

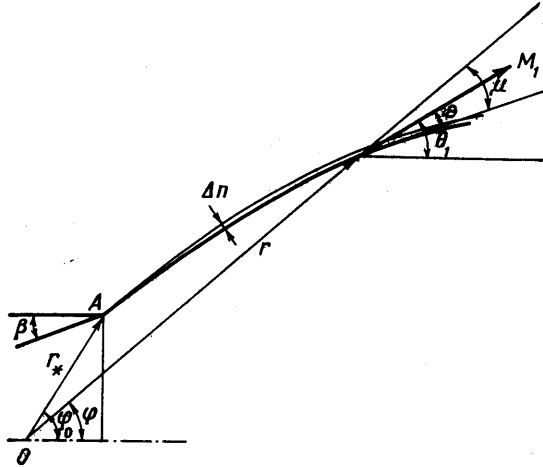
## К РАСЧЕТУ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТРУИ

В. Н. ГУСЕВ

(Москва)

Вопрос о расчете истекающей из сопла сверхзвуковой струи идеального термодинамически совершенного газа рассматривался ранее в ряде работ (см., например, [1-3]). В основу расчета этих течений в них был положен численный метод характеристик. В настоящей работе предлагается приближенное аналитическое решение поставленной задачи.

§ 1. Рассмотрим осесимметричную сверхзвуковую струю газа, истекающую из произвольного сопла в покоящуюся среду, давление в которой равно  $p_a$  (фиг. 1)<sup>1</sup>. По аналогии с общепринятой классификацией сопло будем называть расчетным, перерасширенным или недорасширенным, когда давление газа в точке  $A$  соответственно равно, меньше или больше давления  $p_a$  в окружающей среде. Исключая из рассмотрения случай расчетного профилированного сопла с равномерной параллельной оси симметрии скоростью на выходе, когда всюду в струе давление равно  $p_a$ , во всех других рассматриваемых здесь случаях внутри струи возникает скачок уплотнения. В случае перерасширенного сопла этот скачок присоединен к выходной кромке сопла. В расчетном случае и в случае недорасширенного сопла образование висячего скачка уплотнения, как показывают расчеты [1, 2], начинается на некотором расстоянии от среза сопла. В последнем случае его образование связано с появлением огибающей волн сжатия, возникающих после отражения волн разрежения от границы струи. Течение внутри струи оказы-



Фиг. 1

вается перерасширенным относительно внешнего давления  $p_a$  и будет ограничено слоем сжатого в скачке уплотнения газа. При гиперзвуковых скоростях истекающего из сопла газа течение внутри перерасширенной области будет полностью определяться заданием начальных данных в выходном сечении сопла. Последнее обстоятельство связано с появлением бесконечной области определения решения, когда течение на выходе из сопла полностью определяет невязкое течение в области, простирающейся до бесконечности [4].

Будем предполагать, что всюду местное число Маха  $M \gg 1$ , так что во всем поле течения скорость  $V$  мало отличается от максимальной  $V_m$ . Рассмотрим движение газа внутри сжатого слоя в предположении, что его толщина пренебрежимо мала. Воспользуемся следующими обозначениями (фиг. 1):  $r, \varphi$  — полярные координаты,  $\varphi_0$  — значение полярного угла в точке  $A$ ,  $\beta$  — угол наклона контура сопла в той же точке,  $r = r_* f(\varphi)$  — контур скачка,  $r_* = r_c / \sin \varphi_0$  — характерный радиус,  $r_c$  — радиус выходного сечения сопла.

В точке с координатой  $\varphi$  для разности  $\Delta p$  давлений по нормали к рассматриваемому сжатому слою можно записать

$$\Delta p = \rho \frac{V_m^2}{R} \Delta n \quad (1.1)$$

Здесь  $\rho$  — плотность,  $R, \Delta n$  — соответственно радиус кривизны и толщина сжатого слоя. Воспользовавшись выражением для расхода  $Q = 2\pi r_* \rho V_m f \sin \varphi \Delta n$  через сжатый слой, преобразуем соотношение (1.1) к виду

$$\Delta p = \frac{Q V_m}{2\pi r_* f R \sin \varphi}$$

<sup>1</sup> Аналогичное решение может быть получено при истечении струи в спутный поток.

Используя далее соотношения на скачке уплотнения и принимая во внимание, что на внешней границе сжатого слоя давление равно  $p_a$ , для  $\Delta p$  можно записать

$$\Delta p = p_a - p_1 \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left( \varepsilon = \mu - (\varphi - \theta_1), \mu = \arctg \left( -\frac{f}{f'} \right) \right)$$

Здесь  $\varepsilon$  — угол наклона скачка к направлению набегающего потока,  $\mu$  — угол, образованный направлением радиус-вектора  $r$  и направлением касательной к контуру скачка,  $\theta$  — угол наклона вектора скорости,  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей, индекс 1 относится к состоянию перед поверхностью скачка уплотнения, штрихом обозначено дифференцирование по независимой переменной  $\varphi$ . Расписывая выражение для радиуса кривизны  $R$  в полярных координатах для контура скачка, окончательно получим дифференциальное уравнение

$$f'' = f + 2 \frac{f'^2}{f} - \frac{2\pi r_*^2 p_0}{Q V_m} \sin \varphi (f^2 + f'^2)^{3/4} \left[ P_a \left( \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{\gamma/(\gamma-1)} - \frac{2\gamma}{(\gamma + 1)} M_1^2 \sin^2 \varepsilon \left( \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} \right] \left( P_a = \frac{p_a}{p_c} \right) \quad (1.2)$$

где  $P_a$  — перепад давлений в точке  $A$ ,  $p_c$ ,  $M_c$  — соответственно давление и число Маха на срезе сопла в той же точке,  $p_0$  — давление торможения газа. При  $P_a = 1$  сопло будет расчетным, при  $P_a > 1$  — перерасширенным, при  $P_a < 1$  — недорасширенным. Входящие в уравнение (1.2) величины  $Q$  и  $M_1$  в общем случае являются функциями полярных координат и, как отмечалось выше, будут полностью определяться заданием начальных данных в выходном сечении сопла, например, на дуге  $r = r_*$ .

Таким образом, поставленная задача свелась к определению функции  $f$  из обыкновенного дифференциального уравнения (1.2) при следующих граничных условиях: при  $\varphi = \varphi_0$   $f = 1$  и  $\Delta p = 0$ . В развернутом виде второе условие записывается

$$P_a \left( \frac{M_{1*}}{M_c} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)} - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_{1*}^2 \sin^2 [\mu_* - (\varphi_0 - \theta_{1*})] = 0$$

Здесь индексом \* обозначены параметры при  $r = r_*$ . В случае перерасширенного сопла ( $P_a > 1$ ) последнее условие выполняется точно. При  $P_a < 1$  оно будет приближенным в силу того, что образование висячего скачка уплотнения в струе начинается на некотором расстоянии от среза сопла при  $\varphi \neq \varphi_0$ . Однако, как показывают численные расчеты методом характеристик при гиперзвуковых скоростях потока, когда число  $M_1 \gg 1$ , это расстояние оказывается достаточно малым. В дальнейшем его всюду можно полагать равным нулю.

§ 2. Рассмотрим осесимметричную гиперзвуковую струю газа, истекающую из расчетного или перерасширенного сопла с коническим потоком на выходе. При  $\varphi_0 = \beta$ , где  $\beta$  — угол наклона вектора скорости в точке  $A$ , входящие в уравнение (1.2) функции  $Q$  и  $M_1$  могут быть представлены в конечном виде. В рассматриваемом случае  $\theta_1 = \varphi$ , а начальные, обозначенные индексом \*, данные на контрольной поверхности при  $r = r_* = r_c / \sin \beta$ , будут тождественны соответствующим значениям в выходном сечении сопла. Последние обозначены индексом  $c$ . Для зависящей от одной независимой переменной  $\varphi$  функции  $Q$ , входящей в (1.2), можно записать

$$Q = \frac{4\gamma}{\gamma - 1} \frac{\pi r_*^2 (\cos \varphi - \cos \beta) p_0}{V_m (1/2(\gamma - 1) M_c^2)^{1/(\gamma-1)}}$$

Для функции  $M_1$ , которая в рассматриваемом нами случае будет зависеть только от  $r$ , можно воспользоваться ее асимптотическим выражением

$$M_1 = M_c \left( \frac{r}{r_*} \right)^{\gamma-1} = M_c f^{\gamma-1}$$

Подставляя полученные выражения для  $Q$  и  $M_1$  в уравнение (1.2), окончательно для контура скачка получим

$$f'' = f + 2 \frac{f'^2}{f} - \frac{(\gamma - 1) \sin \varphi (f^2 + f'^2)^{3/2}}{2\gamma (\cos \varphi - \cos \beta)} \left( \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{1/(\gamma-1)} \left\{ P_a \left( \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 \right)^{-\gamma/(\gamma-1)} - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} M_c^2 \frac{f^{2\gamma}}{f^2 + f'^2} \left[ \frac{\gamma - 1}{2} M_c^2 f^{2(\gamma-1)} \right]^{-\gamma/(\gamma-1)} \right\} \quad (2.1)$$

В качестве граничных условий следует принять

$$f = 1, \quad f' = - \left( \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{M_c^2}{P_a} - 1 \right)^{1/2} \quad \text{при } \varphi = \beta$$

При  $\beta \leq \varphi \leq \beta - \delta$ , где  $\delta$  — малая величина, решение уравнения (2.1) записывается в виде

$$f = 1 + \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{M_c^2}{P_a} - 1 \right)^{1/2} (\beta - \varphi)$$

так как выражение в правой части этого уравнения при  $\varphi = \beta$  представляет собой неопределенность вида  $0/0$ . При  $\varphi > \beta - \delta$  уравнение (2.1) решалось численно методом Рунге — Кутты на электронно-вычислительной машине при следующих граничных условиях:

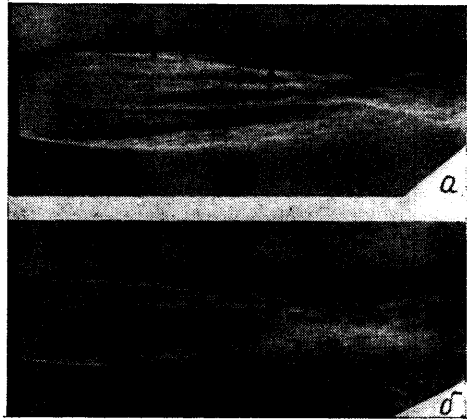
при  $\varphi = \beta - \delta$

$$f = 1 + \delta \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{M_c^2}{P_a} - 1 \right)^{1/2}, \quad f' = - \left( \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{M_c^2}{P_a} - 1 \right)^{1/2}$$

Расчет проводился при нескольких убывающих значениях  $\delta$  до тех пор, пока предыдущее решение не совпадало с последующим.

Теоретический расчет формы скачка сравнивается с результатами соответствующего экспериментального исследования. Последнее было проведено в потоке гелия ( $\gamma = 5/3$ ) с коническим соплом, угол полураствора которого  $\beta = 15^\circ$ , а отношение площадей соответствовало расчетному значению числа Маха на срезе сопла, равному 5. Очевидно, что при конечном значении давления торможения  $p_0$ , которое в настоящих исследованиях равнялось 83 атм, за счет толщины вытеснения пограничного слоя, значение числа Маха на срезе сопла должно быть меньше расчетного. С целью определения истинного значения  $M_c$  в рассматриваемом нами случае было проведено измерение полного напора  $p_0'$  по оси истекающей из этого сопла струи. На основании этих данных были определены истинные значения числа  $M_c$  и угла полураствора сопла при учете толщины вытеснения пограничного слоя. Угол полураствора сопла оказался близким к геометрическому  $\beta = 15^\circ$ , а число  $M_c = 4,65$ . При двух, имевших место в эксперименте, значениях  $P_a = 1$  (расчетный случай, фиг. 2, а) и  $P_a = 1,37$  (перерасширенный случай, фиг. 2, б) картина истекающей из рассматриваемого здесь сопла струи приведена на фиг. 2. Крестиками на этих фигурах нанесены теоретические, следующие из уравнения (2.1) координаты скачка уплотнения, ограничивающего перерасширенную область.

В заключение автор благодарит А. В. Жбакову за помощь в проведении необходимых расчетов.



Фиг. 2

Поступило 11 VII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Love E. S., Grigsby C. E., Lee L. P., Woodling M. J. «Experimental and theoretical studies of axisymmetric free jets». NASA Technical Report 1959 г., R—6.
2. Волконская Т. Г. Расчет сверхзвуковых осесимметричных струй. Численные методы в газовой динамике. Сборник работ вычислительного центра МГУ. 1963.
3. Емельянов В. М. Расчет осесимметричной сверхзвуковой струи, истекающей в спутный сверхзвуковой поток или покоящуюся среду. Инж. журнал, 1965, т. 5, вып. 3.
4. Ладженский М. Д. Анализ уравнений гиперзвуковых течений и решение задачи Коши. ПММ, 1962, т. 26, вып. 2.