} = \lambda = \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1/2}, \quad \lambda = \left[\varphi\left(\frac{f_0}{\nu + 1} \lambda \Omega\right)\right]^{1/2}, \quad \Omega = \left(\frac{\mu}{2\rho a}\right)^{1/2} b$$

Здесь  $q_0$  — тепловой поток без учета завихренности. Решение уравнения для  $\lambda$  показано на фиг. 2 сплошной линией. Пунктиром показано точное значение  $\lambda$  из работы [8]. Эти кривые достаточно близки между собой. Пунктиром с точкой показано решение с использованием  $u_0$  вместо  $u_0$ , которое значительно отличается от точного.

(г) Пусть в начальном сечении  $u^{(0)} = V$ ,  $h^{(0)} = \text{const } \psi^n$ . Для простоты примем  $c = 0$ ,  $H_w = 0$ . Используя данные [1], и п. 1 и предполагая, что отношение энтальпии на границе пограничного слоя к начальной на той же линии тока  $\kappa_1 = 1$ , получим отношения приближенного теплового потока  $q$  и точного  $q_0$

$n = 0.5$	1	2	3	4	5
$q/q_0 = 0.97$	0.98	0.96	0.86	0.71	0.51
$\kappa_1 = 1.00$	1.00	1.22	1.68	2.53	4.1
$\kappa_1' = 0.98$	1.00	1.18	1.54	2.08	2.8

Здесь  $\kappa_1' = 1 + 0.09n(n - 1)$  — приближенные по (2.1), значения  $\kappa_1$ . При  $n \leq 3$  отношения  $q/q_0$  близки к единице. При больших  $n$  заметное количество тепла поступает в пограничный слой сверху ( $\kappa_1 > 1$ ), и величины  $q$ , вычисленные без учета этого эффекта, меньше точных.

4. Рассмотрим задачу о пограничном слое на тонких притупленных телах, представляющую самостоятельный интерес в силу актуальности и известных трудностей точного ее решения. В этом случае на боковой поверхности тела (с характерным углом наклона  $\theta$ ) образуется так называемый высокоэнтропийный слой, заполненный газом, прошедшим через ударную волну большой интенсивности в окрестности носка тела, и имеющим вследствие этого высокую температуру и малую плотность по сравнению с данными за ударной волной. Различные вопросы взаимодействия этого слоя с пограничным и физические особенности течения в нем рассматривались в работах [5, 9-11] и др.

Вследствие малой плотности перепадом давления в этом слое можно пренебречь, так что распределение параметров в нем можно представить в виде ( $r_0$  — радиус миделя носка)

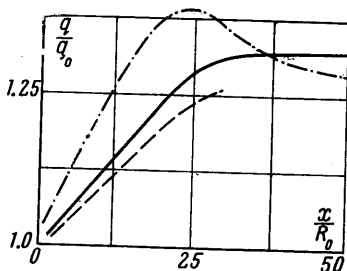
$$\begin{aligned} h^{(0)} &= h_b G(\psi_1, p_1), & u^{(0)} &= \sqrt{2(H_\infty - h^{(0)})} \\ (p_1 &= p / \rho_\infty V^2, & \psi_1 &= \psi / \rho_\infty V \pi r_0^{1+\nu} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Для совершенного газа функция  $G_1$  не зависит от давления, а для реального газа этой зависимостью также можно пренебречь [11]. При больших  $M$ , вводя в общем случае реального газа эффективный показатель адиабаты  $\gamma_0$ , получим

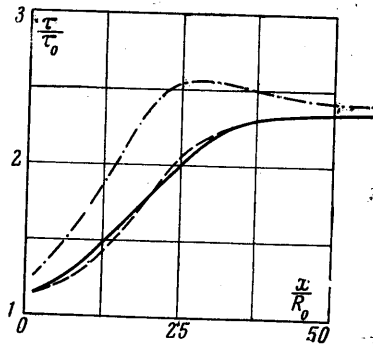
$$h_b \approx \frac{1}{2} V^2 p_1^{(\gamma_0-1)/\gamma_0}, \quad G = \sin^{2/\gamma_0} \alpha, \quad \alpha = \alpha(\psi_1) \quad (4.2)$$

где  $\alpha$  — угол наклона ударной волны.

Вблизи тела  $G \approx 1$ , а вблизи ударной волны  $G \sim \theta^2/\nu$ , поэтому поперек высокоэнтропийного слоя скорость газа сильно изменяется (от 20 до 50% при условии диссоциации воздуха, когда  $\gamma_0 - 1 \ll 1$ ), что существенно влияет на распределение трения и тепловых потоков.



Фиг. 3



Фиг. 4

Оценим влияние вязкости в высокоэнтропийном слое. Для этого рассмотрим при  $M = \infty$  довольно типичный случай параболической ударной волны с радиусом кривизны  $R_0$  на оси.

Из формул (4.2) и (2.1) получим

$$\begin{aligned} G &= [1 + \psi_2^{1/(1+\nu)}]^{-1/\gamma}, & \psi_2 &= \psi / \rho_\infty V \pi R_0^{1+\nu} \\ \Delta u^{(0)} &\leq 0.035 p_1^{(\gamma-1)/\nu} / \nu V, & \Delta h^{(0)} &\leq 0.1(1 - \sigma) p_1^{(\gamma-1)/\nu} / \nu H_\infty \\ \Delta h^{(0)} &\leq 0.07 p_1^{(\gamma-1)/\nu} / \nu H_\infty \end{aligned}$$

Как видно, изменение величин пренебрежимо мало (относительное изменение энтальпии может быть заметным лишь при столь малых ее значениях (больших  $\psi_1$ ) при которых влияние ее, в соответствии с (1.5), пренебрежимо мало). Таким образом, при расчетах пограничного слоя внешний поток здесь можно считать невязким, что и принято, например, в работе [11].

Вид формул (4.1) подсказывает следующую модификацию метода, а именно, использование вместо (2.1) формул

$$h_0 = h_b G_0(\psi_1), \quad G_0(\psi_1) = \frac{1}{\psi_1} \int_0^{\psi_1} G d\psi_1, \quad u_0 = \sqrt{2(H_\infty - h_0)} \quad (4.3)$$

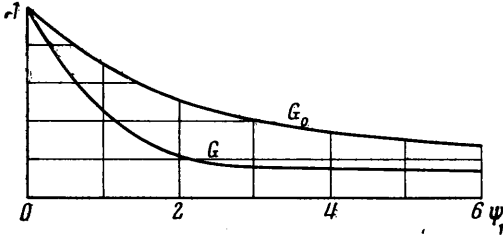
которые практически эквивалентны (1.1) или (2.2), но значительно проще.

На фиг. 3-4 для боковой поверхности притупленных по сфере конусов с углом раствора  $\theta = 10^\circ$ , обтекаемых равномерно диссоциирующим воздухом при

$$V = 7,5 \text{ км/сек}, \quad \rho_\infty = 3 \cdot 10^{-7} \text{ г/см}^3, \quad H_w = 0,1 H_\infty, \quad \text{Re} = \rho_\infty V r_0 / \mu_\infty = 10^4$$

показаны полученные по (1.3) — (1.5) отношения теплового потока и трения к тем же  $(q_0, \tau_0)$  без учета влияния завихренности, т. е. при  $G = 1$ . Сплошными линиями показаны приближенные кривые, пунктиром — точные [11], полученные численным интегрированием уравнений пограничного слоя. Как видно, предлагаемый метод дает хорошую точность при учете влияния завихренности потока.

Для сравнения там же штрих-пунктиром приведены аналогичные кривые, полученные классическим методом локального подобия с использованием скорости  $u_0$  вместо  $u_0$ , которые значительно отличаются от точных. Заметим, что приближенные значения  $\tau_0$  и  $q_0$  в этом примере лишь на несколько процентов отличаются от точных [11] даже для трения. Необходимые для расчета данные в критической точке получены аналогично п. 3 (в). Функции  $G$  и  $G_0$  для этого случая показаны на фиг. 5.



Фиг. 5

Предлагаемый метод может быть применен и для турбулентного пограничного слоя на тонких притупленных телах, если вместо соот-

ношений (1.3) — (1.5) использовать в какой-либо из распространенных полуэмпирических методов расчета турбулентного пограничного слоя.

5. Рассмотренные примеры в целом обладают достаточной общностью для вывода о вполне удовлетворительной точности метода среднemasсовыx величин для расчета трения и теплопередачи через пограничный слой в неоднородном внешнем потоке.

Следует оговорить, что подобные методы пригодны в принципе для учета влияния возмущений, вносимых во внешнюю часть пограничного слоя, и совершенно не пригодны для учета влияния возмущений вблизи поверхности, которые влияют на профили скорости и температуры в пристеночной области непосредственно, без существенного распределения на всю массу газа в пограничном слое.

Для пояснения рассмотрим следующий автомодельный случай пограничного слоя на пластине с внутренними массовыми источниками тепла

$$Q = (H_\infty V / x) Q_1(\xi), \quad \sigma = 1, \quad \rho\mu = \rho_\infty\mu_\infty, \quad H_w = 0 \quad (5.1)$$

Предположим, что функция  $Q$  описывает почти точечный источник тепла в точке  $\xi_0$  мощностью  $Q_0$ . Такая задача имеет простое решение

$$g = (1 + J_\infty)f' - J(\xi), \quad J(\xi) = \int_0^\xi f'' \int_0^\xi \frac{Q_1}{f''} d\xi d\xi$$

$$J_\infty = J(\infty) = Q_0 \frac{1 - f'(\xi_0)}{f''(\xi_0)}, \quad Q_0 = \int_0^\infty Q_1(\xi) d\xi, \quad \frac{\Delta q}{q_0} = J_\infty \quad (5.2)$$

Здесь  $\Delta q$  относительное изменение теплового потока к поверхности за счет источников тепла.

Обобщим для этой задачи метод среднemasсовоx энthalпии торможения, которая в этом случае должна иметь вид

$$H_0 = H_\infty + \frac{1}{\psi_0} \int_0^\infty \int_0^\delta \rho Q dy dy = H_\infty \left( 1 + \frac{2}{f_0} Q_0 \right), \quad \frac{\Delta q}{q_0} = \frac{2Q_0}{f_0} \quad (5.3)$$

При больших  $\xi_0$ , используя известные асимптотические представления функции Блазуса, из (5.2) легко получим

$$\Delta q / Q_0 q_0 \approx 2 / (\xi_0 - \beta) \approx 2 / f(\xi_0), \quad \beta = 1.73$$

Следовательно, метод среднemasсовоx энthalпии дает точные результаты, если источник тепла находится вблизи внешней границы пограничного слоя и  $f(\xi_0) \approx f_0$ . Наоборот, в другом предельном случае  $\xi_0 = 0$  имеем  $\Delta q / q_0 = Q_0 / f_w''$ , и, легко видеть, что все выделяемое в данном сечении тепло уходит в стенку, не нагревая газ в пограничном слое. Метод среднemasсовоx энthalпии в этом случае в пять раз занижает прирост теплопередачи.

Автор благодарит О. И. Губанову, В. А. Карпова, И. Н. Мурзинову, А. Н. Румынского за обсуждение результатов и помощь в работе.

Поступило 13 V 1966

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В., Румынский А. Н. Развитие пограничного слоя в потоке с распределенной по линиям тока энтальпией торможения. МЖГ, 1966, № 5.
2. Lees L. Laminar Heat Transfer over Blunt Nosed Bodies at Hypersonic Flight Speeds. *Jet. Propuls.* 1956, No. 4.
3. Кемр Н., Роуз П., Детра Р. Ламинарный теплообмен тупых тел с потоком диссоциированного воздуха. Сб. «Газодинамика и теплообмен при наличии химических реакций», Изд. иностр. лит., 1962.
4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
5. Ферри А. Влияние кривизны ударной волны на поведение гиперзвукового пограничного слоя. *Механика*. Сб. перев. и обз. ин., 1960, т. 5.
6. Эккерт. Инженерные методы расчета ламинарного и турбулентного пограничного теплообмена при обтекании поверхностей с постоянным давлением и температурой потока газа большой сверхзвуковой скоростью. *Вопросы ракетной механики*, 1957, № 4.
7. Glaucert. The Boundary layer in simple shear flow past a flat plate, *JAS*, No. 11, 1957.
8. Kemp N. Vorticity Interaction at an Axisymmetric Stagnation Point on a Viscous Incompressible Fluid *JAS*, 1958, No. 8.
9. Moeskel Some effects of Bluntness on Boundary Transition and Heat Transfer at Supersonic Speeds, *NACA Rep.* 1312.
10. Лунев В. В. Закон подобия для гиперзвуковых обтеканий тонких притупленных тел вязким газом. *ПММ*, 1961, вып. 6.
11. Мурзин И. Н. Ламинарный пограничный слой на затупленных телах с учетом завихренности внешнего потока. *Механика жидкости и газа*. 1966, № 6.

### ТЕЧЕНИЕ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ГАЗА МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ

В. Д. СОВЕРШЕННЫЙ

(Москва)

В настоящей работе дается точное решение уравнений, описывающих течение многокомпонентного газа между двумя параллельными проницаемыми плоскостями, из которых одна перемещается параллельно другой с постоянной скоростью (т. е. исследуется течение типа течения Куэтта).

#### Обозначения

$y$ — координата; $u, v$ — компоненты скорости; $\rho$ — плотность; $c_i$ — массовая концентрация $i$ -й компоненты; $I_i$ — диффузионный поток $i$ -й компоненты; $H$ — полное теплосодержание; $T$ — температура; $m$ — молекулярный вес; $\mu$ — коэффициент вязкости;	$\lambda$ — коэффициент теплопроводности; $c_p$ — удельная теплоемкость смеси; $D_{ij}$ — бинарные коэффициенты диффузии; $P$ — число Прандтля; $S_{ij}$ — числа Шмидта; $N$ — общее число компонент; $n$ — число компонент, содержащихся во вдуваемом газе; $l$ — расстояние между плоскостями.
---	---

Индексы:  $i, j$  — номера компонент,  $w$  относится к величинам при  $y = 0$ , \* — звездочка в верхнем индексе — относится к величинам при  $y = l$ , второй индекс 1 — относится к величинам с внешней стороны неподвижной проницаемой поверхности.

1. Рассмотрим стационарное течение газа между двумя параллельными плоскостями, из которых одна движется относительно другой с постоянной скоростью  $u^*$ . В отличие от простого течения Куэтта, здесь рассматривается течение многокомпонентного газа, являющегося результатом сложения двух течений: основного течения, вызываемого движением подвижной плоскости, и дополнительного, осуществляемого посредством вдува многокомпонентного газа, содержащего  $n$  компонент, через неподвижную поверхность по нормали к ней. Через подвижную поверхность также осуществляется проникновение вещества таким образом, что на ней имеют заданные