

Теперь надо показать, что существует интегральная кривая уравнения (6), проходящая через точку $\varphi = 1$, $\eta = 0$. Но эта точка является особой. Особенность типа «седла». Поэтому имеются две интегральные кривые, проходящие через эту точку. Одной из них является $\eta = 0$, а другая как раз та, которую надо найти. Уравнение интегрировалось численно. Приводим некоторые результаты вычислений $D/D_* = K$ для некоторых значений η .

$\eta =$	0.01	0.1	0.2	0.4	0.6	1.0	2.0	
$K =$	7.108	2.273	1.702	1.336	1.196	1.079	1.007	($\gamma = 1.12$)
$K =$	6.901	2.213	1.662	1.311	1.178	1.069	1.004	($\gamma = 1.2$)
$K =$	6.142	1.997	1.520	1.223	1.115	1.033	1.000	($\gamma = 1.6$)

Видно, что перескакая волна детонации, возникающая при взрыве, переходит в обычную детонационную волну на расстояниях порядка полученного из общих соображений выше (2), и чем ближе γ к единице, тем дальше происходит этот переход. Нужно заметить, что в окрестности точки перехода, где D/D_* очень близко к единице, применяемый приближенный метод перестает быть справедливым, так как не выполняется основное предположение о сгребании волной всей массы газа.

Полученные результаты можно использовать для оценок при обтекании затупленных тел гиперзвуковым потоком горючей смеси, используя аналогию с сильным взрывом [2], если известно, что обтекание происходит с образованием детонационной волны.

Поступило 6 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Черный Г. Г. Задача о точечном взрыве. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 2.
2. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
3. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1963.

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В. С. ЮФЕРЕВ

(Ленинград)

В теории пограничного слоя большое развитие получили приближенные однопараметрические методы, основная идея которых заключается в использовании вместо точных распределений скорости в сечениях пограничного слоя некоторого семейства профилей, зависящих от одного параметра. Связь между этим параметром и продольной координатой x определяется для каждого конкретного задания скорости внешнего потока при решении интегрального уравнения импульсов.

Для описания пограничного слоя проводящей жидкости в магнитном поле подобные методы должны быть уже двухпараметрическими, поскольку в уравнениях, кроме распределения внешней скорости, содержится еще одна произвольная функция — внешнее магнитное поле. До настоящего времени в магнитной гидродинамике использовался в основном метод Кармана — Польгаузена [1-4], в котором профиль скорости задается в виде многочлена. При этом, в отличие от непроводящей жидкости, на коэффициенты полинома должно быть наложено дополнительное условие [4]

$$\partial^3 u / \partial y^3 = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1)$$

Тогда все характеристики пограничного слоя можно выразить через два параметра

$$\Lambda = U'\delta^2 / \nu, \quad \Lambda_m = \sigma B^2 \delta^2 / \rho \nu \quad (2)$$

Здесь δ — толщина пограничного слоя, u — продольная скорость в пограничном слое, U — скорость во внешнем потоке, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность, σ — проводимость.

Можно ожидать, что лучшие результаты будут достигнуты при использовании семейства профилей скорости, полученных при точных решениях некоторого класса задач пограничного слоя.

В данной работе метод Кочина — Лойцянского [5], использующий для приближенного описания семейства автомодельных решений, распространяется на магнито-гидродинамический пограничный слой несжимаемой жидкости с постоянной, изотропной проводимостью. Магнитное поле направлено перпендикулярно обтекаемой поверхности. Индуцированным магнитным полем пренебрегается. При этих условиях уравнение пограничного слоя имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + UU' + \frac{\sigma B^2}{\rho} \left(U - \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \quad (3)$$

Отсюда нетрудно получить интегральное уравнение импульсов

$$dZ/dx = F^*/U \quad (4)$$

$$F^* = F - 2gH, \quad F = 2[\zeta - f(2 + H)], \quad g = NZ, \quad f = U'Z, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}}$$

$$\zeta = \left[\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})} \right]_{y=0}, \quad Z = \frac{(\delta^{**})^2}{\nu}, \quad N = \frac{\sigma B^2}{\rho} \quad (5)$$

Здесь δ^* , δ^{**} — толщина вытеснения и толщина потери импульса соответственно, B — магнитная индукция. Зададимся семейством профилей скорости вида

$$u/U = \varphi^\circ(\xi, f, g) \quad (\xi = y/\delta^{**}) \quad (6)$$

Здесь f и g — формпараметры пограничного слоя (5), которые, в отличие от параметров Λ и Λ_m (2), строятся по толщине потери импульса пограничного слоя. Теперь функции F^* , ζ , H зависят только от параметров f и g , а уравнение (4) принимает вид

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{F^*(NZ, U'Z)}{U} \quad (7)$$

Функции F^* , ζ , H можно определить, выбрав конкретное семейство профилей скорости в сечениях пограничного слоя. В данной работе, как указывалось выше, используется совокупность автомодельных решений уравнения (3) при степенном задании скорости внешнего потока и магнитного поля

$$U = U_1 x^m, \quad B = B_1 x^{1/2(m-1)}$$

Автомодельное уравнение можно записать в форме

$$\varphi''' + 1/2(m+1)\varphi\varphi'' + m(1-\varphi'^2) + S(1-\varphi') = 0 \quad (8)$$

$$\varphi(\eta) = (\nu U_1 x^{m+1})^{-1/2} \psi, \quad \eta = y\sqrt{U_1 x^{m-1}}/\nu, \quad S = \sigma B_1^2 / \rho U_1$$

Решения этого уравнения, зависящие от параметров S и m , были рассмотрены в [6]. Однако для выполнения поставленной задачи уравнение (8), используя (4), удобнее представить в другом виде

$$\Phi''' + \frac{F^* + 2f}{2C_0^2} \Phi\Phi'' + \frac{f}{C_0^2} (1 - \Phi'^2) + \frac{g}{C_0^2} (1 - \Phi') = 0 \quad (9)$$

$$\Phi(\xi) = \frac{C_0}{U\delta^{**}} \psi, \quad \xi = \frac{C_0 y}{\delta^{**}}$$

Здесь C_0 — нормирующая константа, которая выбирается таким образом, чтобы при $f = 0$, $g = 0$ уравнение (9) переходило в уравнение Блазиуса. Тогда $C_0^2 = \zeta_0 = 0.2204$. Уравнение (9) выгодно отличается от уравнения (8) тем, что позволяет непосредственно при интегрировании находить функции F^* , ζ и H .

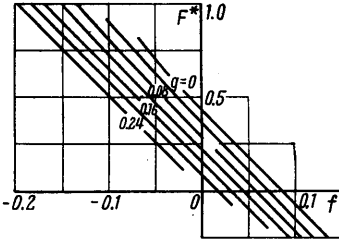
Связь между параметрами S , m и f , g выражается формулами

$$m = \frac{f}{F^* + f}, \quad S = \frac{g}{F^* + f}, \quad \frac{f}{g} = \frac{m}{S} \quad (10)$$

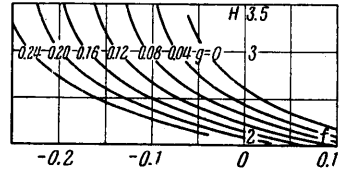
Уравнение (9) было проинтегрировано для различных значений f и g конечно-разностным методом при использовании схемы последовательных приближений

$$\Phi_{i+1}''' + \left(\frac{F^* + 2f}{2C_0^2} \right)_i \Phi_i \Phi_{i+1}'' + \frac{f}{C_0^2} (1 - \Phi_{i+1}') (1 + \Phi_i') + \frac{g}{C_0^2} (1 - \Phi_{i+1}') = 0 \quad (11)$$

Промежуток интегрирования по ξ был выбран равным 10 при шаге $\Delta\xi = 0.05$. При приближении к точке отрыва сходимость процесса резко ухудшалась. Замедленные сходимости происходило также при значениях параметров g , близких к 0.25, и f , близких к нулю. Более того, в последнем случае процесс последовательных приближений часто выводил на другое решение, что делало затруднительным интегрирование уравнения в этой области формпараметров.



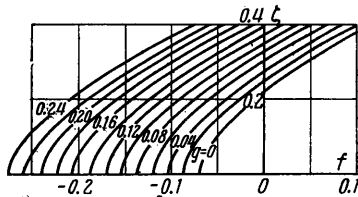
Фиг. 1



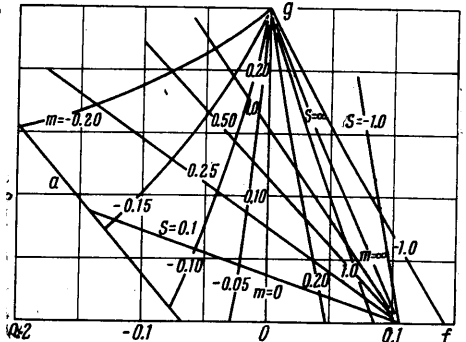
Фиг. 2

На фиг. 1—3 представлены функции F^* , ζ , H , а на фиг. 4 в плоскости формпараметров fg показана кривая a , на которой происходит отрыв течения в пограничном слое. В диапазоне f и g , для которого были проведены вычисления, эта кривая очень близка к прямой $f = -0.850$, $g = 0.0681$.

На фиг. 4 показаны также кривые $m(f, g) = \text{const}$ и $S(f, g) = \text{const}$, которые



Фиг. 3



Фиг. 4

отражают связь между решениями уравнений (8) и (9). Видно, что значения параметров $f = 0$, $g = 0.25$ являются для автомодельных решений в плоскости fg своего рода узловой точкой, в которой сходятся кривые $m(f, g) = \text{const}$. В этой точке уравнение (9) допускает аналитическое решение

$$\Phi' = 1 - \exp\{-\sqrt{g/C_0^2\xi}\}, \quad F^* = 0, \quad \zeta = 0.5, \quad H = 2 \quad (12)$$

Найденные зависимости F^* , ζ , H могут быть использованы для приближенного расчета пограничного слоя на основе уравнения (7) при задании скорости и магнитного поля внешнего потока. Для прикидочного расчета F^* с точностью до 8% можно аппроксимировать линейной

$$F^* = a - bf - cg, \quad a = 0.44, \quad b = 5.35, \quad c = 1.80 \quad (13)$$

Тогда уравнение (7) интегрируется в квадратурах

$$Z = \left(\frac{U}{U_0}\right)^{-b} \exp\left\{-c \int_0^x \frac{N}{U} dx\right\} \left[Z_0 + a \int_0^x \frac{U^{b-1}}{U_0^b} \exp\left\{c \int_0^t \frac{N}{U} dt\right\} dx \right] \quad (14)$$

После этого коэффициент трения на стенке определится по формуле

$$C_f = 2 \left(\frac{mx}{R_x}\right)^{1/2} \frac{U}{U_\infty} \frac{\zeta(f, g)}{g^{1/2}}, \quad R_x = \frac{U_\infty x}{\nu}, \quad mx = \frac{\sigma B^2 x}{\rho U_\infty} \quad (15)$$

Область значений f и g , в которой были вычислены функции F^* , ζ , H , достаточна для расчета пограничного слоя, когда градиенты скоростей во внешнем потоке U' или велики или малы по сравнению с величиной N . Если же они одного порядка, необходимо произвести дополнительные вычисления этих функций или решать совместно уравнения (7) и (9) при задании $U(x)$ и $B(x)$.

Поступило I VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Цинобер А. Б., Щербинин Э. В. О влиянии поперечного магнитного поля на сопротивление пластины. Изв. АН Латв. ССР, 1963, № 6.
2. Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. 1965, № 3.
3. Dhana K. M. Heat Transfer in Magnetohydrodynamic Flow in an Entrance. Trans. ASME, ser. C, 1965, vol. 87, No. 2.
4. Hugelmann R. D., Haworth D. R. An MHD Boundary — Layer compatibility Condition. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 7.
5. Лойцянский Л. Г. МЖГ, изд. 2-е, Физматгиз, 1959.
6. Китанин Э. Л., Соковишин Ю. А. Пограничный слой проводящей среды в магнитном поле. Магнитная гидродинамика. 1966, № 1.

МЕТОД СРЕДНЕМАССОВЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
ВО ВНЕШНЕМ ПОТОКЕ С ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ

В. В. ЛУНЕВ

(Москва)

Предложен инженерный метод расчета трения и теплопередачи через пограничный слой, в начальном сечении которого x_0 задано неоднородное по линиям тока распределение скорости, полной и статической энтальпии. Подобные задачи возникают при вихревом взаимодействии пограничного слоя с высокочастотным на тонких притупленных телах, при внезапном изменении граничных условий для уже развитого пограничного слоя (скачок температуры, излом поверхности), при обтекании тела спутным следом и т. д.

Обозначения: x, y — продольная и поперечная к телу координаты; u, ψ, H, h — скорость газа, функция тока, полная и статическая энтальпия; p, ρ, μ, σ — давление, плотность, вязкость, число Прандтля; τ, q — трение и тепловой поток на поверхности тела; $r(x), \delta(x)$ — форма поверхности тела и толщина пограничного слоя; V, M — скорость и число Маха невозмущенного потока; $u^{(0)}(x_0, \psi), H^{(0)}(x_0, \psi), h^{(0)}(x_0, \psi)$ — распределение параметров в начальном сечении; $u^{(0)}(x, \psi), H^{(0)}(x, \psi), h^{(0)}(x, \psi)$ — профили величин во внешнем потоке при отсутствии трения и теплопередачи на поверхности тела.

Степени $\nu = 0.1$ относятся к плоским и осесимметричным течениям, индексы δ, w, b, ∞ — к величинам на внешней границе внутреннего пограничного слоя, на поверхности тела в вязком и невязком потоках и в невозмущенном потоке соответственно.

1. При решении подобного рода задач возмущенную область можно разбить на две: внутренний пограничный слой, определяемый как область практического влияния граничных условий на поверхности, и внешняя область, развитие которой за счет вязкости и теплопроводности можно определять независимо от условий на поверхности как для свободного безграничного потока; граница раздела $\delta(x)$ между областями определится из условий достаточно гладкого (теоретически асимптотического) склеивания решения. Возможность такого разбиения, помимо общих соображений, продемонстрирована на частном примере степенной зависимости $h^{(0)}$ от ψ и постоянной скорости $u^{(0)} = V$ в работе [4].

Однако известное внешнее поле еще не дает оснований для непосредственного использования приближенных методов, типа методов локального подобия [2, 3] или интегральных соотношений [4], разработанных для потенциальных внешних течений, хотя градиенты величин на внешней границе пограничного слоя часто пренебрежимо малы по сравнению с градиентами в пограничном слое (например на поверхности притупленных тел [5]).

Дело в том, что эти методы учитывают предысторию пограничного слоя только через его толщину, и если она известна, то тепловой поток и трение определяются через местную граничную скорость и энтальпию, которые в потенциальном внешнем потоке определяют полные импульс $u_0\psi_0$ и теплосодержание $H_0\psi_0$, поступившие в пограничный слой из внешнего потока. В случае же неоднородного внешнего потока эти величины соответственно равны

$$\psi u_0(x, \psi) = \int_0^{\psi} u^{(0)}(x, \psi) d\psi, \quad \psi H_0(x, \psi) = \int_0^{\psi} u^{(0)}(x, \psi) d\psi$$

(при $\psi = \psi_0$) (1.1)