

ПРОНИЦАЕМАЯ ПЛАСТИНКА ПОД УГЛОМ АТАКИ В УСТАНОВИВШЕМСЯ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

О. Н. ОВЧИННИКОВ

(Ленинград)

В статье излагается приближенное решение задачи о сопротивлении проницаемой пластины ширины l , расположенной под углом атаки α , в установившемся плоском потоке несжимаемой вязкой жидкости как в случае малых, так и очень больших значений числа Рейнольдса при различных законах проницаемости. Полученные результаты, в случае больших значений числа Рейнольдса, сравнены с соответствующими результатами обдува плоских стержневых решеток.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу об обтекании проницаемой пластины ширины l , расположенной под углом атаки α , установившимся плоским потоком несжимаемой вязкой жидкости с постоянной скоростью U_0 (фиг. 1).

Предполагая, что пластина тонкая и обладает малым сопротивлением, заменим ее поверхностью разрыва, переходя через который, жидкость скачкообразно изменяет давление на некоторую величину, зависящую от проницаемости пластины. В качестве характеристики проницаемости будем использовать линейный или квадратичный законы сопротивления

$$\frac{p^-(M) - p^+(M)}{\rho U_0^2} = \sigma \left[\frac{u(M)}{U_0} \right]^n \quad (n = 1, 2) \quad (1.1)$$

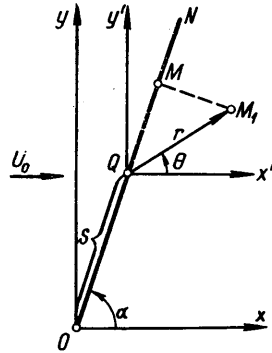
Здесь $p^-(M)$ и $p^+(M)$ — давление в какой-либо точке пластины M соответственно на ее лобовой или кормовой поверхностях, $u(M)$ — скорость фильтрации жидкости через пластину в той же точке, ρ — плотность жидкости, а σ — величина, характеризующая проницаемость пластины в рассматриваемой точке (значение $\sigma = \infty$ соответствует непроницаемой пластине, $\sigma = 0$ — абсолютно проницаемой). Относительно скорости фильтрации жидкости через пластину $u(M)$ будем предполагать, что она направлена параллельно скорости набегающего потока U_0 .

Движение жидкости около пластины будет описываться уравнениями Навье — Стокса, которые в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\nu \Delta \Delta \Psi = \frac{D(\Psi, \Delta \Psi)}{D(y, x)} \quad (1.2)$$

Здесь x, y — декартова система координат, начало которой совмещено с нижним краем пластины, а ось x направлена вдоль потока в сторону течения (фиг. 1); Ψ — функция тока; Δ — оператор Лапласа, а ν — коэффициент кинематической вязкости.

Граничные условия к уравнению (1.2) могут быть сформулированы следующим образом: на достаточном удалении от пластины должно иметь



Фиг. 1

место заданное распределение скоростей и давлений, т. е.

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \rightarrow U_0, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0, \quad \text{при } x \rightarrow \pm \infty, y \rightarrow \pm \infty \quad (1.3)$$

На поверхности пластины, в силу сделанного выше предположения о характере фильтрации жидкости через ее поверхность, поперечная составляющая скорости v , перпендикулярная скорости набегающего потока U_0 , должна равняться нулю, а продольная составляющая u , параллельная скорости набегающего потока U_0 — удовлетворять условию (1.1).

Поскольку получить точное решение уравнения (1.2) при указанных выше граничных условиях не представляется возможным, ограничимся приближенным рассмотрением проблемы. Предполагая, что возмущения, вносимые пластиной в набегающий поток, малы, решение уравнения (1.2) будем искать в виде

$$\Psi = \psi + U_0 y \quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.2) и пренебрегая квадратами производных от функции тока возмущенного движения ψ , получим уравнение Озеена

$$\Delta \left[\Delta \psi - 2k \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = 0, \quad 2k = \frac{U_0}{\nu} \quad (1.5)$$

Поскольку выражение $U_0 y$ удовлетворяет уравнению (1.5), линеаризованная функция тока Ψ , определяемая соотношением (1.4), также будет удовлетворять этому уравнению. Решение уравнения (1.5) для линеаризованной функции тока ψ , удовлетворяющее условиям на бесконечности (1.3) и справедливое при всех значениях числа Рейнольдса, согласно [1], может быть записано в виде

$$\frac{u - iv}{U_0} = 1 + k \int_0^l \left\{ [a(s) + ib(s)] K_0(kr) e^{kx'} + [a(s) - ib(s)] \left[K_1(kr) e^{kx'} - \frac{1}{kr} \right] e^{-i\theta} \right\} ds \quad (1.6)$$

Здесь $u - iv$ — комплексная скорость в произвольной точке M_1 , x', y' — декартова система координат с центром в точке Q (ось x' направлена параллельно оси x), s — расстояние от точки Q до начала координат; r и θ — полярная система координат с центром в точке Q ; $K_0(kr)$ и $K_1(kr)$ — функции Макдональда, а $a(s)$ и $b(s)$ — функции, подлежащие определению из граничных условий.

Согласно приближению Озеена [2], давление в точке M_1 определяется соотношением

$$\frac{p(M_1) - p_0}{\rho U_0^2} = -\frac{u_1}{U_0} \quad (1.7)$$

Здесь u_1 — продольная составляющая скорости возмущения в точке M_1 , возникающая только за счет потенциальной части потока.

Используя (1.6) и (1.7), будем иметь

$$\frac{p(M_1) - p_0}{\rho U_0^2} = \int_0^l \frac{[a(s) \cos \theta - b(s) \sin \theta]}{r} ds \quad (1.8)$$

В частном случае, если точка M_1 расположена на поверхности пластины

$$x' = (t - s) \cos \alpha, \quad r = |t - s|, \quad \theta = \begin{cases} \alpha & (t > s) \\ \alpha \pm \pi & (t < s) \end{cases} \quad (1.9)$$

и выражение (1.6) запишется в виде

$$\frac{u(M) - iv(M)}{U_0} = 1 + k \int_0^l \left\{ [a(s) + ib(s)] K_0(k|t-s|) e^{k(t-s)\cos\alpha} + [a(s) - ib(s)] \left[K_1(k(t-s)) e^{k(t-s)\cos\alpha} - \frac{1}{k(t-s)} \right] e^{-i\alpha} \right\} ds \quad (1.10)$$

Здесь t — расстояние от точки M до начала координат, а $K_1(k(t-s))$ в случае $t-s < 0$ следует считать величиной отрицательной.

Найдем теперь выражение для расчета распределения давления вдоль поверхности пластины. Для этого правую часть выражения (1.8) запишем в виде

$$\frac{p(M_1) - p_0}{\rho U_0^2} = \operatorname{Re} \left\{ \int_0^l \frac{a(s) - ib(s)}{z(M_1) - z(Q)} ds \right\} \quad (z = x + iy) \quad (1.11)$$

В частном случае, если точка M_1 расположена на поверхности пластины, используя формулы Сохоцкого, будем иметь

$$\frac{p(M) - p_0}{\rho U_0^2} = \lim_{\theta \rightarrow \alpha; \alpha \pm \pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^l \frac{a(s) - ib(s)}{z(M) - z(Q)} ds \right\} = \int_0^l \frac{a(s) \cos \alpha - ib(s) \sin \alpha}{t-s} ds + \pm \pi [a(t) \sin \alpha + b(t) \cos \alpha] \quad (1.12)$$

Здесь и в дальнейшем сингулярный интеграл берется в смысле главного значения. Перед последним слагаемым следует взять знак минус в случае, если давление определяется в какой-либо точке на лобовой поверхности пластины, и плюс, если — на кормовой.

2. Решение для малых значений числа Рейнольдса. Рассмотрим сначала случай малых значений числа Рейнольдса, т. е. малых значений параметра k . Поскольку при $kl < 1$

$$K_0(k|t-s|) \approx -\ln |\gamma k(t-s)|, \quad \gamma = 0.8905 \quad (2.1)$$

$$K_1(k(t-s)) \approx [k(t-s)]^{-1}, \quad \exp [k(t-s) \cos \alpha] \approx 1 + k(t-s) \cos \alpha$$

то, подставляя эти соотношения в (1.10), будем иметь

$$\frac{u(M) - iv(M)}{U_0} = 1 - k \int_0^l [a(s) + ib(s)] \ln |\gamma k(t-s)| ds + k \cos \alpha \int_0^l [a(s) - ib(s)] e^{-i\alpha} ds \quad (2.2)$$

Так как, в силу сделанного выше предположения о характере фильтрации жидкости через пластину, поперечная составляющая скорости v на контуре должна равняться нулю, то

$$\int_0^l b(s) \ln |\gamma k(t-s)| ds + \cos \alpha \int_0^l [a(s) \sin \alpha + b(s) \cos \alpha] ds = 0. \quad (2.3)$$

Второе уравнение для определения функций $a(s)$ и $b(s)$ получим, если в соотношение (1.1), взятое при $n = 1$, подставим соответствующие значения из (1.12), (2.2) и (2.1)

$$-\frac{2\pi}{\sigma(t)} [a(t) \sin \alpha + b(t) \cos \alpha] = 1 - k \int_0^l a(s) \ln |\gamma k(t-s)| ds + \\ + k \cos \alpha \int_0^l [a(s) \cos \alpha - b(s) \sin \alpha] ds \quad (2.4)$$

Решение системы интегральных уравнений (2.3), (2.4) зависит от выбора закона проницаемости пластины $\sigma(t)$. Предположим, например, что

$$\sigma(t) = \frac{\sigma_0 l}{2 \sqrt{t(l-t)}} \quad (2.5)$$

Далее положим

$$s = 1/2 l (1 + \cos \theta), \quad t = 1/2 l (1 + \cos \theta_0) \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в уравнения (2.3), (2.4), найдем

$$\int_0^\pi b(\theta) \ln \left| \frac{1}{2} \gamma k l (\cos \theta - \cos \theta_0) \right| \sin \theta d\theta + \\ + \cos \alpha \int_0^\pi [a(\theta) \sin \alpha + b(\theta) \cos \alpha] \sin \theta d\theta = 0 \\ - \frac{2\pi}{\sigma_0} [a(\theta_0) \sin \alpha + b(\theta_0) \cos \alpha] \sin \theta_0 = \quad (2.7)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} k l \int_0^\pi a(\theta) \ln \left| \frac{1}{2} \gamma k l (\cos \theta - \cos \theta_0) \right| \sin \theta d\theta + \\ + \frac{1}{2} k l \cos \alpha \int_0^\pi [a(\theta) \cos \alpha - b(\theta) \sin \alpha] \sin \theta d\theta$$

Решение системы интегральных уравнений (2.7) будем искать в виде

$$a(\theta) = A_0 / \sin \theta, \quad b(\theta) = B_0 / \sin \theta \quad (2.8)$$

где A_0 и B_0 — константы, подлежащие определению.

Подставляя (2.8) в (2.7) и принимая во внимание, что

$$\ln |\cos \theta - \cos \theta_0| = -\ln 2 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m} \cos m\theta_0 \cos m\theta \quad (2.9)$$

получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$A_0 \sin \alpha \cos \alpha + B_0 [\cos^2 \alpha + \ln (1/4 \gamma k l)] = 0 \\ B_0 \left[\sin \alpha - \frac{4}{kl\sigma_0} \right] \cos \alpha - A_0 \left[\cos^2 \alpha + \frac{4 \sin \alpha}{\sigma_0 k l} - \ln (1/4 \gamma k l) \right] = \frac{2}{kl\pi} \quad (2.10)$$

Решение системы (2.10) имеет вид

$$A_0 = \frac{2}{k\pi l} \frac{\ln (1/4 \gamma k l) + \cos^2 \alpha}{\ln (1/4 \gamma k l) [\ln (1/4 \gamma k l) - (4/k l \sigma_0) \sin \alpha] - \cos^2 \alpha} \quad (2.11) \\ B_0 = -\frac{1}{k\pi l} \frac{\sin 2\alpha}{\ln (1/4 \gamma k l) [\ln (1/4 \gamma k l) - (4/k l \sigma_0) \sin \alpha] - \cos^2 \alpha}$$

Если теперь полученные выражения для $a(s)$ и $b(s)$ (2.8) и (2.11) подставить в (2.2) и учесть при этом (2.6) и (2.9), то после несложных преобразований будем иметь

$$\frac{u}{U_0} = -\frac{4}{kl\sigma_0} \frac{\ln(1/4\gamma kl) \cdot \sin \alpha}{\ln(1/4\gamma kl) [\ln(1/4\gamma kl) - (4/kl\sigma_0) \sin \alpha] - \cos^2 \alpha} \quad (2.12)$$

т. е. выбранный закон изменения σ вдоль поверхности пластины (2.5) соответствует постоянной скорости фильтрации жидкости через ее поверхность.

Определим теперь усилия, действующие на пластину. Как известно [2], проекции главного вектора сил воздействия окружающей жидкости на замкнутый плоский контур S могут быть представлены в виде

$$R_x = \oint_S \left\{ -ph + \mu \left[2h \frac{\partial u}{\partial x} + m \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} ds \quad (2.13)$$

$$R_y = \oint_S \left\{ -ph + \mu \left[2m \frac{\partial v}{\partial y} + h \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \right\} ds \quad \left(h = \frac{dy}{ds}, m = -\frac{dx}{ds} \right)$$

Здесь p — давление, μ — коэффициент вязкости жидкости, а h и m — направляющие косинусы внешней нормали к площадке ds .

В силу сделанного выше предположения о характере фильтрации жидкости через поверхность пластины в точках на ее поверхности

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

Принимая во внимание (2.14), из уравнения неразрывности следует, что в точках на поверхности пластины

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.15)$$

Далее, согласно приближению Озеена [2],

$$v = v_1 + \frac{1}{2k} v_2, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = v_2 \right] \quad (2.16)$$

Здесь v_1 и v_2 — соответственно гармоническая и негармоническая части поперечной составляющей скорости v .

Поскольку в точках на контуре пластины $v = 0$, из (2.16) следует, что в точках на контуре пластины будет справедливо соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -2kv_1 \quad (2.17)$$

Если теперь воспользоваться соотношениями (2.14), (2.15), (2.17), (1.5) и (1.7), то выражения (2.13) могут быть записаны в виде

$$\frac{R_x + iR_y}{\rho U_0^2} = -i \oint_S \frac{u_1 - iv_1}{U_0} dz \quad (z = x + iy) \quad (2.18)$$

Из соотношения (1.10) нетрудно видеть, что в точках на контуре пластины

$$\frac{u_1 - iv_1}{U_0} = -\int_0^l \frac{a(s) - ib(s)}{z - z(Q)} ds \quad (2.19)$$

Подставляя (2.19) в (2.18) и используя теорему Коши о вычетах, окончательно будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{R_x + iR_y}{\rho U_0^2} &= i \oint_S \int_0^l \frac{a(s) - ib(s)}{z - z(Q)} ds dz = i \int_0^l [a(s) - ib(s)] ds \oint_S \frac{dz}{z - z(Q)} = \\ &= -2\pi \int_0^l [a(s) - ib(s)] ds \end{aligned} \quad (2.20)$$

Воспользуемся теперь этим соотношением для определения усилий, действующих на проницаемую пластину. Подставляя (2.8) и (2.11) в (2.20), найдем

$$C_x + iC_y = \frac{R_x + iR_y}{1/2\rho U_0^2 l} = -\frac{4\pi}{kl} \frac{\ln(1/4\gamma kl) + \cos^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha}{\ln^2(1/4\gamma kl) - \cos^2 \alpha - (4/kl\sigma_0) \ln(1/4\gamma kl) \sin \alpha} \quad (2.21)$$

При $\alpha = 1/2\pi$ выражение (2.21) превращается в

$$C_x = -\frac{4\pi}{kl} \left[\ln \frac{\gamma kl}{4} - \frac{4}{kl\sigma_0} \right]^{-1}, \quad C_y = 0 \quad (2.22)$$

и совпадает с соответствующим выражением, ранее полученным автором [3]. В случае непроницаемой пластины ($\sigma_0 = \infty$)

$$C_x + iC_y = -\frac{4\pi}{kl} \frac{\ln(1/4\gamma kl) + \cos^2 \alpha + i \sin \alpha \cos \alpha}{\ln^2(1/4\gamma kl) - \cos^2 \alpha} \quad (2.23)$$

Это согласуется с результатом, полученным в работе [4] при рассмотрении течения Озеена около непроницаемой пластины, установленной под углом атаки α .

3. Решение для больших значений числа Рейнольдса. Рассмотрим теперь случай очень больших значений числа Рейнольдса, т. е. случай, когда $kl \gg 1$. Поскольку при $kl \gg 1$ функции Макдональда $K_0(k|t-s|)$ и $K_1(k(t-s))$ исчезающе малы везде, за исключением окрестности точки $s = t$, произведем следующие упрощения:

$$\begin{aligned} k \int_0^l a(s) K_0(k|t-s|) e^{k(t-s)\cos \alpha} ds &\approx ka(t) \int_0^l K_0(k|t-s|) e^{k(t-s)\cos \alpha} ds \approx \\ &\approx 2a(t) \int_0^\infty \text{ch}(\xi \cos \alpha) K_0(\xi) d\xi = \frac{\pi a(t)}{\sin \alpha} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} k \int_0^l b(s) \left[K_1(k(t-s)) e^{k(t-s)\cos \alpha} - \frac{1}{k(t-s)} \right] ds &\approx \int_0^l \frac{b(s)}{s-t} ds + \\ + 2b(t) \int_0^\infty \text{sh}(\xi \cos \alpha) K_1(\xi) d\xi &= \pi b(t) \text{ctg} \alpha + \int_0^l \frac{b(s)}{s-t} ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

Принимая во внимание (3.1) и (3.2), выражение (1.10) при больших значениях параметра k может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{u(M) - iv(M)}{U_0} &= 1 + \frac{\pi}{\sin \alpha} [a(t) + ib(t)] + \pi \text{ctg} \alpha [a(t) - ib(t)] e^{-i\alpha} + \\ &+ \int_0^l \frac{a(s) - ib(s)}{s-t} e^{-i\alpha} ds \end{aligned} \quad (3.3)$$

Перейдем теперь к определению функций $a(s)$ и $b(s)$. Из условия параллельности скорости фильтрации набегающему потоку следует, что

$$\int_0^l \frac{a(s) \sin \alpha + b(s) \cos \alpha}{s-t} ds = \pi b(t) \sin \alpha - \pi a(t) \cos \alpha \quad (3.4)$$

Второе уравнение для определения функций $a(s)$ и $b(s)$ получим, если в закон проницаемости (1.1) подставим соответствующие выраже-

ния из соотношений (1.12) и (3.3)

$$-\frac{2\pi}{\sigma(t)} [a(t) \sin \alpha + b(t) \cos \alpha] = \left[1 + \frac{\pi(1 + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha} a(t) - \pi b(t) \cos \alpha + \int_0^l \frac{a(s) \cos \alpha - b(s) \sin \alpha}{s-t} ds \right]^n \quad (3.5)$$

Решение системы интегральных уравнений (3.4), (3.5) зависит от выбора закона проницаемости пластины $\sigma(t)$.

Остановимся на наиболее интересном, с практической точки зрения, случае, когда $\sigma(t) = \sigma_0 = \text{const}$.

Поскольку получить общее решение системы уравнений (3.4), (3.5) при $\sigma_0 = \text{const}$ и произвольных значениях n не представляется возможным, несколько упростим выражение (3.5). Для этого его правую часть возведем в степень n и в полученном выражении сохраним только члены, содержащие скорость возмущения в первой степени

$$\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{b(s) \sin \alpha - a(s) \cos \alpha}{s-t} ds = \frac{1}{\pi n} + \left[\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sigma_0 n} \sin \alpha \right] a(t) + \left[\frac{2}{\sigma_0 n} - 1 \right] b(t) \cos \alpha \quad (3.6)$$

При $n = 1$ выражения (3.5) и (3.6) тождественны, при $n = 2$ пренебрежение квадратами скоростей возмущения более или менее логично, так как при получении самого выражения (3.3) были опущены квадраты скоростей возмущения.

Несколько преобразуем систему интегральных уравнений (3.4) и (3.6). Умножая уравнение (3.4) на $\cos \alpha$, а (3.6) — на $\sin \alpha$ и складывая полученные выражения, будем иметь

$$\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{b(s)}{s-t} ds = \frac{\sin \alpha}{\pi n} + \left[1 + \frac{2}{\sigma_0 n} \sin^2 \alpha \right] a(t) + \frac{1}{\sigma_0 n} b(t) \sin 2\alpha \quad (3.7)$$

Аналогично, умножая уравнение (3.4) на $\sin \alpha$, а (3.6) на $\cos \alpha$ и вычитая полученные результаты, найдем

$$\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{a(s)}{s-t} ds = -\frac{\cos \alpha}{\pi n} - \left[2 \text{ctg} \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\sigma_0 n} \right] a(t) + \left[1 - \frac{2 \cos^2 \alpha}{\sigma_0 n} \right] b(t) \quad (3.8)$$

Отметим, что

$$\int_0^l \left(\frac{x}{l-x} \right)^\lambda \frac{dx}{x-t} = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda} - \pi \text{ctg} \pi \lambda \left(\frac{t}{l-t} \right)^\lambda, \quad |\lambda| < 1 \quad (3.9)$$

Решение системы (3.7), (3.8) будем искать в виде

$$a(s) = A_1 \left(\frac{s}{l-s} \right)^{\lambda_1} + A_2 \left(\frac{s}{l-s} \right)^{\lambda_2}, \quad b(s) = B_1 \left(\frac{s}{l-s} \right)^{\lambda_1} + B_2 \left(\frac{s}{l-s} \right)^{\lambda_2} \quad (3.10)$$

Здесь $A_1, A_2, B_1, B_2, \lambda_1$ и λ_2 — постоянные, подлежащие определению. Если соотношения (3.10) подставить в (3.7) и (3.8) и учесть при этом (3.9), для определения указанных выше шести неизвестных величин

получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\frac{A_1}{\sin \pi \lambda_1} + \frac{A_2}{\sin \pi \lambda_2} = -\frac{\cos \alpha}{\pi n}, \quad \frac{B_1}{\sin \pi \lambda_1} + \frac{B_2}{\sin \pi \lambda_2} = \frac{\sin \alpha}{\pi n} \quad (3.11)$$

$$\left[1 + \frac{2}{\sigma_0 n} \sin^2 \alpha \right] A_i = - \left[\operatorname{ctg} \pi \lambda_i + \frac{\sin 2\alpha}{\sigma_0 n} \right] B_i$$

$$\left[1 - \frac{2}{\sigma_0 n} \cos^2 \alpha \right] B_i = \left[2 \operatorname{ctg} \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{\sigma_0 n} - \operatorname{ctg} \pi \lambda_i \right] A_i \quad (i = 1, 2)$$

Решение этой системы может быть записано в виде

$$\begin{aligned} Z_1 &= \operatorname{ctg} \pi \lambda_1 = \operatorname{ctg} \alpha + \sqrt{1 + 2/\sigma_0 n + \operatorname{ctg}^2 \alpha} \\ Z_2 &= \operatorname{ctg} \pi \lambda_2 = \operatorname{ctg} \alpha - \sqrt{1 + 2/\sigma_0 n + \operatorname{ctg}^2 \alpha} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$A_i = -\frac{\sin \alpha}{2\pi n} \frac{(Z_i + \sin 2\alpha/\sigma_0 n)}{(1 + 2\sin^2 \alpha/\sigma_0 n)} \sin \pi \lambda_i, \quad B_i = \frac{\sin \alpha}{2\pi n} \sin \pi \lambda_i \quad (i = 1, 2)$$

Определим теперь усилия, действующие на проникаемую пластину. Подставляя выражения (3.10) в (2.20) и учитывая при этом (3.12), после несложных вычислений будем иметь

$$\begin{aligned} C_x + iC_y &= \frac{2}{n} \sin \alpha \left\{ \frac{(Z_1 + \sin 2\alpha/\sigma_0 n) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} Z_1 - (Z_2 + \sin 2\alpha/\sigma_0 n) \operatorname{arc} \operatorname{ctg} |Z_2|}{1 + 2\sin^2 \alpha/\sigma_0 n} + \right. \\ &\quad \left. + i(\operatorname{arc} \operatorname{ctg} Z_1 - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} |Z_2|) \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

При $\alpha = 1/2\pi$ выражение (3.13) превращается в

$$C_x = \frac{4}{n} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} \sqrt{1+2/\sigma_0}}{\sqrt{1+2/\sigma_0}}, \quad C_y = 0 \quad (3.14)$$

и при $n = 1$ совпадает с соответствующим выражением, ранее полученным автором [3]. В случае непроницаемой пластины ($\sigma_0 = \infty$) выражение (3.13) превращается в

$$C_x + iC_y = \frac{1}{n} [\pi - (\pi - 2\alpha) \cos \alpha - i(\pi - 2\alpha) \sin \alpha] \quad (3.15)$$

и при $n = 1$ согласуется с выражением, полученным Мияги [4] при рассмотрении течения Озеена около непроницаемой пластины, установленной под углом атаки α , при больших значениях числа Рейнольдса.

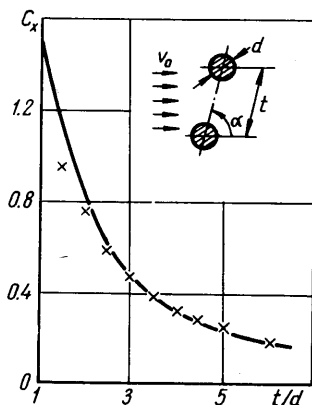
4. Сравнение с экспериментом. В случае больших значений числа Рейнольдса представляет интерес сравнить значение коэффициентов сопротивления C_x и C_y , рассчитанные по формуле (3.13) с соответствующими величинами, полученными из эксперимента. Наиболее подходящим объектом для сравнения, очевидно, были бы результаты обдува пластины, изготовленной из тонкой проволоочной сетки. Однако, ввиду отсутствия в нашем распоряжении подобных данных, ниже приведено сравнение с результатами обдува плоских решеток параллельных стержней.

Решетки, служившие объектами исследования, имели габаритные размеры 250×510 мм, различный относительный шаг и были изготовлены из круглых стержней диаметром 6 мм (фиг. 2). Обдувы решеток производились в большой аэродинамической трубе ЛПИ имени М. И. Калинина при различных скоростях набегающего потока U_0 и различных углах атаки решетки α (фиг. 2).

Результаты проведенных испытаний, в частности, показали, что при скорости набегающего потока более 20 м/сек аэродинамические коэффициенты сопротивления решеток C_x и C_y практически не зависят от числа Рейнольдса и являются функциями только относительного шага t/d и угла атаки α .

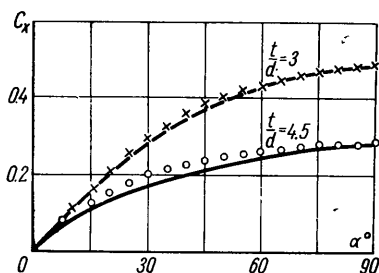
Некоторые результаты эксперимента, полученные при скорости набегающего потока 25 м/сек, показаны на фиг. 2—4. На этих же фигурах сплошной линией нанесены результаты теоретического расчета по формуле (3.13) при $n = 2$. За коэффициент сопротивления σ_0 при расчете был принят коэффициент сопротивления элемента соответствующей безграничной решетки круглых параллельных стержней. Согласно Идельчику [5], последний может быть определен по формуле

$$\sigma_0 = 0.895 \left(\frac{d}{t-d} \right)^{1/3} \quad (4.1)$$

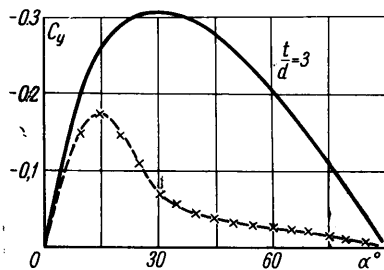


Фиг. 2

Из фиг. 2 и 3, где соответственно показана зависимость коэффициента сопротивления $C_x = C_x(t/d)$ при $\alpha = \pi/2$ и $C_x = C_x(\alpha)$ при $t/d = 3$ и 4,5, следует, что в случае стержневых решеток с умеренной плотностью эксперимент удовлетворительно согласуется с результатами, предска-



Фиг. 3



Фиг. 4

занными теорией, хотя обтекание решеток стержней в аэродинамической трубе при рассматриваемых значениях числа Рейнольдса и носило турбулентный характер.

В случае густых решеток ($t/d \leq 2$), как и следовало ожидать, теория дает завышенные результаты; наоборот, в случае очень редких решеток и небольших углов атаки α — заниженные.

Из фиг. 4 следует, что в случае стержневых решеток теоретические значения коэффициента C_y значительно выше величин, полученных из эксперимента.

Поступило 20 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамада К. Miyagi T. Laminar viscous flow past a flat plate set normal to the stream with special reference to high Reynolds numbers. J. Phys. Soc. Japan, 1962, vol. 17, N 2, p. 373.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости, Гостехиздат, 1955.
3. Овчинников О. Н. Установившееся течение вязкой жидкости около проникаемой пластины. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 2, стр. 24.
4. Miyagi T. Oseen flow past a flat plate inclined to the uniform flow. J. Phys. Soc. Japan, 1964, vol. 19, N 6, p. 1063.
5. Идельчик И. Е. Гидравлические сопротивления, Госэнергоиздат, 1954.