ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА СИСТЕМОЙ ВИХРЕЙ

В. И. КЛЯЦКИН

(Москва)

Рассматривается излучение звука в слабо сжимаемой среде элементарными вихревыми образованиями — двумя вихревыми нитями с одинаковыми интенсивностями, излучающих цилиндрические волны, и двумя вихревыми кольцами с одинаковыми интенсивностями, излучающих сферические волны. Показано, что в первом случае интенсивность звука пропорциональна M^4, где $M = \varkappa/2hc$ — число Маха ($\varkappa$ — интенсивность вихря, $2h$ — расстояние между вихрями, а c — скорость звука). Во втором же случае в системе координат, связанной с вихревыми кольцами, интенсивность звука пропорциональна M^5, что совпадает с результатами Лайтхилла [1, 2].

1. Турбулентное движение жидкости в некоторой области пространства в сжимаемой среде излучает акустические волны. Так как турбулентное движение сохраняет основные черты вихревого движения, то представляет интерес рассмотреть структуру поля звука, излучаемого системой вихрей. Простейшими вихревыми системами, излучающими звук, будут две вихревые нити с одинаковыми интенсивностями, излучающие цилиндрические волны, и два вихревых кольца с одинаковыми интенсивностями, излучающие сферические волны. Настоящая работа посвящена расчету излучения звука двумя вихревыми нитями и двумя вихревыми кольцами, чтобы на примере этих элементарных вихревых образований изучить характер излучаемого ими звука.

В работах [1,2] было показано, что поле звука таково, как будто бы оно производится статистическим распределением акустических квадруполей с мгновенной «мощностью» на единицу объема для слабо сжимаемой среды, равной $T_{ij} = \rho_0 u_i u_j$, где ρ_0 — средняя плотность, u_i — флуктуации скорости (рассматривается однородная турбулентность в системе координат, в которой отсутствует перемещение среды как целой). Уравнение для флуктуаций плотности ρ имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - c^2\Delta\rho = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i\,\partial x_j} \tag{1.1}$$

Здесь c — скорость звука в однородной среде вне турбулентной области. Решение уравнения (1.1) на расстояниях, много больших линейных размеров турбулентной области, можно представить в виде

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c^4}\frac{x_i x_j}{x^3}\int \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij}\left(\mathbf{y},\, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right) d\mathbf{y} \tag{1.2}$$

Тогда для средней плотности потока энергии $q = c^3 \langle \rho^2 \rangle / \rho_0$ получаем [1]

$$q = \frac{1}{16\pi^2 c^5 \rho_0}\frac{x_i x_j x_k x_e}{x^6}\int\left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij}\left(\mathbf{y},\, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ke}\left(\mathbf{z},\, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{z}|}{c}\right)\right\rangle d\mathbf{y}\, d\mathbf{z} \tag{1.3}$$

Дальнейшие упрощения, проводимые в работах [2,3], заключаются в следующем. Плотность потока энергии акустических волн, излучаемым элементом $d\mathbf{y}$, пропорциональна объемному интегралу по всей турбулентной области. Если ввести радиус корреляции поля скорости D и описать вокруг элемента $d\mathbf{y}$ сферу этим радиусом, то можно полагать, что корреляция падает от максимального значения при $\mathbf{z} = \mathbf{y}$ до пренебрежимо малого значения вне сферы. Разность времен запаздывания меньше D / c, и этим интервалом времен можно пренебречь по сравнению со временем турбулентных пульсаций (т. е. размеры вихрей малы по сравнению с длиной звуковой волны). Считая, что корреляции T_{ij} в двух точках выбранного объема совпадают с корреляциями T_{ij}, одна из точек которой находится в центре объема, можно переписать (1.3) в виде (1.4)

$$q = \frac{1}{16\pi^2 c^5 \rho_0} \frac{x_i x_j x_k x_e}{x^6} \int \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij}\left(0, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ke}\left(\mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{c}\right)\right\rangle d\mathbf{y}\, d\mathbf{z}$$

Если пренебречь запаздыванием в (1.4), то, опуская интегрирование по $\mathbf{y}$, получаем для плотности потока энергии, приходящейся на единицу объема, выражение

$$W = \frac{1}{16\pi^2 c^5 \rho_0} \frac{x_i x_j x_k x_e}{x^6} \int \left\langle \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij}(0, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ke}(\mathbf{z}, t)\right\rangle d\mathbf{z} \qquad (1.5)$$

В работе [3] при помощи гипотезы квазинормальности и гайзенберговского спектра для поля скорости было получено для мощности акустического излучения выражение

$$P = 38\rho_0 \varepsilon M^5, \qquad M = \langle u^2 \rangle^{1/2} / c \qquad (1.6)$$

Здесь M — число Маха (существенно меньшее единицы), а ε — диссипируемая энергия в единицу времени в единице массы. Выражение (1.6) получено при существенном предположении справедливости выражения (1.5), т. е. возможности пренебрежения запаздыванием в (1.4). В общем случае необходимо знать пространственно-временные корреляционные функции скорости, которые современное состояние теории турбулентности дать не может. Отметим также, что аналогичный подход к излучению звука пограничным слоем развивался в работе [4].

2. Рассмотрим две параллельные вихревые нити с одинаковыми интенсивностями $\varkappa = {}^1/_2\pi\xi\sigma$ (где ξ — величина вихря, равномерно распределенного по площади бесконечно малого сечения σ, т. е. циркуляция вокруг вихревой нити равна $\Gamma = 2\pi\varkappa$), расположенные на расстоянии $2h$ одна от другой. Эти вихревые нити будем называть просто вихрями. В несжимаемой жидкости эти вихри вращаются относительно точки, расположенной посредине соединяющей их прямой, с угловой скоростью [5]

$$\omega = {}^1/_2\varkappa / h^2 \qquad (2.1)$$

Выберем систему координат с началом в неподвижной точке и осью z, направленной вдоль вихревой нити. Тогда для потенциала скорости движения $\mathbf{v}_0 = -\operatorname{Re} \nabla\varphi_0$ и квадрата скорости имеем [4]

$$\varphi_0 = i\varkappa \ln\left[r^2 e^{2i\theta} - h^2 e^{2i\omega t}\right] \qquad v_0^2 = \frac{4\varkappa^2 r^2}{r^4 + h^4 - 2r^2 h^2 \cos 2(\omega t - \theta)} \qquad (2.2)$$

Здесь $r \exp i\theta$ — радиус-вектор точки наблюдения. Согласно уравнению Бернулли, локальные пульсации скорости, описываемые (2.2), должны создавать соответствующие пульсации давления, которые в случае слабо сжимаемой среды, а именно, при $M \ll 1$ (где $M = {}^1/_2\varkappa / hc$ — число Маха, c — скорость звука) будут распространяться на больших расстояниях от вихрей в виде звуковых волн.

Окружим начало координат окружностью радиуса R такой, что $h \ll R \ll \lambda$, где λ — длина звуковой волны [1]. В области $r < R$ динамика жидкости приближенно совпадает с динамикой жидкости, рассматривае-

[1] Заметим, что $\lambda/h = \pi/M \gg 1$ при $M \ll 1$.

мой как несжимаемая, а в области $r > R$ уравнения движения будут обычными уравнениями акустики [6]

$$\partial^2\varphi / \partial t^2 - c^2 \Delta\varphi = 0, \qquad p' = \rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} \tag{2.3}$$

Здесь φ — потенциал скорости движения в акустической волне, p' — давление в ней, а ρ_0 — плотность жидкости. Учитывая, что v_0 зависит от t и θ только в комбинации $2(\omega t - \theta)$, будем искать решение уравнения (2.3) в виде

$$\varphi = f(r) \exp\{2i(\omega t - \theta)\} \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и решая уравнение для f с условием излучения волн, получаем

$$\varphi = AH_2^{(2)} \ (2\omega r / c) \exp\{2i(\omega t - \theta)\} \tag{2.5}$$

Здесь $H_2^{(2)}$ — функция Ганкеля второго рода, A — некоторая постоянная. В случае $r \gg c / 2\omega$ имеем обычную расходящую цилиндрическую волну с длиной волны $\lambda = \pi c / \omega$

$$\varphi = A \left(\frac{c}{\pi\omega r}\right)^{1/2} \exp\{2i(\omega t - \omega r / c - \theta - 3 / 8\pi)\} \tag{2.6}$$

В случае $r \ll \lambda$ получаем

$$\varphi = i\frac{A}{\pi}\left(\frac{c}{\omega r}\right)^2 \exp\{2i(\omega t - \theta)\} \tag{2.7}$$

Учитывая, что в области $h \ll r \ll \lambda$ потенциал φ должен совпадать с переменной частью φ_0, которая равна

$$\varphi_0^{(1)} = -i\varkappa \frac{h^2}{r^2} \exp\{2i(\omega t - \theta)\}$$

получаем для постоянной величины $A = -\pi\varkappa M^2 = -{}^1/_4\pi\varkappa^3 / h^2c^2$.

Следовательно, потенциал φ в волновой зоне имеет вид

$$\varphi = -\varkappa M^{3/2} (\pi h / r)^{1/2} \exp\{2i(\omega t - \omega r / c - \theta - {}^3/_8\pi)\} \tag{2.8}$$

Из (2.8) при помощи (2.3) находим давление в звуковой волне

$$p' = -2\varkappa\omega\rho_0 M^{3/2} (\pi h / r)^{1/2} \exp\{2i(\omega t - \omega r / c - \theta - {}^3/_8\pi)\} \tag{2.9}$$

Для интенсивности звука (энергии, излучаемой в единицу времени), интегрируя по окружности радиуса $r \gg \lambda$, получаем

$$I = 1 / \rho_0 c \int \langle p'^2 \rangle \, dl = 2\pi^2 \rho_0 M^4 \varkappa^3 / h^2 \tag{2.10}$$

Эта излучаемая энергия должна поступать из энергии взаимодействия вихрей, находящихся в области $r < R$. Полная энергия, заключенная в области $r < R$, равна

$$E = \frac{\rho_0}{2} \int v_0^2 \, dS \tag{2.11}$$

Подставляя (2.2) в (2.11) и исключая бесконечные энергии, соответствующие энергии движения самих вихрей (так как считаем вихри точечными), получаем для энергии взаимодействия

$$E_1 = 4\pi\varkappa^2 \rho_0 \ln(R / h) \tag{2.12}$$

Изменение энергии взаимодействия может происходить только за счет изменения расстояния между вихрями, так как циркуляция сохраняется, поскольку рассматривается невязкая среда.

Дифференцируя (2.12) по времени, получаем изменение энергии

$$I = -4\pi\rho_0 \frac{\varkappa^2}{h} \frac{dh}{dt} \qquad (2.13)$$

которое и переходит в энергию акустических волн. Из (2.10) и (2.13) получаем для скорости разбегания вихрей уравнение

$$dh/dt = {}^1/_2 \pi\varkappa M^4/h \qquad (2.14)$$

Интегрируя (2.14) с учетом того, что $M = \varkappa / 2hc$, получаем

$$h(t) = h_0 [1 + 6\pi M_0{}^4 \omega_0 t]^{1/6} \qquad (2.15)$$

Таким образом, интенсивность излучаемого звука $I \sim M^4$. В случае статистически распределенной системы пар вихревых нитей на некоторой части плоскости эта оценка, очевидно, не изменяется.

3. В несжимаемой жидкости вихревое кольцо с интенсивностью $\varkappa$ вызывает движение жидкости со скоростью, согласно закону Био-Савара [5], равной

$$\mathbf{v} = \frac{\varkappa}{2} a \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} d\varphi \qquad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{s}$ — единичный вектор касательной к вихревому кольцу, совпадающий по направлению с вектором вихря; a — радиус кольца; $\mathbf{r}$ — вектор, характеризующий положение точки наблюдения относительно точек на кольце. В цилиндрических координатах с началом в центре кольца и осью z, направленной вдоль оси кольца, получаем

$$v_R = \frac{\varkappa}{2} za \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r^3} d\varphi, \quad v_\theta = 0, \quad v_z = \frac{\varkappa}{2} a \int\limits_0^{2\pi} \frac{a - R\cos\varphi}{r^3} d\varphi \qquad (3.2)$$

$$r = (R^2 + z^2 + a^2 - 2Ra\cos\varphi)^{1/2}$$

Здесь радиус-вектор точки наблюдения имеет координаты (R, θ, z)

Пусть теперь имеются два вихревых кольца с одинаковыми интенсивностями одинаковых радиусов a_0, находящиеся на расстоянии $2h_0$ одно от другого. В этом случае переднее кольцо начнет увеличиваться в размерах, заднее же — уменьшаться и будет догонять переднее. В некоторый момент времени оно пройдет сквозь переднее, и кольца поменяются местами. В слабо сжимаемой среде эти движения колец создают локальные сжатия и разрежения среды, которые на больших расстояниях будут распространяться в виде сферических акустических волн. Для определения структуры излучаемого звука необходимо знать движение одного кольца относительно другого в несжимаемой жидкости. Пусть в некоторый момент времени t кольца имеют радиусы a_1 и a_2 соответственно и находятся на расстоянии $2h$ друг от друга. Скорости изменения радиусов колец равны радиальным скоростям, индуцированным кольцами друг на друга, а скорость изменения расстояния между кольцами равна разности z компонент скоростей, индуцированных кольцами. Следовательно,

$$\frac{da_1}{dt} = 2\varkappa a_2 h \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos\varphi}{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|^3} d\varphi, \quad \frac{da_2}{dt} = -2\varkappa a_1 h \int\limits_0^{\pi} \frac{\cos\varphi}{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|^3} d\varphi$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\varkappa}{2}(a_1{}^2 - a_2{}^2) \int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2|^3} \qquad (3.3)$$

$$|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2| = (a_1{}^2 + a_2{}^2 + 4h^2 - 2a_1 a_2 \cos\varphi)^{1/2}$$

Уравнения (3.3) надо решать с начальными условиями

$$a_1 = a_2 = a_0, \qquad h = h_0 \quad \text{при } t = 0 \qquad (3.4)$$

Первые два уравнения сразу дают связь между a_1 и a_2, а именно,

$$a_1^2 + a_2^2 = 2a_0^2 \tag{3.5}$$

которая показывает, что сохраняется момент инерции колец относительно оси z. Интегралы, входящие в правую часть (3.3), выражаются через эллиптические функции. Если кольца находятся далеко друг от друга ($\gamma = h_0 / a_0 \gg 1$), то их взаимодействие мало, и они движутся в первом приближении независимо друг от друга с постоянной скоростью, определяемой размером сечения колец. В другом предельном случае ($\gamma \ll 1$), который и будет изучаться, кольца активно взаимодействуют. Основной вклад в интегралы, входящие в правую часть (3.3), вносит окрестность точки $\varphi = 0$. Поэтому можно заменить в первых двух уравнениях $\cos\varphi$, входящий в числитель, на единицу. Тогда получаем интеграл

$$(2h)^2 + (a_1 - a_2)^2 = (2h_0)^2 \tag{3.6}$$

Интеграл (3.6) означает, что сохраняется величина расстояния между точками на разных кольцах, имеющими один и тот же полярный угол. Существование интегралов (3.5) и (3.6) позволяет свести систему (3.3) к одному уравнению относительно переменной θ, вводимой согласно равенствам (3.7)

$$a_1 = \sqrt{2}\,a_0 \cos(^1/_4\,\pi - \gamma\sin\theta), \quad a_2 = \sqrt{2}\,a_0 \sin(^1/_4\,\pi - \gamma\sin\theta) \quad h = h_0\cos\theta$$

Тогда (в первом порядке по γ) законы сохранения (3.5) и (3.6) будут автоматически выполняться. Подставляя (3.7) в (3.3), разлагая $\cos\varphi$ в ряд и вычисляя интеграл, получаем

$$\theta = {}^1/_2\varkappa t/h_0^2 \tag{3.8}$$

Следовательно, для радиусов колец и расстояния между ними имеем

$$a_1 = a_0(1 + \gamma\sin\omega t), \quad a_2 = a_0(1 - \gamma\sin\omega t), \quad h = h_0\cos\omega t \tag{3.9}$$

$$\omega = {}^1/_2\varkappa / h_0^2 \tag{3.10}$$

Отметим, что бесконечно тонкие кольца движутся с бесконечно большой скоростью. Реальные же вихревые кольца движутся с конечной скоростью, много меньшей скорости звука, а динамика движения колец друг относительно друга мало чем отличается от рассмотренной выше. Совпадение (3.10) с (2.1) показывает, что точки на кольцах, имеющие один и тот же полярный угол, вращаются относительно точки, находящейся посредине прямой, их соединяющей, с той же частотой, что и вихревые нити, находящиеся на том же расстоянии с теми же интенсивностями, что и кольца.

Для изучения структуры излучаемого нашей системой звука необходимо знать поле скоростей на больших расстояниях от колец. Свяжем систему координат с точкой, находящейся посредине между кольцами на их общей оси. Скорость движения жидкости вне колец равна

$$\mathbf{v} = \frac{\varkappa}{2} a_1 \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_1}{r_1^3} d\varphi + \frac{\varkappa}{2} a_2 \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{s}_2 \times \mathbf{r}_2}{r_2^3} d\varphi$$

Здесь $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ — единичные векторы, касательные к вихревым кольцам, а r_1, r_2 — векторы, характеризующие положение точки наблюдения относительно точек на кольцах. На больших расстояниях от колец в цилиндрических координатах переменные части скорости имеют вид

$$\begin{aligned} v_R^{(1)} &= \frac{3}{4}\varkappa \frac{R(4z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^{7/2}} h(a_1^2 - a_2^2), \quad v_\theta^{(1)} = 0 \\ v_z^{(1)} &= \frac{3}{4}\varkappa \frac{z(2z^2 - 3R^2)}{(R^2 + z^2)^{7/2}} h(a_1^2 - a_2^2) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Вводя потенциал $\mathbf{v}^{(1)} = -\nabla\varphi^{(1)}$, получаем

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\varkappa}{4} h(a_1^2 - a_2^2)\frac{R^2 - 2z^2}{(R^2+z^2)^{5/2}} \tag{3.12}$$

Подставляя (3.9) в (3.12) и переходя к сферическим координатам, можно (3.12) переписать в комплексном виде

$$\varphi^{(1)} = i\frac{\varkappa}{2} a_0^3\gamma^2 \frac{1 - 3\cos^2\theta}{r^3}\exp 2i\omega t \tag{3.13}$$

Далее будем действовать аналогично случаю двух вихревых нитей. Окружим начало координат сферой радиуса R такой, что $a_0 \ll R \ll \lambda$, где λ — длина волны излучаемых звуковых волн. Будем пользоваться тем, что внутри сферы приближенно движение жидкости совпадает с движением несжимаемой жидкости. Вне сферы уравнения движения будут иметь вид (2.3) с той лишь разницей, что теперь Δ — пространственный оператор Лапласа. Представим потенциал φ в виде $\varphi = f(r, \theta)\exp 2i\omega t$.

Подставляя это выражение φ в (2.3) и учитывая, что при $r \gg \lambda$ должны быть расходящиеся сферические волны, получаем для $f(r, \theta)$ выражение

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{\sqrt{r}} H^{(2)}_{n+1/2}(2\omega r / c) P_n(\cos\theta) \tag{3.14}$$

Здесь $H^{(2)}_{n+1/2}$ — функция Ганкеля второго рода, а P_n — полином Лежандра. Сравнивая φ для $r \ll \lambda$ с $\varphi^{(1)}$, получаем, что $n = 2$, и постоянная

$$A_2 = \frac{2\sqrt{\pi}}{3}\varkappa\gamma^2 a_0^3\omega^{5/2}/c^{5/2} \tag{3.15}$$

Следовательно, в волновой зоне потенциал и давление имеют вид

$$\varphi = \frac{2}{3}\varkappa\left(\frac{\varkappa}{2h_0 c}\right)^2\frac{a_0}{r}(1 - 3\cos^2\theta)\exp\left\{2i\left(\omega t - \frac{\omega r}{c} - \frac{3\pi}{4}\right)\right\} \tag{3.16}$$

$$p' = \frac{4i}{3}\varkappa\left(\frac{\varkappa}{2h_0 c}\right)^2\frac{a_0\omega}{r}\rho_0(1 - 3\cos^2\theta)\exp\left\{2i\left(\omega t - \frac{\omega r}{c} - \frac{3\pi}{4}\right)\right\} \tag{3.17}$$

и для распределения по углам излучаемой энергии за единицу времени получаем

$$I(\theta) = \frac{8}{9}\pi\frac{\varkappa^3 a_0^2}{h_0^3}\left(\frac{\varkappa}{2h_0 c}\right)^5\rho_0(1 - 3\cos^2\theta)^2 \tag{3.18}$$

Излучение энергии вихревыми кольцами носит квадрупольный характер, и основная часть энергии излучается в конусе с осью z с углом раствора 106° как в положительном направлении z, так и в отрицательном. Интегрируя по θ, получаем для полной энергии за единицу времени.

$$I = \frac{64}{45}\pi\frac{\varkappa^3 a_0^2}{h_0^3}\rho_0\left(\frac{\varkappa}{2h_0 c}\right)^5 \tag{3.19}$$

Таким образом, интенсивность звука, излучаемого двумя вихревыми кольцами, $\sim M^5$. В случае статистически распределенной системы пар вихревых колец в некоторой части пространства интенсивность звука также будет $\sim M^5$, что согласуется с оценками [1-3].

В заключение благодарю А. М. Обухова за постановку задачи и обсуждение результатов.

Поступило 2 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. I. General theory. Proc. Roy. Soc. A. 1952, vol. 211, No 1107
2. Lighthill M. J. On sound generated aerodynamically. II. Turbulence as a source of sound. Proc. Roy. Soc. A 1954, vol. 222, N 1148
3. Proudman I. The generation of noise by isotropic turbulence Proc. Roy. Soc. A 1952, vol. 214, No. 1116
4. Phillips O. M. On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers, J. Fluid Mech. 1960, 9, No. 1
5. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидромеханика. Изд. «Мир», 1965.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.