

РЕШЕТКА ПЛАСТИН В ДОЗВУКОВОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Д. Н. ГОРЕЛОВ, Л. В. ДОМИНАС

(Новосибирск)

Учет сжимаемости жидкости создает серьезные трудности в решении задач о колебаниях решетки тонких слабо изогнутых профилей в дозвуковом потоке. Для редкой решетки без выноса, профили которой колеблются в противофазе, задача решена в работах [1-3]. При этом в работе [2] обнаружено явление аэродинамического (акустического) резонанса, которое может возникнуть в решетке в поперечном направлении к потоку при определенных значениях скорости потока и частоты колебаний профилей. Приближенное решение задачи, в котором не учитывается влияние вихревых следов на течение газа, получено в работе [4]. Майстер в работах [5, 6] исследовал в строгой линейной постановке задачу о нестационарном движении газа через решетку полубесконечных пластин без выноса. В работе [7] им рассмотрена решетка профилей с конечными хордами, но решение задачи не доведено до конца. Наиболее полно задача о дозвуковом течении газа через решетку с выносом, профили которой колеблются по одному закону с постоянным сдвигом фазы, решена в работах В. Б. Курзина [8, 9] методом интегральных уравнений. В работе [10] указан способ решения задачи для случая произвольных гармонических законов колебаний профилей решетки. В работах [9, 11] приведены результаты расчета нестационарных аэродинамических сил для частного случая решетки пластин без выноса и указана возможность возникновения аэродинамического резонанса в решетке в поперечном и продольном к потоку направлениях.

Другой метод решения задачи дан в работе [12], в которой решена более общая задача нестационарного дозвукового течения газа через пространственную решетку пластин. В настоящей работе этот метод применен к решению задачи о колебаниях решетки пластин с выносом в плоском дозвуковом потоке газа. Приведены результаты расчета на ЭВМ нестационарных аэродинамических характеристик профилей решетки, показывающие существенное влияние сжимаемости жидкости на эти характеристики. В частности, получено резкое падение аэродинамического демпфирования на режимах акустического резонанса.

§ 1. Рассмотрим нестационарное дозвуковое течение газа через решетку с выносом, профили которой колеблются по некоторому заданному гармоническому закону с круговой частотой ν и постоянным сдвигом фазы ψ между колебаниями соседних профилей. В бесконечном удалении перед решеткой скорость потока V постоянна. Течение газа вне решетки профилей и системы вихревых следов, сходящихся с каждого профиля, предполагается потенциальным. Задача решается в рамках линейной теории.

Выберем некоторый профиль в решетке в качестве исходного. С каждым профилем свяжем систему прямоугольных координат X_j, Y_j ($j=0, \pm 1, \dots$) с началом координат в середине j -го профиля. Исходному профилю соответствует $j=0$ (фиг. 1). Перейдем к безразмерным координатам x_j, y_j , связанным с X_j, Y_j соотношениями

$$X_j = cx_j, \quad Y_j = cy_j / \sqrt{1 - M^2} \quad (M = V/a) \quad (1.1)$$

Здесь c — половина хорды профиля, a — скорость звука в невозмущенном потоке. Координаты x_j, y_j связаны с координатами x, y равенствами ($j = 0, \pm 1, \dots$)

$$x_j = x + 2j\tau^{-1} \sin \beta, \quad y_j = y - 2j\tau^{-1} \sqrt{1 - M^2} \cos \beta \quad (\tau = 2c/h) \quad (1.2)$$

Здесь τ, β — густота и угол выноса решетки, h — расстояние между профилями вдоль оси решетки.

Представим потенциал скорости нестационарного возмущенного движения газа в виде

$$\Phi(x, y, t) = cV\Phi(x, y) e^{i(\nu t - \sigma x)} \quad \left(\sigma = \frac{kM^2}{1 - M^2}, k = \frac{\nu c}{V} \right) \quad (1.3)$$

Тогда функция $\Phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \mu^2\Phi = 0 \quad (\mu = kM / (1 - M^2)) \quad (1.4)$$

и следующим условиям:

$$\Phi_y = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} v_y(x) e^{i(\sigma x + j\psi)} \quad \text{при } |x_j| \leq 1, y_j = 0 \quad (1.5)$$

$$\Phi_x - i\alpha\Phi = 0 \quad \text{при } y_j = 0, x_j < -1 \quad (\alpha = \sigma / M^2) \quad (1.6)$$

Здесь $v_y(x)$ — заданная форма колебаний исходного профиля. Кроме того, функция Φ должна удовлетворять принципу излучения Зоммерфельда в бесконечном удалении перед решеткой и постулату Жуковского — Чаплыгина в задних кромках профилей.

Основные трудности при решении задачи (1.3)–(1.6) связаны с учетом взаимной аэродинамической интерференции профилей решетки. Учитывать эту интерференцию будем тем же методом, который был применен в работах [12,13]. В соответствии с этим методом, потенциал скорости обтекания решетки ищется в виде суммы потенциалов скорости обтекания одиночных профилей, колеблющихся по заданному закону $Vv_y(x) \exp(i(\nu t + j\psi))$ и некоторому искомому закону $Vu_y(x) \exp(i(\nu t + j\psi))$, введение которого позволяет учесть интерференцию профилей в решетке.

Если $\Phi_j(x_j, y_j), \Psi_j(x_j, y_j)$ — решения задачи (1.3)–(1.6) для одиночного профиля, колеблющегося в безграничном дозвуковом потоке газа с формами колебаний $v_y(x) \exp(ij\psi)$ и $u_y(x) \exp(ij\psi)$ соответственно, то условие непротекания (1.5) в точках исходного профиля можно записать в виде [12,13]

$$\frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} u_y(x) e^{i\sigma x} + \sum' \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial y_j} + \frac{\partial \Psi_j}{\partial y_j} \right] e^{-i\sigma x_j} = 0 \quad (1.7)$$

Здесь знак суммы со штрихом означает суммирование по всем j , кроме значения $j = 0$.

Функции Φ_j, Ψ_j будем определять по методу М. Д. Хаскинда [14]. Перейдем к эллиптической системе координат ξ_j, η_j по формулам

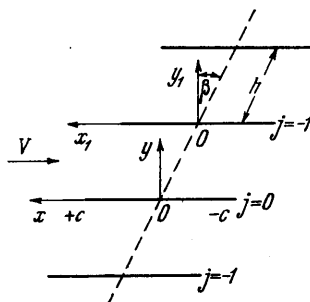
$$x_j = \text{ch } \xi_j \cos \eta_j, \quad y_j = \text{sh } \xi_j \sin \eta_j \quad (1.8)$$

Тогда

$$\text{sh}^2 \xi_j = -1/2 (1 - x_j^2 - y_j^2) + \sqrt{1/4 (1 - x_j^2 - y_j^2)^2 + y_j^2} \quad (1.9)$$

$$\sin \eta_j = y_j \text{csch } \xi_j, \quad \cos \eta_j = x_j \text{sch } \xi_j \quad (j = 0, \pm 1, \dots)$$

где координаты x_j, y_j связаны с x, y соотношениями (1.2).



Фиг. 1

Заданную и искомую функции $v_y(x) \exp(i\sigma x)$, $u_y(x) \exp(i\sigma x)$ можно представить в виде рядов Фурье

$$v_y(x) e^{i\sigma x} = \frac{1}{2} \theta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_m \cos m\eta, \quad u_y(x) e^{i\sigma x} = \frac{1}{2} \delta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \cos m\eta$$

$$(x = \cos \eta) \quad (1.10)$$

В соответствии с методом М. Д. Хаскинда, функцию Φ_j ищем в виде суммы функций Φ_{j0} и Φ_{j1} . Функция Φ_{j0} определяет безциркуляционное течение газа, а Φ_{j1} — течение газа, вызванное вихревым следом в присутствии неподвижного профиля. По определению ¹ [14]

$$\Phi_j^0(x_j, y_j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} \frac{\text{Se}_n(\xi_j)}{\text{Se}_n'(0)} \text{se}_n(\eta_j), \quad \text{Se}_n'(0) = \left. \frac{d \text{Se}_n(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} \quad (1.11)$$

$$a_{jn} = \frac{\exp(ij\psi)}{2\sqrt{1-M^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m (B_{m+1}^{(n)} - B_{m-1}^{(n)}), \quad \text{Se}_n(\eta_j) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(n)} \sin m\eta_j \quad (1.12)$$

Функция $\Phi_{j1}(x_j, y_j)$ выражается через функцию $g_j(x_j, y_j)$ с помощью равенств

$$\frac{\partial g_j}{\partial y_j} = \frac{\partial \Phi_{j1}}{\partial x_j} - i\alpha \Phi_{j1}, \quad \Phi_{j1}(x_j, y_j) = e^{i\alpha x_j} \int_{-\infty}^{x_j} e^{-i\alpha u} \frac{\partial g_j(u, y_j)}{\partial y_j} du \quad (1.13)$$

Функция g_j определяется равномерно сходящимся рядом по четным функциям Матье

$$g_j(x_j, y_j) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{jn} \frac{\text{Ce}_n(\xi_j)}{\text{Ce}_n(0)} \text{ce}_n(\eta_j), \quad b_{jn} = 2 [A_j \alpha_+^{(n)} + B_j \alpha_-^{(n)}] \quad (1.14)$$

$$\text{ce}_n(\eta_j) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^{(n)} \cos m\eta_j, \quad \alpha_{\pm}^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} (\pm i)^m A_m^{(n)} J_m(\mu) \quad (1.15)$$

Здесь A_j, B_j — искомые постоянные, $J_m(\mu)$ — функция Бесселя. С другой стороны, функцию g_j можно представить в виде

$$g_j(x_j, y_j) = \int_{-1}^{+1} \gamma(s) H_0^{(2)}(\mu \sqrt{(x_j - s)^2 + y_j^2}) ds. \quad (1.16)$$

Здесь $H_0^{(2)}$ — функция Ганкеля второго рода, $\gamma(s)$ — искомая плотность источников. Из (1.16) имеем

$$\gamma(x_j) = -\frac{1}{2i} \left. \frac{\partial g_j}{\partial y_j} \right|_{y_j=+0} \quad (1.17)$$

С учетом выражения (1.14)

$$\gamma(x_j) = A_j \gamma_+ + B_j \gamma_-, \quad \gamma_{\pm} = \frac{i}{\sin \eta_j} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{\pm}^{(n)} \frac{\text{Ce}_n'(0)}{\text{Ce}_n(0)} \text{ce}_n(\eta_j) \quad (1.18)$$

Следует отметить, что в работе [14] формула (2.29) для γ_{\pm} ошибочно написана с обратным знаком, на что, в частности, было указано в работе [16]. Для определения постоянных A_j, B_j имеем: условие непротекания в

¹ Для функций Матье используются обозначения работы [15].

точках неподвижного профиля для функции Φ_{j1} и постулат Жуковского — Чаплыгина. Оба эти условия будут выполнены, если A_j, B_j определяются формулами

$$A_j = \frac{\exp(ij\psi)}{2\sqrt{1-M^2}} \sum_{m=0}^{\infty} A^{(m)}\theta_m, \quad B_j = \frac{\exp(ij\psi)}{2\sqrt{1-M^2}} \sum_{m=0}^{\infty} B^{(m)}\theta_m \quad (1.19)$$

$$A^{(m)} = \frac{\gamma_1^{(m)}}{S_+ + \gamma_2 S_-}, \quad B^{(m)} = \gamma_2 A^{(m)}, \quad S_{\pm} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)} \alpha_{\pm}^{(n)} ce_n(\pi) \quad (1.20)$$

$$\gamma_2 = \frac{k_1 + C_+}{k_2 - C_-}, \quad k_1 = \frac{i}{\mu - \alpha} e^{i(\mu - \alpha)}, \quad k_2 = \frac{i}{\mu + \alpha} e^{-i(\mu + \alpha)} \quad (1.21)$$

$$C_{\pm} = i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)} \alpha_{\pm}^{(n)} \beta_n, \quad \beta_n = \int_0^{\pi} f(\cos \eta) ce_n(\eta) d\eta$$

$$f(x) = e^{-iax} \int_0^{1-x} e^{-iau} H_0^{(2)}(\mu u) du \quad (1.22)$$

$$\gamma_1^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Se_n(0)}{Se_n'(0)} se_n'(\pi) [B_{m+1}^{(n)} - B_{m-1}^{(n)}] \quad (B_{-1}^{(n)} - B_0^{(n)} = 0) \quad (1.23)$$

В соответствии с формулами (1.15), (1.19)

$$b_{jn} = \frac{\exp(ij\psi)}{2\sqrt{1-M^2}} \alpha_+^{(n)} \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m [A^{(m)} + (-1)^n B^{(m)}] \quad (1.24)$$

Формулы (1.13), (1.14), (1.24) полностью определяют функцию Φ_{j1} .

Функция $\Psi_j(x_j, y_j)$ определяется теми же формулами (1.11)–(1.24), если коэффициенты θ_m заменить на δ_m ($m = 0, 1, \dots$).

§ 2. Перейдем к расчету аэродинамической интерференции профилей в решетке. В условие непротекания (1.7) входят производные по y_j от функций Φ_j, Ψ_j . Из выражений (1.11), (1.14), (1.24) имеем, что в точках отрезка $y = 0, |x| \leq 1$

$$\frac{\partial \Phi_{j0}}{\partial y_j} = \frac{\exp(ij\psi)}{2\sqrt{1-M^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m \sum_{n=1}^{\infty} (B_{m+1}^{(n)} - B_{m-1}^{(n)}) \chi_{nj}^{(0)} \quad (B_{-1}^{(n)} = B_0^{(n)} = 0) \quad (2.1)$$

$$\chi_{nj}^{(0)}(\xi_j, \eta_j) = \frac{1}{\text{ch}^2 \xi_j - \cos^2 \eta_j} \left[\frac{Se_n'(\xi_j)}{Se_n'(0)} se_n(\eta_j) \text{ch} \xi_j \sin \eta_j + \frac{Se_n(\xi_j)}{Se_n'(0)} se_n'(\eta_j) \text{sh} \xi_j \cos \eta_j \right] \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Phi_{j1}}{\partial y_j} = \frac{\exp(ij\psi)}{\sqrt{1-M^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{nj}^{(1)} \alpha_+^{(n)} [A^{(m)} + (-1)^n B^{(m)}] \quad (2.3)$$

$$\chi_{nj}^{(1)}(\xi_j, \eta_j) = -\frac{1}{\text{ch}^2 \xi_j - \cos^2 \eta_j} \left[\frac{Ce_n'(\xi_j)}{Ce_n(0)} ce_n(\eta_j) \text{sh} \xi_j \cos \eta_j - \frac{Ce_n(\xi_j)}{Ce_n(0)} ce_n'(\eta_j) \text{ch} \xi_j \sin \eta_j \right] - i\alpha \frac{Ce_n(\xi_j)}{Ce_n(0)} ce_n(\eta_j) + (\alpha^2 - \nu^2) e^{iax_j} J_{jn}(x_j) \quad (2.4)$$

$$J_{jn}(x_j) = \int_0^{x_j} e^{-iau} \frac{Ce_n(\bar{\xi})}{Ce_n(0)} ce_n(\bar{\eta}) du \quad (2.5)$$

В выражениях (2.2)–(2.4) переменные ξ_j , η_j связаны с переменной η равенствами (1.2), (1.9), в которых следует положить $x = \cos \eta$, $y = 0$. Переменные ξ , η в интервале (2.5) связаны с переменной u теми же соотношениями (1.2), (1.9), в которых x следует заменить на u ($x_j \leq u < \infty$).

Подставляя выражения (2.1), (2.3) в условие непротекания (1.7), получим следующее уравнение для определения коэффициентов $\delta_0, \delta_1, \dots$

$$\frac{1}{2} \delta_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \delta_m \cos m\eta + \sum_{m=0}^{\infty} (\delta_m + \theta_m) \chi_m(\eta) = 0 \quad (2.6)$$

$$\chi_m(\eta) = \sum_j' e^{i(j\psi - \alpha x_j)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} (B_{m+1}^{(n)} - B_{m-1}^{(n)}) \chi_{nj}^{(0)} + \right. \\ \left. + \alpha_+^{(n)} \chi_{nj}^{(1)} [A^{(m)} + (-1)^n B^{(m)}] \right\} \quad (B_{-1}^{(n)} = B_0^{(n)} = 0) \quad (2.7)$$

Можно показать, что функции $\chi_{nj}^{(0)}$, $\chi_{nj}^{(1)}$ при $|j| \gg 1$ имеют порядок $C|j|^{-3/2}$. Здесь C — постоянная, не зависящая от j . Это обеспечивает сходимость рядов по j в выражении (2.7).

Решение уравнения (2.6) удобно искать методом коллокации. Ограничиваясь в разложениях (1.10) первыми N членами и требуя выполнения равенства (2.6) в N точках исходного профиля ($\eta_k = (k-1)\pi / (N-1)$, $k = 1, 2, \dots, N$), получим линейную систему из N алгебраических уравнений. Решение этой системы определяет коэффициенты $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{N-1}$, а вместе с ними — и потенциал скорости нестационарного обтекания решетки пластин.

Давление потока в точках исходного профиля определяется из уравнения Коши — Лагранжа. Тогда перепад давления, действующего на профиль,

$$\Delta p(x, 0, t) = \frac{2}{\sqrt{1-M^2}} \rho V^2 \sum_{m=0}^{\infty} (\theta_m + \delta_m) \Psi_m(\eta) \frac{1}{\sin \eta} \quad (2.8)$$

$$\Psi_m(\eta) = e^{-i\alpha \cos \eta} \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (B_{m+1}^{(n)} - B_{m-1}^{(n)}) [se_n'(\eta) + i\alpha \sin \eta se_n(\eta)] \frac{Se_n(0)}{Se_n'(0)} + \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)} ce_n(\eta) \alpha_+^{(n)} [A^{(m)} + (-1)^n B^{(m)}] \right\} \quad (2.9)$$

Нестационарные части подъемной силы P и момента M относительно середины профиля определяются формулами

$$P = 1/2 \rho V^2 b C_y, \quad M = 1/2 \rho V^2 b^2 C_m \quad (b = 2c) \quad (2.10)$$

$$C_y = \frac{2}{\sqrt{1-M^2}} \sum_{m=0}^{\infty} (\theta_m + \delta_m) P_m, \quad C_m = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \sum_{m=0}^{\infty} (\theta_m + \delta_m) M_m \\ P_m = \int_0^{\pi} \Psi_m(\eta) d\eta, \quad M_m = \int_0^{\pi} \cos \eta \Psi_m(\eta) d\eta \quad (2.11)$$

§ 3. В качестве примера на ЭВМ был проведен расчет нестационарных аэродинамических сил и моментов, действующих на профили решетки, совершающих изгибно-крутильные колебания по закону

$$Vv_y(x)e^{i\omega t} = -\alpha V + y' + c\alpha a' \quad (3.1)$$

Здесь $\alpha(t)$ — угол поворота профиля (пластинки) относительно оси x ; $y(t)$ — вертикальное перемещение оси вращения (середины профиля). В этом случае

$$\theta_0 e^{ivt} = 2[-\alpha + 2iky/b], \quad \theta_{1e}^{ivt} = ika, \quad \theta_m = 0 \quad (m \geq 2) \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} C_y &= C_{yy}y/b + C_{y\alpha}\alpha, & C_m &= C_{my}y/b + C_{m\alpha}\alpha \\ C_{yy} &= C'_{yy} + iC''_{yy}, \dots, & C_{m\alpha} &= C'_{m\alpha} + iC''_{m\alpha} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Наряду с безразмерными коэффициентами $C_{yy}, \dots, C_{m\alpha}$, определялись аэродинамические коэффициенты влияния $l_n^y, m_n^y, l_n^\alpha, m_n^\alpha$, связанные с коэффициентами $C_{yy}, \dots, C_{m\alpha}$ формулами [10, 13]

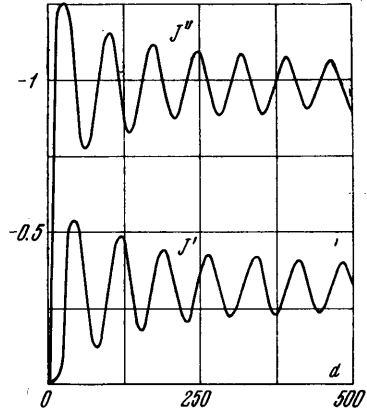
$$l_n^y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{yy} e^{-in\psi} d\psi, \dots \quad (3.4)$$

$$m_n^\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{m\alpha} e^{-in\psi} d\psi \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

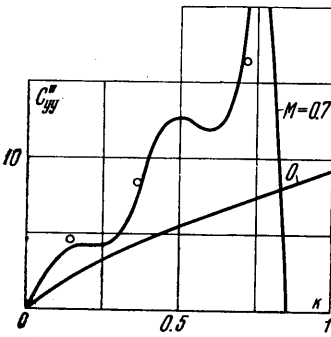
Следует отметить, что предложенный алгоритм решения задачи о колебаниях решетки профилей в дозвуковом потоке газа удобен для расчета аэродинамических коэффициентов влияния. Основное время работы ЭВМ тратится на расчет функций $\chi_{nj}^{(0)}, \chi_{nj}^{(1)}$, которые не зависят от сдвига фазы ψ . Поэтому достаточно вычислить эти функции один раз и тогда переход к новому значению сдвига фазы ψ требует проведения незначительного объема расчетов.

При составлении программы расчета на ЭВМ возникли определенные трудности.

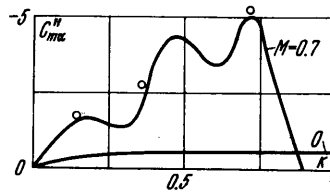
Прежде всего, нужно было составить программы расчета большого числа функций Маттье в широком диапазоне изменения аргумента. Все расчеты функций Маттье проводились по методике работы [15]. При этом оказалось, что метод расчета коэффициентов $A_m^{(n)}, B_m^{(n)}$ ([15], гл. 3) обладает плохой устойчивостью к погрешности расчета собственных значений. Этот метод был несколько видоизменен путем выбора в качестве исходной искомой величины коэффициента $A_n^{(n)}$ ($B_n^{(n)}$), что привело к устойчивости расчетной схемы.



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Другая трудность возникла при вычислении несобственных интегралов J_{jn} ($j = \pm 1, \dots; n = 0, 1, \dots$), определяемых формулой (2.5). Если через d обозначить нижний предел в формуле (2.5), то типичная зависимость J_{jn} от d имеет вид, указанный на фиг. 2 (J', J'' — вещественная и мнимая части J_{jn}). Налицо весьма медленная сходимость величины $J(d)$ к своему предельному значению J_{jn} при $d \rightarrow \infty$. С другой стороны, если провести огибающую через экстремальные точки функций $J'(d), J''(d)$, то кривые, расположенные симметрично между огибающими функции J' или J'' , быстро стремятся к значениям интеграла J_{jn} . Эта особенность и была использована в расчетной схеме.

¹ С аналогичной трудностью авторы столкнулись в работе [13], где расчет интегралов проводился непосредственно для $d = 100-150$. Более точные расчеты подтвердили результаты, приведенные в работе [13], кроме случая малых значений числа Струаля и сдвига фаз $\psi = 0$, где погрешность расчета при $d = 150$ превышает 1%.

В соответствии с опытом работы [13], условие непротекания (2.6) выполнялось в шести точках на исходном профиле. При этом в выражении (2.7) для функции χ_m учитывалось влияние 30 профилей сверху и снизу от исходного.

Прежде всего был проведен расчет стационарных аэродинамических коэффициентов для одиночного профиля, колеблющегося в дозвуковом потоке газа. Полученные результаты полностью совпали с результатами расчета по методу М. Д. Хаскинда [14], приведенными в работе [16].

γ°	β°	$M = 0$	$M = 0.5$	$M = 0.7$	$M = 0.8$
l_n^α	0	-1.18 + i 0.11	-1.66 + i 0.09	-2.42 + i 0.32	-3.23 + i 0.63
		5.37 - i 0.10	6.33 - i 0.83	7.32 - i 1.54	8.23 - i 2.93
		-1.18 + i 0.11	-1.66 + i 0.09	-2.42 + i 0.32	-3.23 + i 0.63
	30	-0.68 - i 0.09	-1.09 - i 0.23	-1.63 - i 0.14	-2.58 + i 0.17
		5.28 - i 0.11	5.98 - i 0.58	7.12 - i 1.54	7.77 - i 2.42
		-1.55 + i 0.38	-1.96 + i 0.42	-2.72 + i 0.77	-3.26 + i 0.88
	60	0.20 - i 0.14	0.16 - i 0.40	-0.04 - i 0.95	-0.96 - i 1.66
		4.78 + i 0.46	5.32 + i 0.19	6.42 - i 0.22	7.48 - i 0.96
		-1.86 + i 0.69	-2.12 + i 0.81	-2.42 + i 1.14	-3.08 + i 1.56
m_n^α	0	-0.21 + i 0.03	-0.31 + i 0.05	-0.45 + i 0.27	-0.55 + i 0.66
		1.29 - i 0.37	1.47 - i 0.63	1.58 - i 1.05	1.42 - i 1.80
		-0.21 + i 0.03	-0.31 + i 0.05	-0.45 + i 0.27	-0.55 + i 0.66
	30	-0.03 - i 0.04	-0.09 - i 0.08	-0.15 - i 0.01	-0.24 + i 0.27
		1.27 - i 0.33	1.38 - i 0.54	1.52 - i 0.99	1.41 - i 1.49
		-0.38 + i 0.11	-0.49 + i 0.17	-0.67 + i 0.43	-0.80 + i 0.75
	60	0.18 - i 0.06	0.18 - i 0.14	0.09 - i 0.29	-0.28 - i 0.27
		1.14 - i 0.18	1.25 - i 0.32	1.48 - i 0.61	1.56 - i 1.13
		-0.53 + i 0.18	-0.61 + i 0.26	-0.66 + i 0.42	-0.70 + i 0.73
l_n^γ	0	0.09 + i 0.47	0.09 + i 0.65	0.20 + i 0.16	0.33 + i 1.24
		-0.32 - i 2.07	-0.56 - i 2.44	-0.85 + i 0.94	-1.40 + i 3.08
		0.09 + i 0.47	0.09 + i 0.65	0.20 + i 0.16	0.33 + i 1.24
	30	-0.03 + i 0.29	-0.08 + i 0.45	-0.03 + i 0.66	0.10 + i 1.01
		-0.26 - i 2.05	-0.45 - i 2.31	-0.84 - i 2.72	-1.18 - i 2.93
		0.23 + i 0.59	0.24 + i 0.75	0.41 + i 1.03	0.47 + i 1.23
	60	-0.09 - i 0.06	-0.19 - i 0.04	-0.40 + i 0.06	-0.65 - i 0.43
		-0.01 - i 1.89	-0.12 - i 2.09	-0.31 - i 2.49	-0.61 - i 2.86
		0.37 + i 0.70	0.42 + i 0.80	0.56 + i 0.91	0.75 + i 1.14
m_n^γ	0	0.03 + i 0.08	0.03 + i 0.12	0.11 + i 0.17	0.26 + i 0.20
		-0.24 - i 0.50	-0.23 - i 0.56	-0.38 - i 0.59	-0.64 - i 0.51
		0.03 + i 0.08	0.03 + i 0.12	0.11 + i 0.17	0.26 + i 0.20
	30	-0.01 + i 0.02	-0.03 + i 0.04	+ i 0.06	0.11 + i 0.09
		-0.12 - i 0.49	-0.19 - i 0.54	-0.35 - i 0.57	-0.52 - i 0.52
		0.06 + i 0.14	0.08 + i 0.19	0.19 + i 0.25	0.31 + i 0.28
	60	-0.03 - i 0.07	-0.06 - i 0.07	-0.11 - i 0.03	-0.09 + i 0.11
		-0.05 - i 0.46	-0.10 - i 0.49	-0.20 - i 0.57	-0.39 - i 0.58
		0.10 + i 0.20	0.13 + i 0.23	0.20 + i 0.24	0.32 + i 0.24

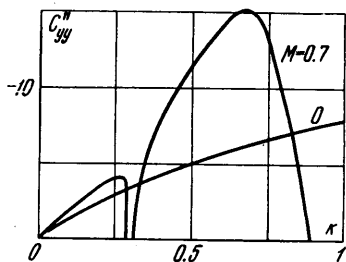
Расчет нестационарных аэродинамических коэффициентов для решетки профилей проводился в широком диапазоне изменений параметров решетки и потока. Для иллюстрации в таблице приведены коэффициенты влияния l_n^α , m_n^α , l_n^γ , m_n^γ для решетки с густотой $\tau = 1$, значения числа Струхала $k = 0.2$, числа Маха $M = 0, 0.5, 0.7, 0.8$ и угла выноса $\beta = 0, 30, 60^\circ$. В таблице приведены коэффициенты влияния от верхнего, исходного и нижнего профилей ($n = +1, 0, -1$), так как именно эти коэффициенты определяют основную часть аэродинамической нагрузки на исходный профиль при колебаниях всех профилей решетки. Результаты при $M = 0$ получены по методу работы [13]. Данные таблицы дают некоторое представление о соотношении между коэффици-

ценатами влияния исходного и соседних профилей, а также их зависимости от числа Маха и угла выноса решетки. Однако этих данных недостаточно, чтобы вскрыть основные особенности нестационарного дозвукового течения газа через решетку пластин.

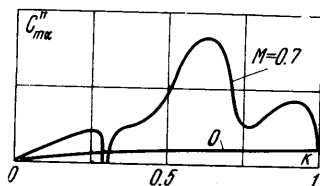
В работах [2, 8, 11] указана возможность возникновения аэродинамического резонанса (резкого изменения величины аэродинамических сил, в частности, аэродинамического демпфирования) при определенных соотношениях между параметрами решетки и потока. Так, в работе [9] ядро интегрального уравнения обращается в бесконечность при

$$\psi = \frac{2k}{\tau \cos \beta} \left[\operatorname{tg} \beta \pm \frac{M}{\sqrt{1-M^2}} \right] \quad (3.5)$$

Для случая решетки без выноса, профили которой колеблются в противофазе ($\beta = 0^\circ, \psi = 0$), формула (3.5) приведена в работе [2], где она определяет режим аэродинамического резонанса в поперечном к потоку направлении. В работе [11] показано, что для решетки без выноса может возникнуть аэродинамический резонанс, не зависящий от сдвига фазы между колебаниями соседних профилей. Этот резонанс может быть как в поперечном, так и в продольном к потоку направлениях. Для решетки с выносом понятия продольного или поперечного резонанса теряют смысл, но явление аэродинамического (акустического) резонанса безусловно должно иметь место.



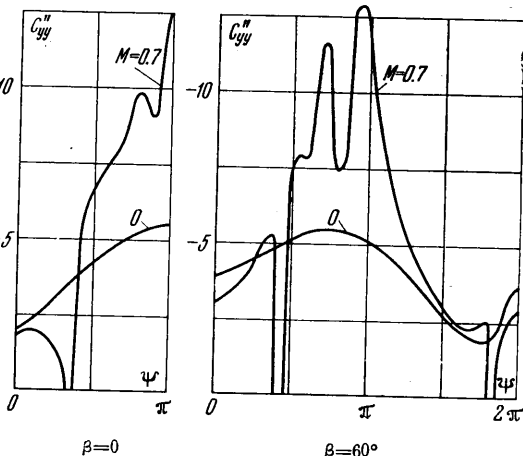
Фиг. 5



Фиг. 6

Представляет интерес определить возможность аэродинамического резонанса в решетке с выносом на основе предлагаемого решения задачи. Ограничимся для примера рассмотрением коэффициентов C''_{yy} , C''_{mk} , которые характеризуют величину аэродинамического демпфирования при изгибных и крутильных колебаниях профилей. На фиг. 3,4 показана зависимость C''_{yy} , C''_{mk} от числа Струхали k для решетки с густотой $\tau = 1$ и углом выноса $\beta = 0^\circ$. Сдвиг фазы $\psi = \pi$, число $M = 0, 0.7$. Результаты для

$M = 0$ всюду взяты на основе работы [13]. Расчетные точки: $k = 0, 0.2, 0.275, 0.35, 0.5, 0.65, 0.75, 0.85, 1$. Точками на фиг. 3,4 показаны соответствующие результаты для $M = 0.7$, полученные на основе работы [9]. Аналогичные результаты для решетки с углом выноса $\beta = 60^\circ$ даны на фиг. 5,6. Данные, приведенные на фиг. 3-6, показывают существенную зависимость коэффициентов C''_{yy} , C''_{mk} от числа M . Более того, имеет место аэродинамический резонанс, который для решетки без выноса возникает вблизи $k = 1$, а для решетки с выносом $\beta = 60^\circ$ — вблизи $k = 0.3$ и $k = 1$. Аналогичный вид имеет зависимость от k и для других аэродинамических коэффициентов. Интересно отметить, что по формуле



Фиг. 7

(3.5) для указанных значений параметров аэродинамический резонанс возникает для решетки с $\beta = 0$ при $k = 1.6$, а для $\beta = 60^\circ$ — при $k = 0.29$.

Для решетки с выносом это резонансное значение k хорошо согласуется с результатами расчета. Другой тип резонанса, определяемый по формулам работы [11], должен наступить при $k = 1.14$. Это значение k тоже согласуется с расчетом.

На фиг. 7 представлены результаты расчета коэффициента C_{yl} в зависимости от сдвига фазы ψ при $\tau = 1$, $\beta = 0$, 60° , $k = 0.5$ и $M = 0, 0.7$. Расчет проводился с шагом $\Delta\psi = 1/10$ л. Здесь снова имеет место аэродинамический резонанс, который хорошо согласуется с формулой (3.5).

Приведенные результаты позволяют сделать вывод, что сжимаемость потока, в отличие от случая несжимаемой жидкости, качественно меняет зависимость нестационарных аэродинамических коэффициентов от параметров решетки и потока. При некоторых сочетаниях этих параметров в решетке может возникнуть явление аэродинамического резонанса, которое сопровождается резким падением аэродинамического демпфирования колебаний лопаток турбомашин, что может привести к их автоколебаниям.

Поступило 18 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Runyan H. L., Watkins C. E. Considerations of the effects of wind-tunnel walls on oscillating air forces for two-dimensional subsonic compressible flow. NACA TN, 1951, No. 2552.
2. Wollston D. S., Runyan H. L. Some considerations on the air forces on a wing oscillating between two walls for subsonic compressible flow. JAS, 1955, No. 1.
3. Jones W. P. Wind-tunnel wall interference effects on oscillating aerofoils in subsonic flow. ARC R. and M., 1957, No. 2943.
4. Намато I. Minute harmonic oscillation of flat plate cascade in subsonic flow. Proc. 7-th Japan Nat. Congress Appl. Mech., 1957, Tokyo, 1958.
5. Meister E. Beitrag zur Aerodynamik eines schwingenden Gitters, II, Z. angew. Math. und Mech., 1962, B. 42, No 1/2.
6. Meister E. Beitrag zur Aerodynamik eines schwingenden Gitters, III (Unterschallströmung), Z. angew. Math. und Mech., 1962, B. 42, No. 6.
7. Meister E. Zur Theorie instationären Gitterströmungen. Z. angew. Math. und Mech., 1963, B. 43, sonderheft.
8. Курзин В. Б. Колебание решетки тонких профилей в сжимаемом дозвуковом потоке. ПМТФ, 1962, № 1.
9. Курзин В. Б. Расчет нестационарного обтекания решетки тонких профилей дозвуковым потоком газа методом интегральных уравнений. ПМТФ, 1964, № 2.
10. Курзин В. Б. К расчету сил при произвольных малых колебаниях профилей в решетке. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1964, № 2.
11. Курзин В. Б. Об аэродинамической интерференции профилей в дозвуковом нестационарном потоке. Изв. АН СССР, Механика жидкостей и газов, 1966, № 1.
12. Горелов Д. Н. Пространственное обтекание лопаточного венца осевой турбомашин дозвуковым нестационарным потоком газа, Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 6.
13. Горелов Д. Н., Доминас Л. В. Расчет аэродинамических сил и моментов, действующих на решетку пластин, колеблющихся в плоском потоке несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
14. Хаскинд М. Д. Колебания крыла в дозвуковом потоке газа, ПММ, 1947, вып. 1.
15. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье, Изд. иностр. литер., 1953.
16. Blanch G., Fettis H. E. Subsonic oscillatory aerodynamic coefficients computed by the method of Reissner and Haskind, JAS, 1953, No. 12.