

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ, ПОДОГРЕВАЕМОЙ СНИЗУ,

Г. З. ГЕРШУНИ, Е. М. ЖУХОВИЦКИЙ, Е. Л. ТАРУНИН

(Пермь)

Равновесие жидкости, подогреваемой снизу, устойчиво лишь при малых значениях вертикального градиента температуры. При увеличении градиента температуры наступает кризис равновесия, в результате которого развивается конвекция. Если жидкость заполняет замкнутую полость, то существует дискретная последовательность критических градиентов температуры (чисел Рейля), при которых равновесие теряет устойчивость относительно малых характеристических возмущений. Эта последовательность критических градиентов и движений может быть найдена из решения линейной задачи об устойчивости равновесия относительно малых возмущений.

Если градиент температуры превосходит нижнее критическое значение, то (при стационарных условиях подогрева) в жидкости устанавливается стационарное конвективное движение определенной амплитуды, зависящей от величины градиента температуры. Амплитуда установившегося конвективного движения, естественно, не может быть определена из линейной теории устойчивости; для ее нахождения требуется решить задачу о конвекции при подогреве снизу в нелинейной постановке. Нелинейное исследование стационарных движений жидкости в замкнутой полости при подогреве снизу было проведено в работе [1]. В этой работе показано, что при числах Рейля R , меньших нижнего критического значения R_c , стационарные движения жидкости невозможны. При $R > R_c$ возникает стационарная конвекция, амплитуда которой вблизи порога мала и пропорциональна $(R - R_c)^{1/2}$ (так называемая «мягкая» неустойчивость) — в полном соответствии с результатами феноменологической теории Ландау [2, 3].

Преимущественно использовались различные варианты метода разложения по степеням амплитуды [4-8], и, следовательно, полученные в этих работах результаты справедливы лишь при значениях R , близких к R_c , т. е. вблизи порога конвекции.

Исследование развитого конвективного движения вдали от порога, по-видимому, можно провести лишь численно с применением ЭВМ. В работах [9, 10] численные методы успешно применены для исследования развитой конвекции в плоском бесконечном горизонтальном слое жидкости.

В данной работе предпринята попытка численного исследования плоских конвективных движений жидкости в замкнутой полости квадратного сечения. Полная нелинейная система уравнений конвекции решалась методом конечных разностей на ЭВМ для различных значений числа Рейля, максимальное из которых в 40 раз превосходило наименьшее критическое значение R_c . Численное решение позволяет проследить за развитием возникающего при $R > R_c$ стационарного движения по мере увеличения числа Рейля и за возникновением при некотором значении параметра R колебательных движений. Исследована теплопередача через полость. Соответствующая линейная задача об устойчивости равновесия решена приближенно методом Галеркина.

§ 1. Устойчивость равновесия. Рассмотрим плоское конвективное движение жидкости в области, имеющей форму квадрата со стороной a . Расположение осей координат указано на фиг. 1. Запишем уравнения конвекции для функции тока ψ и температуры T в безразмерном виде, приняв в качестве единиц расстояния, времени, функции тока и температуры соответственно a , a^2 / ν , Θ

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} \right) = \Delta \Delta \psi - G \frac{\partial T}{\partial x} \quad \left(G = \frac{g\beta\Theta a^3}{\nu^2} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{1}{P} \Delta T \quad \left(P = \frac{\nu}{\chi} \right) \quad (1.2)$$

Здесь все величины безразмерные; G и P — числа Грассхофа и Прандтля. На границах области скорость жидкости равна нулю; температура на горизонтальных участках постоянна, а на вертикальных меняется линейно (только при таких условиях возможно равновесие). Для безразмерных ψ и T имеем, таким образом, граничные условия

$$\begin{aligned} \psi = \partial\psi / \partial x = 0, & \quad T = 1/2 - y & \text{при } x = \pm 1/2 \\ \psi = \partial\psi / \partial y = 0, & \quad T = 0 & \text{при } y = 1/2 \\ \psi = \partial\psi / \partial y = 0, & \quad T = 1 & \text{при } y = -1/2 \end{aligned} \quad (1.3)$$

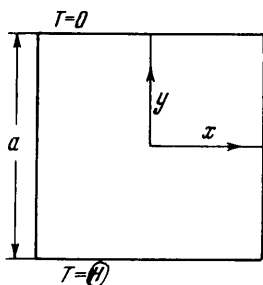
В равновесии скорость равна нулю, а градиент температуры вертикален и постоянен, т. е.

$$\psi_0 = 0, \quad T_0 = 1/2 - y \quad (1.4)$$

Рассмотрим малые возмущения равновесия (1.4)

$$\psi = \psi_0 + \psi', \quad T = T_0 + T' \quad (1.5)$$

Подставляя (1.5) в (1.1), (1.2) и опуская квадратичные по возмущениям члены, получим линейные уравнения для малых возмущений.



Фиг. 1

Эти уравнения имеют решения, экспоненциально зависящие от времени: $\psi', T' \sim \exp(-\lambda t)$ (нормальные возмущения). Поскольку декременты λ вещественны (см. [11]), то на границе устойчивости $\lambda = 0$, и стационарные уравнения для «критических» движений имеют вид (для краткости штрихи опущены)

$$\Delta\Delta\psi = G \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{1}{P} \Delta T = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.6)$$

с однородными граничными условиями

$$\psi = \partial\psi / \partial n = 0, \quad T = 0 \quad \text{при } x, y = \pm 1/2 \quad (1.7)$$

(n — нормаль к границе области)

Краевую задачу (1.6), — (1.7) будем решать приближенно методом Галеркина. В качестве базисных функций для аппроксимации ψ примем

$$\psi_{mn} = (1 + \cos 2\pi x)(1 + \cos 2\pi y) f_{mn} \quad (1.8)$$

где f_{mn} — функции вида

$$\sin m\pi x \sin n\pi y, \cos m\pi x \sin n\pi y, \sin m\pi x \cos n\pi y, \cos m\pi x \cos n\pi y, \quad m, n=0, 1, 2, \dots$$

Ограничиваясь шестью базисными функциями, будем иметь

$$\psi = (1 + \cos 2\pi x)(1 + \cos 2\pi y) [c_0 + c_1 \sin \pi x + c_2 \sin \pi y + c_3 \cos 2\pi x + c_4 \cos 2\pi y + c_5 \sin \pi x \sin \pi y]$$

Выражение (1.8) подставим во второе из уравнений (1.6) и, решив его точно при граничных условиях (1.7), найдем возмущение температуры, соответствующее аппроксимации функции тока (1.8). Подставляя далее приближенные выражения для ψ и T , содержащие шесть коэффициентов c_0, \dots, c_5 , в первое из уравнений (1.6), умножая последовательно на все базисные функции и интегрируя по всей области, получим шесть уравнений метода Галеркина для определения шести коэффициентов c_i .

Опуская вычисления, приведем условие разрешимости этой однородной системы

$$\| a_{ik} - Rb_{ik} \| = 0 \quad (1.9)$$

где отличные от нуля элементы определителя равны

$$\begin{aligned} a_{11} &= 32\pi^4, \quad a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 28\pi^4, \quad a_{22} = a_{33} = 83\pi^4 \\ a_{23} &= a_{32} = 24\pi^4, \quad a_{44} = 179\pi^4, \quad a_{55} = 11635\pi^4, \quad a_{66} = 19800\pi^4 \\ b_{11} &= b_{12} = b_{21} = \frac{5}{8} - \frac{\text{th } \pi}{8\pi}, \quad b_{13} = b_{31} = b_{32} = b_{23} = \frac{3}{8} - \frac{\text{th } \pi}{40\pi} \\ b_{22} &= \frac{4}{5} - \frac{\text{th } \pi}{8\pi} - \frac{\text{th } 2\pi}{400\pi}, \quad b_{33} = \frac{21}{80} - \frac{\text{th } \pi}{200\pi}, \quad b_{44} = \frac{159}{65} - \frac{32 \text{ th } 1/2\pi}{25\pi} - \frac{32 \text{ th } 3/2\pi}{507\pi}, \\ b_{55} &= 36 - \frac{1024 \text{cth } \pi}{65\pi}, \quad b_{66} = 75 - \frac{24 \text{cth } 1/2 \pi}{\pi} - \frac{8 \text{cth } 3/2\pi}{\pi} \end{aligned}$$

Из характеристического условия (1.9) определяются шесть критических значений числа Рейля $R = GP$ и соответствующие им критические движения. Приведем четыре нижних критических значения числа R и функции тока возмущений

$$R_1 = 5099, \quad \psi_1 = u(x, y) (1 + 0.076 \cos 2\pi x - 0.132 \cos 2\pi y) \quad (1.10)$$

$$R_2 = 8495, \quad \psi_2 = u(x, y) \sin \pi x,$$

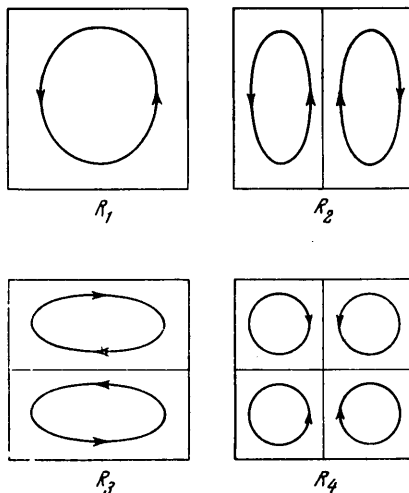
$$R_3 = 29260, \quad \psi_3 = u(x, y) \sin \pi y$$

$$R_4 = 30080, \quad \psi_4 = u(x, y) \sin \pi x \sin \pi y$$

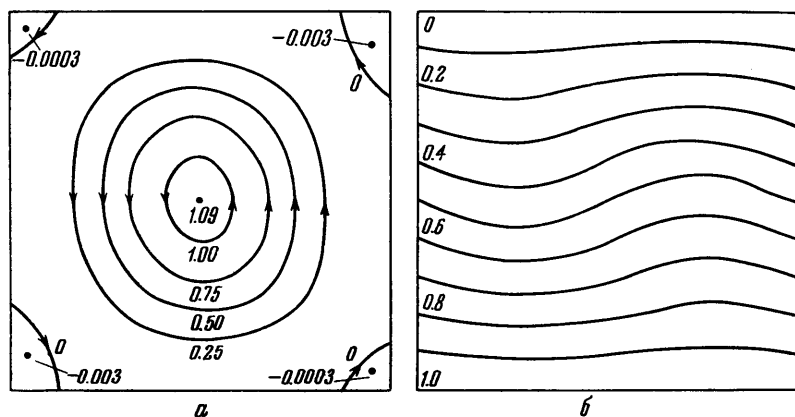
$$u(x, y) = (1 + \cos 2\pi x)(1 + \cos 2\pi y)$$

Собственные функции ψ_i ввиду однородности задачи определены с точностью до произвольного множителя. Критические движения, соответствующие первым четырем уровням спектра, схематически изображены на фиг. 2. Распределения температуры довольно громоздки и здесь не приводятся.

§ 2. Нелинейные стационарные движения. Границей устойчивости равновесия является нижнее критическое значение числа Рейля R_1 . При $R > R_1$ равновесие оказывается неустойчивым, малые возмущения нарастают и в жидкости возникает стационарное движение, форма и амплитуда которого должны быть найдены из нелинейных уравнений движения (1.1), (1.2). Эти нелинейные уравнения позволяют проследить за развитием во времени возмущений произвольного вида при различных значениях числа R или G .



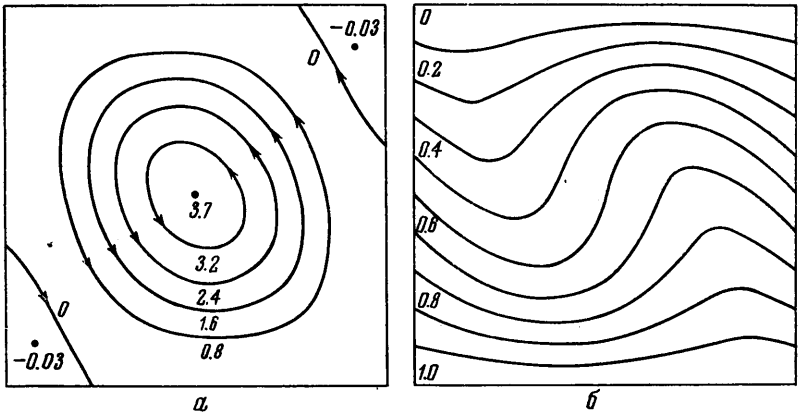
Фиг. 2



Фиг. 3

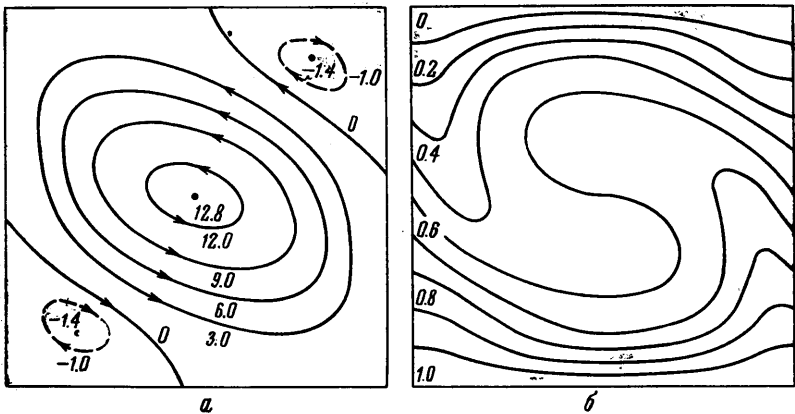
Для численного решения системы (1.1), (1.2) применялся метод сеток. Конечно-разностная форма уравнений и процедура решения описаны ранее [12]. Вычисления

проводились на ЭВЦМ «Арагац»; использовалась сетка 15×15 ; шаг по времени менялся в пределах $(0.25 - 1.0) \cdot 10^{-3}$; число Прандтля было фиксировано: $P = 1$. В начальный момент времени задавались возмущения скорости и температуры различного вида и наблюдался процесс установления стационарного режима при фиксированном



Фиг. 4

числе Грассхофа G . Наиболее быстрый выход на стационарный режим достигался в том случае, когда в качестве начального возмущения выбиралось движение, близкое по форме к основному критическому. Оказалось удобным, например, возбуждать сначала в полости движение при подогреве сбоку, а затем, «повернув» полость таким образом, чтобы получился вертикальный подогрев снизу, наблюдать при фиксированном числе G установление стационарного режима. Использовались и другие способы задания начальных распределений скорости и температуры. Длительность переходного процесса при разных условиях составляла $0.25 - 0.50$ единиц безразмерного времени.



Фиг. 5

Оказалось, прежде всего, что при значениях G , меньших некоторого критического G_1 , все начальные возмущения затухают и предельным стационарным режимом является равновесие. При $G > G_1$ начальные возмущения, развиваясь, переходят в стационарное движение. Меняя с малым шагом параметр G , можно получить зависимость максимального значения функции тока стационарного движения ψ_m от G . Если зависимость $\psi_m(G)$ экстраполировать на нулевое значение ψ_m , то можно довольно точно определить критическое значение G_1 , выше которого существуют стационарные движения. Определяемое в результате такого численного эксперимента пороговое число оказывается равным $G_1 = 5090 \pm 20$, что хорошо согласуется с найденным в линейной теории значением $G_1 = 5099$ (при $P = 1$ числа Грассхофа G и Релея R совпадают).

В интервале значений числа Грассхофа $5090 < G < 60\,000$ были получены стационарные решения для 25 значений числа G . На фиг. 3—5 представлены линии тока a и изотермы b для значений $G = 5.3 \cdot 10^3$; $8 \cdot 10^3$; $60 \cdot 10^3$. Приведенные фигуры позволяют проследить за развитием стационарного движения по мере увеличения разности температур. При $G = 5300$, близком к критическому значению G_1 , имеются медленное движение и почти горизонтальные изотермы. Форма движения близка к первому критическому ψ_1 . С ростом G движение становится более интенсивным а форма его значительно искажается. Овальные линии тока вытягиваются, а их большая ось наклоняется к вертикали. Увеличиваются также расположенные в двух углах области медленного попятного движения. Эти искажения связаны с нелинейными эффектами. В самом деле, как видно из линейных уравнений для критических движений (1.6), функция тока ψ_1 основного критического движения обладает свойством четности по отношению к отражениям $x \rightarrow -x$ и $y \rightarrow -y$. С учетом же нелинейных членов уравнения (1.1), (1.2) в стационарном случае обладают решениями, в которых функция тока ψ является четной лишь по отношению к инверсии; температура T , напротив, является нечетной функцией относительно инверсии.

С увеличением G намечается тенденция к образованию температурного пограничного слоя возле горизонтальных границ области и почти изотермического ядра (фиг. 5, 6).

Зная поле температуры при данном G , можно определить тепловой поток через полость. Количество тепла Q , переносимое через полость, равно

$$Q = -\kappa \int \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_\Gamma dl \tag{2.1}$$

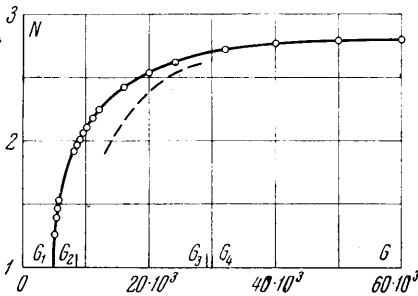
Здесь κ — коэффициент теплопроводности, $(\partial T / \partial n)_\Gamma$ — нормальная составляющая размерного градиента температуры на поверхности. Интегрирование в (2.1) проводится по тем участкам поверхности, где $(\partial T / \partial n)_\Gamma$ имеет один знак. Безразмерный параметр теплопередачи — число Нуссельта N — определим следующим образом:

$$Q / \kappa \Theta \equiv N(G) \tag{2.2}$$

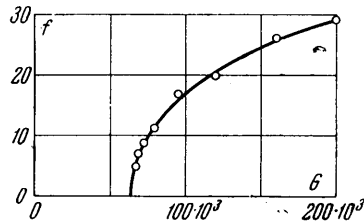
При $G < G_1$ происходит чисто теплопроводный перенос тепла и $N = 1$. При $G > G_1$ добавляется конвективный тепловой поток. Поэтому, величина $N - 1$ служит мерой интенсивности стационарного конвективного движения. На фиг. 6 представлена найденная численно зависимость $N(G)$ в интервале значений $0 < G < 60 \cdot 10^3$. При значениях числа Грассхофа, близких к критическому G_1 , в соответствии с законом Ландау имеет место корневая зависимость

$$N = 1 + 0.0179 (G - G_1)^{1/2} \tag{2.3}$$

справедливая примерно до $G = 1.5 G_1$.



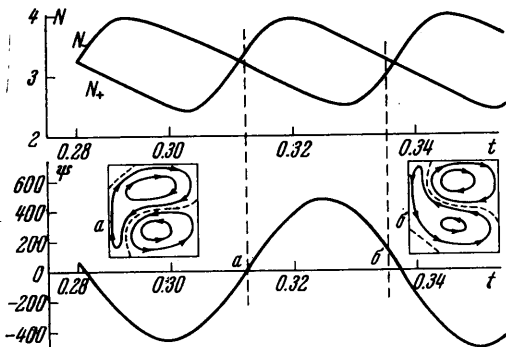
Фиг. 6



Фиг. 7

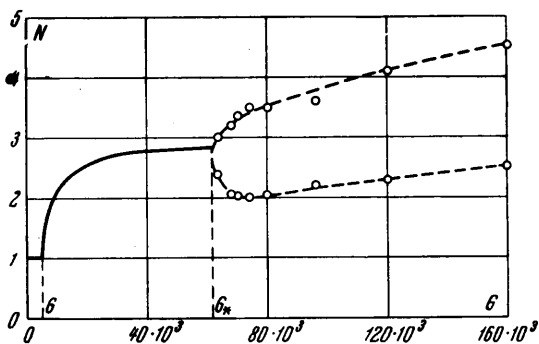
§ 3. Стационарные колебания. Описанные выше стационарные движения существуют лишь в интервале значений числа Грассхофа $5090 < G < 62\,000$. Значение $G_* = 62 \cdot 10^3$ является в некотором смысле критическим. При числах Грассхофа, превышающих это значение, переходный процесс приводит к установлению стационарных колебаний: при фиксированном $G > G_*$ в установившемся режиме значения функции тока и температуры в узлах сетки, тепловой поток и все другие параметры решения осциллируют около некоторых средних значений с определенной частотой. Проверочные вычисления с более мелкой сеткой (25×25), проведенные для некоторых G , показали, что частота и форма этих колебаний практически не зависят от шага сетки, а определяются лишь значением параметра G . Параметры колебаний не зависят также от шага по времени, числа итераций уравнения Пуассона и т. п. Это дает основания считать, что наблюдаемые стационарные колебания имеют физическую природу.

Возможно, возникновение этих колебаний есть результат кризиса устойчивости основного стационарного движения, рассмотренного выше¹.



Фиг. 8

Соответствующие значения чисел Нуссельта N_+ и N_- осциллируют около общего среднего значения, при этом кривые $N_+(t)$ и $N_-(t)$ повторяют друг друга со сдвигом по фазе. На одной части периода $N_+ > N_-$, т. е. тепло преимущественно вводится в полость на другой части периода, когда $N_- > N_+$, — выводится. Таким образом, перенос тепла через полость носит пульсирующий характер (автоколебания). На фиг. 8 приведен также график величины $\psi = \sum_{i,k} \psi_{i,k}$ — суммы значений функции тока в узлах сетки — и схе-



Фиг. 9

Как указывалось, описанные стационарные колебания имеют, по-видимому, физическую природу. Заметим в этой связи, что в экспериментах [13], относящихся к подогреваемому снизу плоскому горизонтальному слою воздуха, при числах Рейля $R > 6300$ (критическое число $R_1 = 1708$) наблюдались колебания, приходящие на смену стационарным ячейкам Бенара. Если по данным работы [13] построить зависимость частоты колебаний от числа Рейля, то получается кривая, близкая по форме к изображенной на фиг. 7. Авторы работы [13] рассматривают появление колебаний как начальную фазу турбулизации стационарного ячеистого движения.

§ 4. Мегастабильные движения. Стационарное движение, обсужденное в § 2, существует при $G > G_1$ и является результатом нелинейного развития основного критического движения ψ_1 . В области $G_1 < G < G_*$ это стационарное движение устойчиво; оно устанавливается как предельное состояние для произвольного начального возмущения. Можно думать, что существуют и другие стационарные движения, «выходящие» из более высоких критических значений G_2, G_3 и т. д. Была предпринята попытка получить «второе» стационарное движение (типа ψ_2). С этой целью задавалось начальное рас-

Частота стационарных колебаний, возникающих при $G > G_*$, монотонно растет при увеличении G . На фиг. 7 изображена зависимость частоты колебаний $f = 1/\tau$ (τ — период колебаний) в единицах обратного безразмерного времени от числа Грассхофа. При G , близких к G_* , для установления стационарных колебаний требуется время порядка нескольких единиц безразмерного времени.

На фиг. 8 для примера приводятся некоторые данные о форме колебаний при $G = 120 \cdot 10^3$. В режиме стационарных колебаний в произвольный момент времени тепловой поток, входящий в полость, отличается от теплового потока, выходящего из полости.

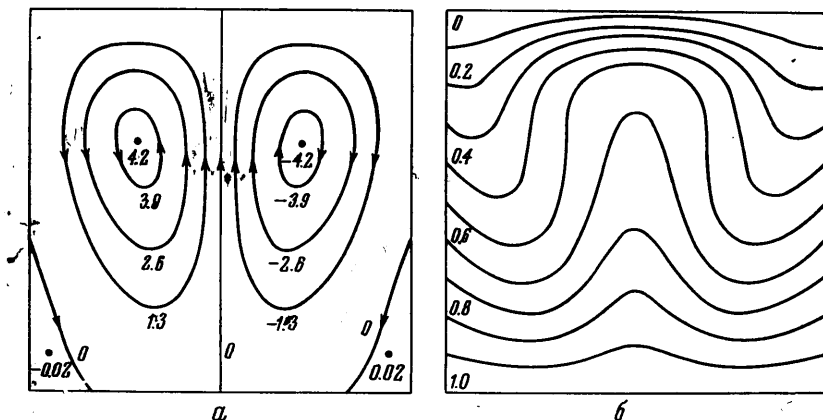
матически изображены движения, соответствующие отдельным моментам цикла.

На фиг. 9 приведены сводные данные по тепловому потоку через полость для стационарных движений и стационарных колебаний. В области $G > G_*$ точками изображены максимальные (верхняя линия) и минимальные (нижняя линия) значения числа Нуссельта N . Разброс точек на фиг. 7 и 9 связан с тем, что из-за недостатка машинного времени не всегда удавалось достичь полной стационарности колебаний и получить достаточное число полных периодов.

¹ Заметим, что если исходить из конечно-разностной схемы, в которой нелинейные члены записаны не в виде центральных разностей, как в настоящей работе, а с использованием «левых» и «правых» производных (см., например, [10]), то колебания начинаются при более высоких значениях G . Такие расчёты в настоящее время производятся.

пределение функции тока в виде симметричной пары встречных вихрей (типа ψ_2 , см. фиг. 2, б). Как правило, в результате развития такого начального возмущения получалось основное стационарное движение. Однако, в интервале $14 \cdot 10^3 < G < 28 \cdot 10^3$ в результате переходного процесса устанавливалось нелинейное движение типа ψ_2 (см. фиг. 10, $G = 10 \cdot 10^3$, где изображены линии тока и изотермы при $G = 20 \cdot 10^3$).

Движения этого типа в указанном интервале G существуют довольно долго, — во всяком случае, в течение промежутков времени, значительно больших времени переходного процесса. Однако эти движения нельзя считать строго стационарными: с течением времени наступают колебания интенсивности обоих вихрей, и движение этого вида



Фиг. 10

разрушается, переходя в основное. Относительно более устойчивым это движение является при $G \approx 20 \cdot 10^3$, т. е. в середине указанного интервала; на краях интервала разрушение происходит довольно быстро, а за пределами этого интервала получить движение такого типа практически не удается. По-видимому, следует считать, что «второе» движение является метастабильным.

Интересно заметить, что перенос тепла через полость в режиме метастабильного движения оказывается меньшим, чем в случае основного движения (отрезок пунктирной линии на фиг. 6).

Поступило 18 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА]

1. Сорокин В. С. О стационарных движениях жидкости, подогреваемой снизу. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
2. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. Докл. АН СССР, 1944, т. 44, № 8.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1953.
4. Горьков Л. П. Стационарная конвекция в плоском слое жидкости вблизи критического режима теплопередачи. Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 33, № 2(8).
5. Malkus W., Veronis G. Finite amplitude Cellular convection. J. Fluid Mech., 1958, vol. 4, p. 3.
6. Kuo H. L. Solution of the nonlinear equations of cellular convection and heat transport. J. Fluid Mech., 1961, vol. 10, 611.
7. Kuo H. L., Platzman G. W. A normal mode nonlinear solution of the Rayleigh convection problem. Beitr. Phys. Atmosph. 1961, vol. 33, No 3—4.
8. Bisschopp F. E. Nonlinear effects in thermal convection. J. Math. and Mech. 1962, vol. 11, No. 5.
9. Deardorff I. W. A numerical study of twodimensional parallel plate convection. J. Atmosph. Sci., 1964, vol. 21, No 4.
10. Fromm J. E. Numerical solutions of the nonlinear equations for a heated fluid layer. Phys. Fluids., 1965, vol. 8, No 10.
11. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
12. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, № 5.
13. Willis G. E., Deardorff J. W. Measurements of thermal turbulence in air between horizontal plates. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No 12.