ПРОИЗВОЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРОДОЛГОВАТОГО ТЕЛА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. МАСЛОВ

(Москва)

Рассматривается метод, позволяющий при помощи электронной вычислительной машины рассчитывать скорости жидкости на поверхности и присоединенные массы твердого тела, движущегося в идеальной жидкости. На случай произвольного тела распространен метод [1, 2], разработанный для тел вращения, в котором течение моделируется системой источников и стоков, непрерывно распределенных по поверхности тела. В отличие от аналогичной работы Эсса и Смита [3], где определялись скорости жидкости на поверхности произвольного тела при поступательных движениях, основное интегральное уравнение задачи в данном случае решается методом последовательных приближений без предварительной аппроксимации его системой линейных алгебраических уравнений большого порядка, что приводит к сокращению вычислений.

Результаты расчетов сравниваются с известными точными значениями скоростей и присоединенных масс для трехосного эллипсоида, а также с результатами экспериментального определения давлений на поверхности продолговатого тела.

1. Основные соотношения. Если V_1, V_2, V_3 — проекции вектора поступательной скорости V полюса A твердого тела, а Ω_1, Ω_2, Ω_3 — проекции вектора угловой скорости Ω на связанные с телом оси координат xyz (фиг. 1), то для потенциала возмущенных скоростей жидкости можно записать

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^{6} V_i(t)\, \Phi_i(x, y, z)$$

Здесь введены обозначения (l — длина тела)

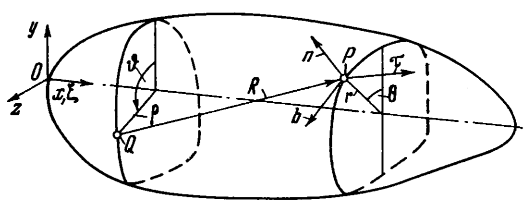
$$V_4 = l\Omega_1, \qquad V_5 = l\Omega_2, \qquad V_6 = l\Omega_3$$

Для определения каждого из шести единичных потенциалов $\Phi_i\,(x,y,z)$ требуется решить внешнюю задачу Неймана

$$\Delta\Phi_i = 0 \qquad \left.\frac{\partial\Phi_i}{\partial n}\right|_s = \frac{\mathbf{V}_i\cdot\mathbf{n}}{V_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6) \tag{1.1}$$

с нулевыми условиями на бесконечности. Здесь V_i — скорость точек поверхности тела в соответствующем простом движении, S — поверхность, ограничивающая твердое тело, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности S, направленная внутрь жидкости. Если решение искать в виде потенциала простого слоя

$$\Phi_i(P) = -\iint_s \mu_i(Q)\frac{dS}{R} \tag{1.2}$$



Фиг. 1

то граничное условие (1.1) приводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно интенсивности слоя μ

$$2\pi\mu_i(P) + \iint_s \mu_i(Q)\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}(P)}{R^3}dS = \mathbf{V}_i(P)\cdot\mathbf{n}(P) \tag{1.3}$$

где P — произвольная расчетная точка, Q — текущая точка поверхности S, вектор $\mathbf{R} = \mathbf{QP}$. Уравнение (1.3) имеет единственное решение, если поверхность S принадлежит к классу Ляпунова [4].

Продольная ось x декартовой системы координат xyz с ортами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ проводится между наиболее удаленными точками тела. Начало координат помещается в носке тела. Наряду с декартовой системой, рассматривается система цилиндрических координат x, r, θ ($y = r\cos\theta$, $z = r\sin\theta$). Расчетной точке P присваиваются координаты x, r, θ, текущей точке Q — координаты ξ, ρ, ϑ. Вектор

$$\mathbf{R} = (x - \xi)\,\mathbf{i} + (r\cos\theta - \rho\cos\vartheta)\,\mathbf{j} + (r\sin\theta - \rho\sin\vartheta)\,\mathbf{k}$$

Если полюс A выбрать на оси x на расстоянии x_A от носка тела, то для скорости точек поверхности тела при его произвольном движении можно записать

$$\mathbf{V} = [V_5\, r\sin\theta - V_6 r\cos\theta - V_1]\mathbf{i} +$$
$$+ [V_6\,(x - x_A) - V_4 r\sin\theta - V_2]\,\mathbf{j} + [V_4 r\cos\theta - V_5\,(x - x_A) - V_3]\,\mathbf{k}$$

где линейные размеры отнесены к длине тела l, а положительными направлениями компонентов поступательной скорости считают направления, обратные направлениям осей x, y, z (фиг. 1).

Поверхность тела задается в виде зависимости

$$r = r\,(x, \theta) \tag{1.4}$$

Элемент поверхности S равен

$$dS = r\sqrt{1 + p^2 + q^2}\,dx d\theta, \qquad p = \frac{\partial r}{\partial x}, \qquad q = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \theta} \tag{1.5}$$

В каждой точке поверхности тела вводится связанная с этой точкой система прямоугольных координат, единичные векторы которой равны

$$\mathbf{n} = [1 + p^2 + q^2]^{-1/2}\;[-p\mathbf{i} + (q\sin\theta + \cos\theta)\,\mathbf{j} - (q\cos\theta - \sin\theta)\,\mathbf{k}]$$

$$\boldsymbol{\tau} = [(1 + p^2 + q^2)\,(1 + q^2)]^{-1/2}\;[(1 + q^2)\mathbf{i} + p\,(q\sin\theta + \cos\theta)\,\mathbf{j} - p\,(q\cos\theta - \sin\theta)\,\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{b} = [1 + q^2]^{-1/2}\;[(q\cos\theta - \sin\theta)\,\mathbf{j} + (q\sin\theta + \cos\theta)\,\mathbf{k}]$$

При этом вектор $\mathbf{n}$ — нормаль, вектор $\mathbf{b}$ совпадает с линией пересечения касательной плоскости и поперечной плоскости $x = \text{const}$, вектор $\boldsymbol{\tau}$ имеет положительную и не равную нулю проекцию на продольную ось x, в связи с чем проекции скорости на ось τ можно назвать продольными, на ось b — поперечными.

В связи с выбранной формой (1.4) и (1.5) представления поверхности на нее накладываются ограничения. Так должны отсутствовать касательные к поверхности плоскости, перпендикулярные к оси x (p ограничено), кроме концевых точек, и касательные плоскости, проходящие через ось x (qr ограничено). В концевых точках, где $r \to 0$, qr ограничено, допускается $p \to \infty$, при условии ограниченности предела произведения pr в любом меридиональном сечении $\theta = \text{const}$. Геометрически это значит, что плоскости, проведенные через концевые точки перпендикулярно к оси x, имеют с поверхностью тела лишь одну точку касания — концевую. Вообще говоря, поверхность большинства применяемых тел удовлетворяет указанным требованиям.

Вместо интенсивности простого слоя μ_i в каждом простом движении вводятся новые функции g_i, связанные с μ_i соотношениями

$$g_i = 2\pi r \sqrt{1 + p^2 + q^2}\mu_i / V_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

После элементарных преобразований интегральное уравнение (1.3) для каждого простого движения приводится к виду

$$g_i(x, \theta) = f_{i0}(x, \theta) - \int_0^1\int_0^{2\pi} g_i(\xi, \vartheta) K_0(x, \theta, \xi, \vartheta)\, d\xi\, d\vartheta \tag{1.6}$$

где K_0 — ядро уравнений, не зависящее от типа движения

$$K_0 = \frac{r\,[r - p\,(x - \xi) - \rho\cos(\theta - \vartheta) - q\rho\sin(\theta - \vartheta)]}{2\pi\,[(x - \xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \vartheta)]^{3/2}}$$

а для известных функций $f_{i0}(x, \theta)$ введены обозначения

$$\begin{gathered} f_{10} = pr, \qquad f_{20} = -\,r\,(q\sin\theta + \cos\theta), \qquad f_{30} = r\,(q\cos\theta - \sin\theta) \\ f_{40} = -qr^2, \quad f_{50} = r[q\,(x - x_A)\cos\theta - (pr + x - x_A)\sin\theta] \\ f_{60} = r\,[q\,(x - x_A)\sin\theta + (pr + x - x_A)\cos\theta] \end{gathered} \tag{1.7}$$

На конце тела, при стремлении x к нулю или единице, уравнение (1.6) упрощается. Например, для $x = 1$ можно записать

$$g_i(1, \theta) = \lim_{x\to 1}(pr)\left\{C_{i0} + \int_0^1\int_0^{2\pi} g_i(\xi, \vartheta)\,\frac{(1 - \xi)\,d\xi\,d\vartheta}{2\pi[(1 - \xi)^2 + \rho^2]^{3/2}}\right\} \tag{1.8}$$

где $C_{10} = 1$, остальные C_{i0} ($i = 2, 3, \ldots, 6$) равны нулю. Для $x = 0$ под интегралом в (1.8) достаточно заменить единицу на нуль.

Скорости жидкости относительно поверхности тела при произвольном движении представляются в виде

$$\mathbf{U}(x, \theta, t) = \sum_{i=1}^{6} V_i(t)\,[u_{i\tau}(x, \theta)\,\boldsymbol{\tau} + u_{ib}(x, \theta)\,\mathbf{b}]$$

где для безразмерных относительных скоростей получены выражения

$$\begin{gathered} u_{i\tau}(x, \theta) = [(1 + p^2 + q^2)(1 + q^2)]^{-1/2} \times \\ \times \left[f_{i1}(x, \theta) + \int_0^1\int_0^{2\pi} g_i(\xi, \vartheta) K_1(x, \theta, \xi, \vartheta)\, d\xi\, d\vartheta\right] \\ u_{ib}(x, \theta) = [1 + q^2]^{-1/2}\left[f_{i2}(x, \theta) + \int_0^1\int_0^{2\pi} g_i(\xi, \vartheta) K_2(x, \theta, \xi, \vartheta)\, d\xi\, d\vartheta\right] \end{gathered} \tag{1.9}$$

$$K_1 = \frac{(1 + q^2)(x - \xi) + p\,[r - \rho\cos(\theta - \vartheta) - q\rho\sin(\theta - \vartheta)]}{2\pi\,[(x - \xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \vartheta)]^{3/2}}$$

$$K_2 = \frac{q\,[r - \rho\cos(\theta - \vartheta)] + \rho\sin(\theta - \vartheta)}{2\pi\,[(x - \xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \vartheta)]^{3/2}}$$

$$\begin{gathered} f_{11} = 1 + q^2, \qquad f_{21} = p\,(\cos\theta + q\sin\theta), \qquad f_{31} = p\,(\sin\theta - q\cos\theta) \\ f_{41} = pqr, \qquad f_{51} = p\,(\sin\theta - q\cos\theta)\,(x - x_A) - (1 + q^2)\,r\sin\theta \\ f_{61} = -\,p\,(\cos\theta + q\sin\theta)\,(x - x_A) + (1 + q^2)\,r\cos\theta \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} f_{12} = 0, \quad f_{22} = q\cos\theta - \sin\theta, \quad f_{32} = q\sin\theta + \cos\theta, \quad f_{42} = -\,r \\ f_{52} = (\cos\theta + q\sin\theta)\,(x - x_A), \qquad f_{62} = (\sin\theta - q\cos\theta)\,(x - x_A) \end{gathered}$$

Для единичных потенциалов возмущенных скоростей получены формулы

$$\Phi_i(x, \theta) = -l \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{g_i(\xi, \vartheta)\, d\xi\, d\vartheta}{2\pi\, [(x-\xi)^2 + r^2 + \rho^2 - 2r\rho\cos(\theta - \vartheta)]^{1/2}} \tag{1.10}$$

Для концевых точек тела формулы относительных скоростей и единичных потенциалов упрощаются аналогично (1.8).

Известные выражения для коэффициентов присоединенных масс

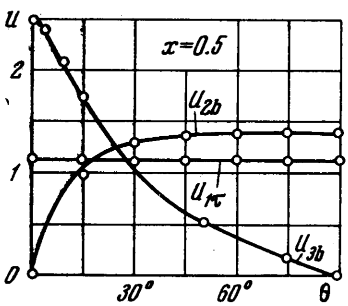
$$\lambda_{ij} = -\rho_0 \iint_S \Phi_i \frac{\partial \Phi_j}{\partial n} dS$$

при длине тела $l = 1$ приводятся к виду

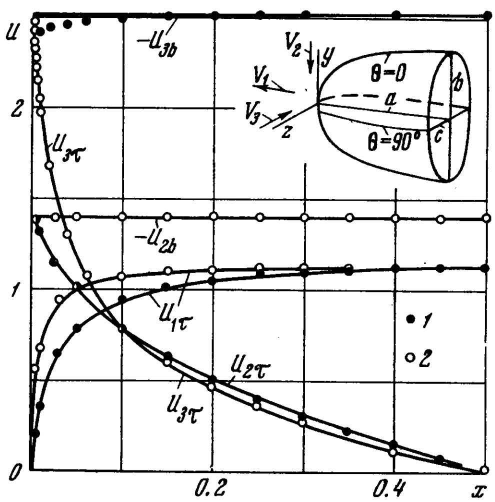
$$\lambda_{ij} = -\rho_0 \int_0^1 \int_0^{2\pi} f_{i0}(x, \theta)\, \Phi_j(x, \theta)\, dx\, d\theta \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 6) \tag{1.11}$$

где ρ_0 — массовая плотность жидкости, $f_{i0}(x, \theta)$ определяются (1.7).

2. Методы вычислений. Определение решения $g_i(x, \theta)$ интегральных уравнений (1.6) осуществляется в конечном числе дискретных расчетных точек поверхности тела. Так, при составлении программы для машины, по которой выполнялись примеры расчетов, на половине тела, имеющего плоскость симметрии xOy, обеспечен выбор 24 расчетных поперечных сечений $x_i = \mathrm{const}$ через произвольные промежутки оси x и 13 расчетных меридиональных сечений $\theta_j = \mathrm{const}$ — через произвольные промежутки угла θ, начиная от $\theta = 0$ и кончая $\theta = 180°$. Расчетными являются точки пересечения указанных поперечных и меридиональных сечений на поверхности. Таким образом, число расчетных точек в рассматриваемых примерах, включая две концевые, равнялось 314.



Фиг. 2



Фиг. 3

Информация о теле задавалась таблицей радиусов r в расчетных точках, таблицами продольных координат поперечных сечений и угловых координат расчетных меридианов. Частные производные (1.5) вычислялись при помощи формул Ньютона по значениям r в трех расчетных точках [5].

Интегральные уравнения решаются методом последовательных приближений по схеме для $i = 1$

$$g_{10} = {}^1/_2 f_{10}, \qquad g_{1n}^* = f_{10} - \iint g_{1,\,n-1} K_0\, d\xi\, d\vartheta, \qquad g_{1n} = {}^1/_2 (g_{1n}^* + g_{1,\,n-1})$$

для $i = 2, 3, \ldots, 6$

$$g_{i0} = f_{i0}, \qquad g_{in} = f_{i0} - \iint g_{i,\,n-1} K_0\, d\xi\, d\vartheta$$

Итерации продолжаются до тех пор, пока

$$[|g_{in}(x,\theta)-g_{i,\,n-1}(x,\theta)|]_{\max}\geqslant 0.015\,|g_{in}|_{\max}$$

т. е. граничные условия выполняются с точностью 1.5%.

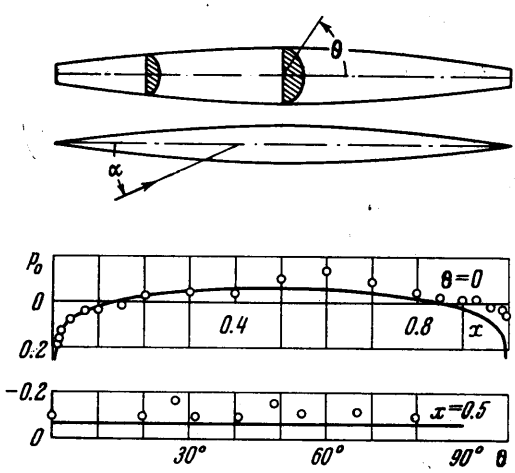
Двойные сходящиеся несобственные интегралы в (1.6) — (1.10) вычисляются при помощи двух замен переменных

$$h(\xi)=\operatorname{sgn}(\xi-x)\left(\frac{|x-\xi|}{|x-\xi|+0.5}\right)^{1/2},\qquad \psi(\vartheta)=\operatorname{sgn}(\vartheta-\theta)\left(\frac{|\theta-\vartheta|}{|\theta-\vartheta|+0.25\pi}\right)^{1/2} \tag{2.1}$$

причем последняя используется лишь в прямоугольнике $|x-\xi|\leqslant 0{,}05$, $|\theta-\vartheta|\leqslant 1/12\,\pi$. При постоянном шаге новых переменных, равном в рассмотренных примерах $\Delta h=384^{-1/2}$ и $\Delta\psi=2^{-4}$, замены (2.1) обеспечивают симметричное расположение узлов интегрирования относительно особенности при увеличении плотности узлов в ее окрестности, что соответствует условиям существования главного значения по Коши и позволяет вычислять несобственные интегралы по правилу трапеций с постоянным шагом новых переменных. Необходимые при этом промежуточные значения $g(\xi,\vartheta)$ и $\rho(\xi,\vartheta)$ между расчетными точками определяются двойной квадратичной интерполяцией по Ньютону [5].

Решение интегральных уравнений (1.6) при помощи аппроксимации системой линейных алгебраических, как это делается в работе [3], соответствовало бы решению в данном случае системы 314 порядка, что осуществить прямыми методами затруднительно, и приходится применять методы последовательных приближений. Кроме того, в методе [3] для получения координат каждой расчетной точки необходимо предварительно решить систему двух трансцендентных уравнений. В предлагаемом методе выбор расчетных точек произволен, и интегральное уравнение непосредственно решается методом последовательных приближений, что сокращает объем вычислений.

3. Примеры расчетов. Для проверки правильности изложенного метода на вычислительной машине «Минск-2» выполнены расчеты скоростей и присоединенных масс трехосного эллипсоида с соотношением полуосей $c:b:a=1:2:4$, для которого имеются точные аналитические выражения для скоростей и присоединенных масс в идеальной жидкости. Применимость излагаемого метода к расчету давлений на поверхности тела в реальной жидкости показана на примере расчета двуугольника, т. е. крыла малого удлинения с сегментным профилем, с торцами, закругленными по радиусу, равному местной толщине тела. Экспериментальные значения давлений на поверхности этого тела при продольном и поперечном обтекании получены в аэродинамической трубе при числе Рейнольдса $R=Vl/\nu=4.4\cdot 10^6$.

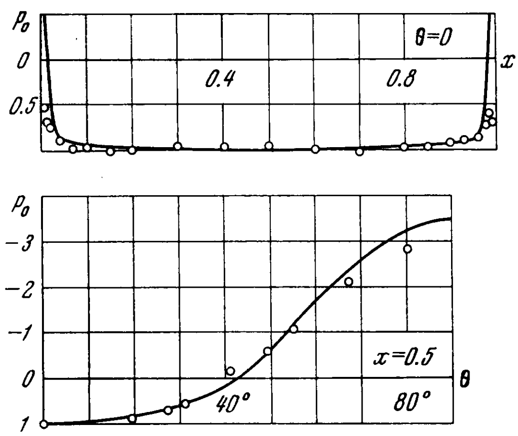


Фиг. 4

Сравнение точных значений относительных скоростей жидкости на поверхности эллипсоида при поступательных движениях вдоль трех его осей с результатами расчетов приведено на фиг. 2 и 3, где сплошными линиями показаны точные значения, точками — результаты расчетов по изложенной методике (точки 1 для $\theta=0$, точки 2 —для $\theta=90°$). Приводим результаты определения коэффициентов присоединенных масс этого же эллипсоида, и для сравнения приводим известные точные значения этих коэффициентов.

	k_{11}	k_{22}	k_{33}	k_{44}	k_{55}	k_{66}
Излагаемый метод	0.135	0.421	1.492	0.407	0.954	0.153
Точное значение	0.127	0.400	1.528	0.409	0.984	0.145

Совпадение результатов излагаемого метода и точных значений можно признать удовлетворительным. Максимальная погрешность, равная 6%, получена при расчетах коэффициента присоединенных масс k_{11} и значения поперечной скорости u_{3b} в точке $x=0$. В остальных случаях точность излагаемого метода можно считать вполне достаточной. Приведенные результаты расчетов поступательных движений вдоль большой полуоси a и средней b и вращения вокруг малой полуоси c этого эллипсоида получены при равномерном расположении расчетных меридианов (через 15°) при незначительном уплотнении поперечных расчетных сечений вблизи концов. При расчетах поступательного движения вдоль малой полуоси c и вращений вокруг a и b плотность расположения расчетных меридианов вблизи $\theta = 0$ и 180° несколько увеличена. Особенно чувствительной к расположению расчетных точек оказалась величина u_{3b} при $\theta = 0$ в окрестности концевой точки $x = 0$, погрешность определения которой при равномерном расположении расчетных поперечных и меридиональных сечений на данном эллипсоиде достигла 12%. Действительно, в окрестности $x = 0$ и $\theta = 0$ при движении вдоль малой полуоси имеется значительный градиент скорости как по x, так и по θ (фиг. 2 и 3), обусловленный наибольшей кривизной поверхности в этом районе. При дискретном представлении величин с достаточной точностью в таких случаях требуется увеличить плотность расчетных точек. Так, уплотнение поперечных и меридиональных расчетных сечений в окрестности $x = 0$ и $\theta = 0$ привело к снижению погрешности определения u_{3b} в этой точке вдвое.



Фиг. 5

Сравнение результатов расчетов с данными эксперимента приведено на фиг. 4 для продольного ($\alpha = 0$) и на фиг. 5 для поперечного ($\alpha = 90°$) обтекания двуугольника. Сплошными линиями построены результаты расчета, точками — экспериментальные значения коэффициента давления p_0 на поверхности модели. Эскиз двуугольника приведен на фиг. 4.

Совпадение расчетных и экспериментальных данных можно признать удовлетворительным. Расхождение результатов расчета и эксперимента в кормовом конце тела при продольном обтекании $x > 0.85$ на фиг. 4, по-видимому, обусловлено влиянием вязкости жидкости, не учитываемой в расчете. По этой же причине сравнение результатов эксперимента и расчета при поперечном обтекании (фиг. 5) проведено лишь для наветренной стороны модели ($\theta = 0 \div 90°$). На подветренной стороне модели при поперечном обтекании реальной жидкостью образуется значительная срывная зона, что не соответствует условиям расчета.

Поступило 20 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Vandrey F. A method for calculating the pressure distribution of a body of revolution moving in a circular path trough a perfect incompressible fluid. ARC, R & M. 1960, No 3139
2. Маслов Л. А. Использование одного метода определения потенциала скоростей обтекания тела вращения идеальной жидкостью для расчета присоединенных масс. Инж. ж., 1965, т. 5, № 4.
3. Hess J., Smith A. Calculation of nonlifting potential flow about arbitrary three—dimensional bodies, J. Ship. Res. 1964, vol. 8, No 2
4. Михлин С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. Физматгиз, 1959.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. I. Физматгиз, 1959.