Преобразуя (15), имеем

$$b^\circ = 2cX^\circ\left[1-\frac{X^\circ}{2(R^\circ+X^\circ)}\right], \qquad b^\circ = 2cX^\circ\left[1+\frac{X^\circ}{2(R^\circ-X^\circ)}\right] \tag{16}$$

(для потока, направленного от центра и к центру диска соответственно).

На фиг. 4 и 5 приведено изменение ширины радиально-щелевой струи, распространяющейся к центру (фиг. 4) и от центра (фиг. 5) диска. Сплошная кривая соответствует случаю $R^\circ = \infty$, пунктирная кривая иллюстрирует результаты настоящей работы, а штрих-пунктирная — результаты А. С. Гиневского. Как видно, кривые, построенные при использовании формул А. С. Гиневского [5], отличаются от случая $R^\circ = \infty$ (плоско-параллельная струя) больше, чем кривые, построенные при использовании методики настоящей работы. Следует обратить внимание, что величина производной db / dx, определенная из соотношения (16) для конечного значения R°, при $x \to \infty$ стремится к 0,11; это не совпадает с результатами для плоско-параллельной струи.

Поступило 3 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
2. Лойцянский Л. Г. Радиально-щелевая струя в пространстве, заполненном той же жидкостью. Тр. ЛПИ, 1953, № 5.
3. Гродзовский Г. Л. Распространение ламинарной и турбулентной осесимметричных веерных струй в затопленном пространстве. Промышленная аэродинамика, Оборонгиз, 1962, вып. 23.
4. Schrader H. Trockung feuchten Oberfleichen mittels Warm-luftstrahlen. VDI — Forschungsheft, Ausgabe B. 1961, B. 27, No. 484.
5. Гиневский А. С. Радиально-щелевая струя, истекающая из кольцевого источника конечного диаметра. Промышленная аэродинамика, Оборонгиз, 1962, вып. 23.

О КОЭФФИЦИЕНТЕ СУЖЕНИЯ СТРУЙ

Ю. П. ИВАНИЛОВ, Е. В. СЕМЕНОВ

(Москва)

Определяются асимптотические экспоненциальные законы сужения плоских и осесимметричных струй невесомых жидкостей различной природы на больших расстояниях от места истечения без учета сил поверхностного натяжения. Приводятся асимптотические формулы для функции тока, компонент скорости жидкости на свободной поверхности струи.

Рассмотрим сначала плоскую струю идеальной несжимаемой жидкости. В случае незавихренной струи имеем для функции тока ψ уравнения и граничные условия

$$\Delta\psi = 0 \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 = \rho_0^2 u_0^2, \quad \psi = Q \quad \text{на свободной поверхности}$$

$$\psi = 0 \text{ при } y = 0 \tag{2}$$

Здесь u_0 и ρ_0 — скорость и плотность жидкости на поверхности струи, $2Q$ — массовый расход.

Ось x направлена по оси симметрии струи, y — расстояние до оси симметрии струи. Компоненты скорости u, v находятся по формулам $u = \rho\partial\psi / \partial y$, $v = -\rho\partial\psi / / \partial x$, где ρ — плотность жидкости. Для несжимаемой струи $\rho = \rho_0$.

На достаточно большом удалении от места истечения свободная поверхность струи имеет форму, близкую к прямолинейной.

Обозначая ширину струи на бесконечности через $2h$ и снося граничные условия на свободной поверхности на линию $y = h$, будем искать ψ в форме $\psi = \rho_0 u_0 y + \psi_1$. Пренебрегая величинами порядка ψ_1^2, получим

$$\Delta\psi_1 = 0, \qquad \partial\psi / \partial y = 0, \qquad y = 0, \qquad \psi_1 = 0, \qquad y = h$$

Отсюда

$$\psi_1 = \rho_0 u_0 C \exp(-\pi x / 2h) \sin(\pi y / 2h)$$

Форму свободной поверхности $f(x)$ найдем из второго граничного условия (2)

$$y = f(x) \equiv h - C \exp(-\pi x / 2h) \tag{3}$$

где h — полуширина струи на бесконечности.

Если поместить начало координат достаточно далеко от места истечения струи, то константу C легко выразить через y_0 — ширину струи при $x = 0$. Окончательно для функции тока и свободной поверхности струи имеем следующие асимптотические представления:

$$\psi = \rho_0 u_0 y + \rho_0 u_0 (h - y_0) \exp \frac{-\pi x}{2h} \sin \frac{\pi y}{2h} \tag{4}$$

$$y = f(x) \equiv h + (y_0 - h) \exp \frac{-\pi x}{2h}, \qquad Q = \rho_0 u_0 h$$

Формула (4) была получена Митчелом и Жуковским [1].

Приведем аналогичные результаты, полученные при помощи изложенной выше методики для случая сжимаемых и вязких жидкостей, а также для осесимметричных струй.

Для осесимметричных струй функция тока вводится формулами

$$u = \frac{\rho}{y} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\rho}{y} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Второе условие на свободной поверхности выглядит несколько иначе, а именно: $\psi = Q / \pi$, где $2Q$,— как и прежде, массовый расход, h — радиус струи на бесконечности. Приведем без вывода следующие результаты.

Осесимметричная незавихренная струя идеальной несжимаемой жидкости

$$\psi = \frac{1}{2} \rho_0 u_0 y^2 + \rho_0 u_0 \frac{(h - y_0)}{J_1(s_0)} y \exp\left(-\frac{s_0 x}{h}\right) J_1\left(\frac{s_0 y}{h}\right) \tag{5}$$

$$f(x) = h + (y_0 - h) \exp\left(-\frac{s_0 x}{h}\right), \qquad h^2 = \frac{2Q}{\pi \rho_0 u_0}, \qquad Q = \frac{\pi \rho_0 u_0 h^2}{2}$$

Здесь J_1 и J_0 — функции Бесселя первого рода, s_0 — наименьший положительный корень уравнения [2]

$$J_0(s) = 0, \qquad s_0 \approx 2.4048$$

Асимптотика завихренных осесимметричных струй подробно исследована в [3, 4].

Идеальная сжимаемая жидкость, безвихревое течение при дозвуковых скоростях. Плоская струя

$$u = u_0 + \frac{\pi (h - y_0) u_0}{2h(1 - M_0^2)} \exp \frac{-\pi x}{2h \sqrt{1 - M_0^2}} \cos \frac{\pi y}{2h}$$

$$v = \frac{\pi (h - y_0) u_0}{2h \sqrt{1 - M_0^2}} \exp \frac{-\pi x}{2h \sqrt{1 - M_0^2}} \sin \frac{\pi y}{2h} \tag{6}$$

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 u_0^2 (y - h)}{2h(1 - M_0^2)} \exp \frac{-\pi x}{2h \sqrt{1 - M_0^2}} \cos \frac{\pi y}{2h} \qquad (M_0 < 1)$$

$$f = h + (y_0 - h) \exp \frac{-\pi x}{2h \sqrt{1 - M_0^2}}, \qquad M_0^2 = \frac{u_0^2}{c_0^2}, \qquad p = \theta^\nu \rho^\nu$$

$$Q = \rho_0 u_0 h, \qquad c_0^2 = \gamma \theta p^{(\nu-1)/\nu}, \qquad p^{\nu/(\nu-1)}$$

Здесь M — число Маха, c_0 — скорость звука на поверхности струи, p — давление.

Осесимметричная струя идеальной сжимаемой жидкости при дозвуковых скоростях

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 + \frac{s_0(h-y_0)u_0}{h(1-M_0^2)J_1(s_0)} J_0\left(\frac{s_0 y}{h}\right) \exp\frac{-s_0 x}{h\sqrt{1-M_0^2}} \\
v &= \frac{s_0(h-y_0)u_0}{h\sqrt{1-M_0^2}\,J_1(s_0)} J_1\left(\frac{s_0 y}{h}\right) \exp\frac{-s_0 x}{h\sqrt{1-M_0^2}} \\
p &= p_0 + \frac{\rho_0 u_0^2 s_0 (y_0-h)}{h(1-M_0^2)J_1(s_0)} J_0\left(\frac{s_0 y}{h}\right) \exp\frac{-s_0 x}{h\sqrt{1-M_0^2}} \\
f &= h + (y_0-h)\exp\frac{-s_0 x}{h\sqrt{1-M_0^2}}, \qquad Q = \frac{\pi \rho_0 u_0 h^2}{2}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Обозначения прежние.

Вязкая несжимаемая жидкость. Плоская струя

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 + u_0\left(-C_1\cos\frac{sy}{h} + \sqrt{s(s+R)}\,C_2\cos\frac{\sqrt{s(s+R)}}{h}\right)\exp\frac{-sx}{h} \\
v &= u_0\left(-C_1\sin\frac{sy}{h} + sC_2\sin\frac{\sqrt{s(s+R)}}{h}y\right)\exp\frac{-sx}{h} \\
p &= p_0 + \rho_0 u_0^2 C_1\cos\frac{sy}{h}\exp\frac{-sx}{h}, \qquad f = h + (y_0-h)\exp\frac{-sx}{h}
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
C_1 = \frac{(y_0-h)s(2s+R)}{Rh\sin s}, \qquad C_2 = \frac{2(y_0-h)s}{Rh\sin\sqrt{s(s+R)}}, \qquad Q = \rho_0 u_0 h, \qquad R = \frac{\rho_0 u_0 h}{\mu}
$$

Здесь R — число Рейнольдса, μ — вязкость жидкости, s — наименьший положительный корень уравнения

$$
(2s+R)^2\operatorname{tg}\sqrt{s(s+R)} = 4s\sqrt{s(s+R)}\operatorname{tg}s \tag{9}
$$

Вязкая несжимаемая жидкость. Осесимметричная струя.

$$
\begin{aligned}
u &= u_0 + u_0\left[-C_1 J_0\left(\frac{sy}{h}\right) + \sqrt{s(s+R)}\,C_2 J_0\left(\frac{\sqrt{s(s+R)}\,y}{h}\right)\right]\exp\frac{-sx}{h} \\
v &= u_0\left[-C_1 J_1\left(\frac{sy}{h}\right) + sC_2 J_1\left(\frac{\sqrt{s(s+R)}\,y}{h}\right)\right]\exp\frac{-sx}{h}
\end{aligned} \tag{10}
$$

$$
p = p_0 + \rho_0 u_0^2 J_0\left(\frac{sy}{h}\right)\exp\frac{-sx}{h}, \qquad f = h + (y_0-h)\exp\frac{-sx}{h}, \qquad Q = \frac{\pi\rho_0 u_0 h^2}{2}
$$

$$
C_1 = \frac{(y_0-h)s(2s+R)}{RhJ_1(s)}, \qquad C_2 = \frac{2(y_0-h)s}{RhJ_1(\sqrt{s(s+R)})}, \qquad R = \frac{\rho_0 u_0 h}{\mu_0}
$$

Здесь s — наименьший положительный корень уравнения

$$
\begin{aligned}
&(2s+R)^2 J_0(s) J_1(\sqrt{s(s+R)}) - 4s\sqrt{s(s+R)}\,J_1(s) J_0(\sqrt{s(s+R)}) - \\
&\quad - 2RJ_1(s) J_1(\sqrt{s(s+R)}) = 0
\end{aligned} \tag{11}
$$

Уравнения (9) и (11) таковы, что нельзя выразить явно зависимость параметров s и R, поэтому расчеты производились итеративным методом на ЭВМ. Приводим результаты вычислений значений чисел Рейнольдса, согласно (9) и (11), для ряда значений s.

Вязкая несжимаемая жидкость. Плоская струя

$S =$	0.10,	0.20,	0.30,	0.40,	0.50,	0.60,	0.70
$R =$	98.6,	49.1,	32.6,	24.3,	19.3,	16.0,	13.6

Вязкая несжимаемая жидкость. Осесимметричная струя

$S =$	0.10,	0.19,	0.31,	0.40,	0.49,	0.61,	0.70,	0.79,	0.93,	1.00
$R =$	147,	77.5,	47.5,	36.5,	30.0,	24.0,	20.5,	18.0,	15.5,	14.0

Из сопоставления этих данных видно, что коэффициент сжимаемости осесимметричной струи больше, чем для плоской для одних и тех же чисел Рейнольдса.

Несколько сложнее случай сжимаемой вязкой жидкости. Поэтому ограничимся решением для более простого случая.

Осесимметричная струя вязкой сжимаемой жидкости. Как и прежде, положим

$$u = u_0 + u_1,\quad v = v_1,\quad p = p_0 + p_1,\quad T = T_0 + T_1,\quad \rho = \rho_0 + \rho_1,\quad \mu = \mu_0$$

Здесь u, v, p, ρ, μ имеют тот же смысл, что и раньше, T — температура жидкости. Нулевым индексом отмечены значения искомых величин при $x = \infty$, единицей в индексе отмечены малые при достаточно больших x величины, квадратами которых в дальнейшем пренебрегаем.

Принимая во внимание соотношение $p_0 = \rho_0 R^0 T_0$, получим с принятой степенью точности [5] уравнения в системе единиц СИ:

$$\begin{gathered}
\rho_0 u_0 u_{1x} = -p_{1x} + \mu_0(u_{1xx} + u_{1yy} + u_{1y}/y) + {}^1/_3\mu_0(u_{1xx} + v_{2xy} + v_{2x}/y)\\
\rho_0 u_0 v_{1x} = -p_{1y} + \mu_0(v_{1xx} + v_{1yy} + v_{1y}/y - v_1/y^2) +\\
+ {}^1/_3\mu_0/3(u_{1xy} + v_{1yy} + v_{1y}/y - v_1/y^2),\quad \rho_{1x}u_0 + \rho_0 u_{1x} + \rho_0 v_{1y} + \rho_0 v_1/y = 0 \quad (12)\\
c_p\rho_0 u_0 T_{1x} = \varkappa(T_{1xx} + T_{1yy} + T_{1y}/y) + \varkappa\rho_{1x}\\
p_1 = \rho_1 R^0 T_0 + \rho_0 R^0 T_1,\qquad u_x \equiv \partial u/\partial x,\qquad u_y \equiv \partial u/\partial y
\end{gathered}$$

Здесь $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности, R^0 — газовая постоянная. Граничные условия с той же степенью точности примут вид

$$\partial p/\partial y = 0,\quad v = 0,\quad \partial u/\partial y = 0,\quad \partial T/\partial y = 0,\quad y = 0 \qquad (13)$$

$$-p_1 + 2\mu_0 v_{1y} = 0,\quad u_{1y} + v_{1x} = 0,\quad T_1 = 0,\quad v_1 = u_0 f',\quad y = h \qquad (14)$$

Учитывая граничные условия при $y = 0$, ищем решение уравнений (12) в форме

$$\begin{gathered}
u_1 = u_0 U \exp\frac{-sx}{h} J_0\left(\frac{\lambda y}{h}\right),\qquad v_1 = u_0 V \exp\frac{-sx}{h} J_1\left(\frac{\lambda y}{h}\right)\\
T_1 = T_0 T \exp\frac{-sx}{h} J_0\left(\frac{\lambda y}{h}\right),\qquad p_1 = \rho_0 u_0^2 P \exp\frac{-sx}{h} J_0\left(\frac{\lambda y}{h}\right) \qquad (15)\\
\rho_1 = \rho_0 \Pi \exp\frac{-sx}{h} J_0\left(\frac{\lambda y}{h}\right)
\end{gathered}$$

Удобнее исключить предварительно из уравнений (12) давление и плотность

$$\begin{gathered}
\rho_0 u_0 u_{1x} = -\varkappa(T_{1x} - u_{1x} - v_{1y}) + {}^4/_3\mu_0 u_{1xx} + \mu_0 u_{1yy} + {}^1/_3\mu_0 v_{1xy}\\
\rho_0 u_0 v_{1xx} = -\varkappa(T_{1xy} - u_{1xy} - v_{1yy}) + {}^4/_3\mu_0 v_{1xy^2} + \mu_0 v_{1x^3} + \mu_0 u_{1xy^2} \qquad (16)\\
c_p\rho_0 u_0 T_{1x} = \varkappa(T_{1xx} + T_{1yy} + T_{1y}/y) + u_0 p_{1x}
\end{gathered}$$

После подстановки выражений (15) в уравнения (16) получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно U, V, T. Условия разрешимости этой системы (равенство нулю соответствующего определителя) дает неотрицательные корни

$$\lambda_1 = s,\quad \lambda_2 = \sqrt{s(s+R)},\quad \lambda_3 = [s^2 - {}^1/_2(m+n-p) + \sqrt{{}^1/_4(m+n-p)^2 - mn}]^{1/2}$$

$$m = \frac{Ss}{K},\quad n = \frac{3s^2R}{4s} - \frac{3R}{\theta},\quad p = \frac{3\theta^2 Rs}{K(4s - 3R\theta)} \qquad (17)$$

Здесь введены следующие безразмерные параметры

$$R = \frac{\rho_0 u_0 h}{\mu}\qquad \theta = \frac{RT_0}{u_0^2}\qquad S = \frac{c_p T_0}{u_0^2}\qquad K = \frac{\varkappa T_0}{\rho_0 u_0^2 h}$$

Таким образом, например, для u_1 получим

$$u_1 = e^{-sx}[U_1 J_0(\lambda_1 y) + U_2 J_0(\lambda_2 y) + U_3 J_0(\lambda_3 y)]$$

и аналогичные выражения для остальных неизвестных задачи.

Подставляя найденные выражения для u_1, v_1, T_1, p_1 в (13), аналогично предыдущему из условий разрешимости получаем некоторое трансцендентное уравнение относительно s, S, R, θ, K. Его снова приходится решать итеративными методами. Если присоединить к первым трем условиям (13) на поверхности условие $v_1 = u_0 f'$, то можно вычислить точные значения u_1, v_1, T_1, p_1, ρ_1.

Решение задачи для плоской струи сжимаемой жидкости вполне аналогично рассмотренному, именно, ищем неизвестные задачи в виде

$$u_1 = u_0 U \exp\frac{-sx}{h}\cos\frac{\lambda y}{h}, \qquad v_1 = u_0 V \exp\frac{-sx}{h}\sin\frac{\lambda y}{h}, \qquad T = T_0 T \exp\frac{-sx}{h}\cos\frac{\lambda y}{h}$$

$$p_1 = \rho_0 u_0^2 P \exp\frac{-sx}{h}\cos\frac{\lambda y}{h}, \qquad \rho = \rho_0 \Pi \exp\frac{-sx}{h}\cos\frac{\lambda y}{h}$$

Повторяя выкладки, приходим к тем же корням, что и (17).

Алгоритм решения этой задачи отличается от предыдущего только тем, что следует заменить $J_0(\lambda y)$ на $\cos\lambda y$, а $J_1(\lambda y)$ на $\sin\lambda y$.

Приводим результаты вычислений значений чисел Рейнольдса для ряда значений s и при фиксированных значениях параметров K, S, θ.

Вязкая сжимаемая жидкость. Плоская струя

$s = 0{,}20$,	0.30,	0.40,	0.50,	0.60,	0.70,	0.80	
$R = 67$,	48,	37,	30,	25,	21,	18	($K = 1.0$, $S = 1.0$, $\theta = 1.0$)
$R = 64$,	45,	35,	29,	24,	20,	17	($K = 7.0$, $S = 1.0$, $\theta = 1.0$)

Вязкая сжимаемая жидкость. Осесимметричная струя

$s = 0.20$	0.30,	0.40,	0.50,	0.60,	0.70	
$R = 51$,	35,	27,	21,	17,	15	($K = 1.0$, $S = 1.0$, $\theta = 1.0$)
$R = 46$,	31,	24,	19,	15,	13	($K = 7.0$, $S = 1.0$, $\theta = 1.0$)

Поступило 8 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. Физматгиз, 1961.
2. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Изд-во «Наука», 1964.
3. Reizzner H. Achialsimmetrisher, freie Flüssigkeitsstruhlen mit shwasher Kontraktion. Z. angew. Math. und Mech., B. 12, H 1.
4. Иванилов Ю. П. Асимптотика осесимметричной завихренной струи идеальной несжимаемой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
5. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. Физматгиз, 1963.

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СИЛЬНОМ ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ В ГОРЮЧЕЙ СМЕСИ

В. А. ЛЕВИН

(Москва)

Пусть в газообразной горючей смеси, которую считаем идеальным газом, с начальной плотностью ρ_0 происходит мгновенное выделение энергии E_0 в точке, на оси или плоскости симметрии. По газу распространяется мощная ударная волна, в которой полностью происходит сгорание. Эта волна является пересжатой волной детонации. Распространяясь по газу, с течением времени она переходит в обычную детонационную волну. Рассмотрим развитие процесса в приближенной постановке, основанной на методе Г. Г. Черного [1–3].

На поверхности волны должны выполняться соотношения

$$u_* = \frac{D}{\gamma+1}\left[1 + \sqrt{1 - 2(\gamma^2-1)Q/D^2}\right] \tag{1}$$

$$\rho_* = \rho_0 \frac{\gamma+1}{\gamma - \sqrt{1-2(\gamma^2-1)Q/D^2}}, \qquad p_* = \frac{\rho_0 D^2\left[1+\sqrt{1-2(\gamma^2-1)Q/D^2}\right]}{\gamma+1}$$