

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ СЛОЯ ЖИДКОСТИ МОДЕЛИ ГРДА ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

А. Т. ЛИСТРОВ

(Воронеж)

Исследуется устойчивость течения слоя жидкости модели Грда [1, 2], стекающей по наклонной плоскости под действием силы тяжести.

Предполагается, что в каждой точке рассматриваемого материального континуума, наряду с обычным вектором скорости v , определен вектор угловой скорости ω , внутренние моментные напряжения пренебрежимо малы, а тензор силовых напряжений τ_{kj} в общем случае несимметричен. Модель характеризуется обычной ньютоновской вязкостью η , неньютоновской вязкостью «катания» η_r и временем релаксации $\tau = \rho J/4 \eta_r$, где J — скалярная константа среды с размерностью момента инерции на единицу массы, ρ — плотность. Принимается, что среда несжимаема, коэффициенты η , η_r , J — постоянны [2].

Точное решение уравнений движения, соответствующее течению слоя с плоской поверхностью, совпадает с решением уравнений Навье — Стокса в случае течения слоя ньютоновской жидкости. Уравнения для трехмерных периодических возмущений существенно отличаются от соответствующих уравнений задачи устойчивости течения слоя ньютоновской среды. Показано, что для параллельных течений жидкости модели Грда справедлива теорема Сквайра.

Устойчивость течения слоя по отношению к длинноволновым возмущениям исследуется методом последовательных приближений, предложенным в работах [3, 4].

1. Для исследования устойчивости течения слоя толщиной h , стекающего под действием силы тяжести по плоскости, наклоненной к горизонту под углом γ , запишем уравнения движения жидкости модели Грда [2] в следующей безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \frac{dv_k}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{R} \Delta v_k + f_k + \frac{1}{RD} [\nabla \times (2\omega - \nabla \times v)]_k \\ \frac{d\omega_k}{dt} &= -\frac{1}{RDE} [2\omega_k - (\nabla \times v)_k], \quad \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \\ D &= \frac{\eta}{\eta_r}, \quad E = \frac{J}{2d^2}, \quad R = \frac{Uhp}{\eta}, \quad U = \frac{\rho gh^2 \sin \gamma}{3\eta} \\ \nabla &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right\}, \quad \Delta = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right\} \\ f_1 &= \frac{3}{R}, \quad f_2 = \frac{3 \operatorname{ctg} \gamma}{R}, \quad f_3 = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь f_1, f_2, f_3 — безразмерные проекции силы тяжести на оси безразмерных декартовых координат, x_1, x_2, x_3 — проекции вектора угловой скорости ω_k — отнесены к величине U/h , давление p , время t , координаты x_1, x_2, x_3 отнесены соответственно к величинам $\rho U^{-1}, hU^{-1}, h$, индексом k отмечены проекции векторов на оси координат, g — ускорение силы тяжести, проекции вектора скорости v_k отнесены к величине U .

Безразмерные компоненты тензора вязких напряжений π_{kj} удовлетворяют соотношениям [2]

$$\begin{aligned} \pi_{kj} &= \rho \delta_{kj} + \tau_{kj}, \quad \pi_{kj}^s = \pi_{kj}^s + \pi_{kj}^a, \quad \pi_{kj}^s = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \\ \pi_{12}^a &= E \frac{d\omega_3}{dt}, \quad \pi_{31}^a = E \frac{d\omega_2}{dt}, \quad \pi_{23}^a = E \frac{d\omega_1}{dt} \quad (k, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь $d\omega_k/dt$ определяется согласно (1.1).

Уравнения (1.1), (1.2) имеют точное решение

$$\begin{aligned} v_1^\circ &= \frac{3}{2}(1 - x_2^2), & \omega_3^\circ &= \frac{3}{2}x_2, & \tau_{12}^\circ &= -3R^{-1}x_2 \\ \tau_{33}^\circ &= \tau_{11}^\circ = \tau_{22}^\circ = -p^\circ = -3R^{-1} \operatorname{ctg} \gamma x_2 - p_a \end{aligned} \quad (1.3)$$

которое соответствует установившемуся течению слоя (фиг. 1) с плоской поверхностью при условии, что

$$v_1^\circ(1) = 0, \quad \tau_{12}^\circ(0) = 0, \quad \tau_{22}^\circ(0) = -p_a \quad (1.4)$$

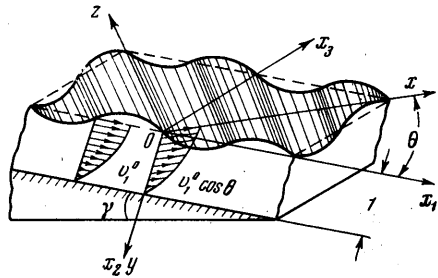
где p_a — атмосферное давление, отнесенное к величине ρU^2 .

2. Рассмотрим устойчивость решения (1.3) по отношению к трехмерным периодическим возмущениям вида

$$q_j' = q_j^* (x_2) \exp [i\alpha^* (x_1 - C^*t) - i\beta^* x_3], \quad C^* = C_r^* + iC_i^* \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

где q_i' — элементарные волновые возмущения проекций векторных характеристик основного течения (1.3), q_i^* — комплексные амплитуды, величины α^* , β^* , C_r^* , C_i^* — вещественные постоянные.

Любое периодическое трехмерное возмущение вида (2.1) представляет собой трехмерную цилиндрическую волну, распространяющуюся под углом θ к направлению течения (фиг. 1). Поэтому в системе координат $x y z$, ось x которой ортогональна фронту волны, возмущение вида (2.1) имеет форму



Фиг. 1

$$q_j' = q_j^* (y) e^{i\alpha (x - Ct)}, \quad C = C^* \cos \theta \quad (2.2)$$

$$\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\beta^* / \alpha^*), \quad \alpha^2 = \alpha^{*2} + \beta^{*2} \quad (j = x, y, z)$$

Для того чтобы решение (1.3) записать в системе координат $x y z$, воспользуемся известными формулами преобразования тензорных и векторных величин [2]

$$\tau_{km}^\circ = l_{ki} l_{mj} \tau_{ij}^\circ, \quad v_m^\circ = l_{mj} v_j^\circ \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (k, m = x, y, z) \quad (2.3)$$

Здесь l_{ki} , l_{mj} — косинусы углов между осями x, y, z и x_1, x_2, x_3 .

Решение (1.3) в системе координат $x y z$ с учетом (2.3) имеет вид

$$v_x^\circ = v_1^\circ \sin \theta, \quad v_y^\circ = 0, \quad v_z^\circ = -v_1^\circ \sin \theta, \quad \omega_x^\circ = \omega_3^\circ \sin \theta, \quad \omega_y^\circ = 0$$

$$\omega_z^\circ = \omega_3^\circ \cos \theta, \quad \tau_{xx}^\circ = \tau_{11}^\circ, \quad \tau_{yy}^\circ = \tau_{22}^\circ, \quad \tau_{yz}^\circ = -\tau_{21}^\circ \sin \theta$$

$$\tau_{yx}^\circ = \tau_{21}^\circ \cos \theta \quad (2.4)$$

В (2.4) выписаны только те отличные от нуля компоненты, которые требуются для исследования устойчивости решения (1.3).

Следуя линейной теории устойчивости [5], рассмотрим в системе координат $x y z$ нестационарные трехмерные течения, близкие к основному течению (2.4). Параметры течения, близкого к основному, представим в форме $q = q^\circ (y) + q' (x, y, t)$, где q' — малое возмущение параметра q° невозмущенного слоя.

В системе координат xuz линеаризированные обычным образом [5] уравнения движения (1.1) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial v_1^0}{\partial y} v' \cos \theta + v_1^0 \frac{\partial u'}{\partial x} \cos \theta &= -\frac{\partial p'}{\partial x} + \left(\frac{D+1}{RD}\right) \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}\right) + \frac{2}{RD} \frac{\partial \omega_z'}{\partial y} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + v_1^0 \frac{\partial v'}{\partial x} \cos \theta &= -\frac{\partial p'}{\partial y} + \left(\frac{D+1}{RD}\right) \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2}\right) - \frac{2}{RD} \frac{\partial \omega_z'}{\partial x} \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + v_1^0 \frac{\partial w'}{\partial x} \cos \theta - v' \frac{dv_1^0}{dy} \sin \theta &= \left(\frac{D+1}{RD}\right) \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2}\right) + \frac{2}{RD} \left(\frac{\partial \omega_y'}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x'}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial \omega_x'}{\partial t} + v_1^0 \frac{\partial \omega_x'}{\partial x} \cos \theta + \frac{d\omega_s^0}{dy} v' \sin \theta &= -\frac{1}{RDE} \left(2\omega_x' - \frac{\partial w'}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial \omega_y'}{\partial t} + v_1^0 \frac{\partial \omega_y'}{\partial x} \cos \theta &= -\frac{1}{RDE} \left[2\omega_y' + \frac{\partial w'}{\partial x}\right] \\ \frac{\partial \omega_z'}{\partial t} + v_1^0 \frac{\partial \omega_z'}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial \omega_s^0}{dy} v' \cos \theta &= \frac{1}{RDE} \left[2\omega_z' - \left(\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}\right)\right] \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $u', v', w', \omega_x', \omega_y', \omega_z'$ — малые возмущения проекций вектора скорости и вектора угловой скорости на оси x, y, z .

Принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} u' &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi = \varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad w = w^*(y) e^{i\alpha(x-ct)} \\ \omega_k' &= \omega_k^*(y) e^{i\alpha(x-ct)}, \quad p' = f(y) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (k = x, y, z) \end{aligned} \quad (2.6)$$

из (2.5) получаем уравнения для комплексных амплитуд возмущений в виде

$$\begin{aligned} i\alpha \frac{d\varphi}{dy} (v_1^0 \cos \theta - C) - i\alpha \varphi \frac{dv_1^0}{dy} \cos \theta &= -i\alpha f + \frac{2i}{RD} \frac{d\omega_z^*}{dy} + \\ &+ \left(\frac{D+1}{RD}\right) \left(\frac{d^3\varphi}{dy^3} - \alpha^2 \frac{d\varphi}{dy}\right) \\ \alpha^2 \varphi (v_1^0 \cos \theta - C) &= \frac{df}{dy} + \left(\frac{D+1}{RD}\right) \left(i\alpha^3 \varphi - i\alpha \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right) - \frac{2i}{RD} i\alpha \omega_z^* \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} i\alpha w^* (v_1^0 \cos \theta - C) + i\alpha \varphi \frac{dv_1^0}{dy} \sin \theta &= \left(\frac{D+1}{RD}\right) \left(\frac{d^2 w^*}{dy^2} - \alpha^2 w^*\right) + \\ &+ \frac{2}{RD} \left(i\alpha \omega_y^* - \frac{d\omega_x^*}{dy}\right) \end{aligned}$$

$$\omega_x^* = L \left[\frac{1}{RDE} \frac{dw^*}{dy} + \frac{d\omega_s^0}{dy} i\alpha \varphi \sin \theta \right], \quad \omega_y^* = -\frac{i\alpha L}{RDE} w^*$$

$$\omega_z^* = L \left[\frac{1}{RDE} \left(\alpha^2 \varphi - \frac{d^2 \varphi}{dy^2} \right) + \frac{d\omega_s^0}{dy} i\alpha \varphi \cos \theta \right]$$

$$L = \left(\frac{2}{RDE} - i\alpha C + v_1^0 i\alpha \cos \theta \right)^{-1}$$

Исключив из первых двух уравнений (2.7) амплитуду f , получим уравнение для φ

$$\frac{d^4\varphi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \alpha^4\varphi = \frac{2}{D+1} \left(\frac{d^2\omega_z^*}{dy^2} - \alpha^2\omega_z^* \right) + \\ + i\alpha \left(\frac{RD}{D+1} \right) \left[(v_1^\circ \cos \theta - C) \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - \alpha^2\varphi \right) - \frac{d^2v_1^\circ}{dy^2} \varphi \cos \theta \right] \quad (2.8)$$

где ω_z^* определяется согласно (2.7).

Обратимся к граничным условиям для φ и w^* . На твердой поверхности y возмущения u' , v' , w' обращаются в нуль. Поэтому для φ и w^* при $y = 1$ выполняются условия

$$\varphi(1) = \frac{d\varphi(1)}{dy} = w^*(1) = 0 \quad (2.9)$$

Возмущенная поверхность слоя имеет цилиндрическую форму (фиг. 1); поэтому на плоскости $y = 0$ имеем кинематическое условие

$$v' = v_1^\circ(0) \frac{\partial y'}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial y'}{\partial t} \quad (2.10)$$

где $y' = y'(x, t)$ — уравнение возмущенной поверхности слоя.

Предположим, что на возмущенную поверхность слоя действует только атмосферное давление и давление, возникающее от поверхностного натяжения. Изменением величины коэффициента поверхностного натяжения и трением о воздух пренебрегаем. При условии, что $p_a = \text{const}$, линеаризация динамических условий на поверхности слоя приводит к соотношениям

$$\frac{d\tau_{yx}^\circ(0)}{dy} y' + \tau_{xy}^\circ(0) = 0, \quad \frac{d\tau_{yz}^\circ(0)}{dy} y' + \tau_{yz}^\circ(0) = 0 \\ \frac{d\tau_{yy}^\circ(0)}{dy} y' + \tau_{yy}^\circ(0) + S \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \left(S = \frac{T}{\rho u_c^2 d} \right) \quad (2.11)$$

Здесь T — коэффициент поверхностного натяжения, τ_{yz}° , τ_{yx}° , τ_{yy}° вычисляются в соответствии с (2.4), (1.3), а их возмущения τ_{yz}' , τ_{yx}' , τ_{yy}' должны быть выражены через φ , w^* , f при помощи соотношений (1.2), (1.1), (2.6), (2.7). В результате граничные условия (2.11) примут вид

$$\frac{3\varphi(0) \cos \theta}{R(C - s/2 \cos \theta)} - \frac{1}{R} \frac{d^2\varphi(0)}{dy^2} + \alpha^2\varphi(0) + \\ + \frac{1}{RD} \left[2\omega_z^*(0) - (\alpha^2\varphi(0) - \frac{d^2\varphi(0)}{dy^2}) \right] = 0 \\ \frac{3\varphi(0) \text{ctg } \gamma}{C - s/2 \cos \theta} - Rf(0) + 2i\alpha \frac{d\varphi(0)}{dy} + S'\alpha^2 \frac{\varphi(0)}{C - s/2 \cos \theta} = 0 \quad (2.12) \\ \frac{3\varphi(0) \sin \theta}{C - s/2 \cos \theta} + \frac{dw^*(0)}{dy} - \frac{1}{D} \left[2\omega_x^*(0) - \frac{dw^*(0)}{dy} \right] = 0, \quad S' = SR$$

Здесь ω_x^* , ω_y^* , ω_z^* , $f(0)$ выражены через φ и w' при помощи (2.7). При получении соотношений (2.12) было учтено, что, в соответствии с (2.10) и (2.6), уравнение возмущенной поверхности имеет вид

$$y' = \frac{\varphi(0)}{C - s/2 \cos \theta} e^{i\alpha(x - Ct)}$$

Отметим, что для параллельного течения жидкости модели Града выполняется теорема Сквайра. Действительно, первые два из уравне-

ний (2.7) не содержат w^* , так как w_z^* не зависит от w^* . При этом уравнения и граничные условия для φ , f , C и w_z^* соответствуют плоской задаче устойчивости течения с профилем скорости $v_1^\circ \cos \theta$. Таким образом, при исследовании устойчивости параллельного течения жидкости модели Града достаточно ограничиться рассмотрением поведения плоских возмущений.

3. Для случая длинноволновых плоских возмущений представим φ , ω_z^* и C в виде бесконечных рядов по малому параметру [3,4] α .

Ограничиваясь здесь двумя приближениями, имеем

$$\varphi = \varphi^\circ + \alpha\varphi', \quad \omega_z^* = \omega_z^{*\circ} + \alpha\omega_z^{*'}, \quad C = C^\circ + \alpha C' \quad (3.1)$$

Для φ° , $\omega_z^{*\circ}$, C° получаем из (2.8), (2.7), (2.12) соотношения

$$\begin{aligned} \frac{d^4\varphi^\circ}{dy^4} = 0, \quad \omega_z^{*\circ} = -\frac{1}{2} \frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2}, \quad \varphi^\circ(1) = \frac{d\varphi^\circ(1)}{dx} = 0 \\ \frac{3\varphi^\circ(0)}{C^\circ - 3/2} - \frac{d^2\varphi^\circ(0)}{dy^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi^\circ(0)}{dy^3} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Интегрируя (3.2), находим

$$\varphi^\circ = (1 - y)^2, \quad C^\circ = 3, \quad \omega_z^{*\circ} = -1 \quad (3.3)$$

Уравнения и граничные условия, необходимые для определения φ' , $\omega_z^{*'}$ и C' , имеют вид

$$\begin{aligned} (1 + D) \frac{d^4\varphi'}{dy^4} = iRDE \left[\frac{d\omega_3^\circ}{dy} \frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2v_1^\circ}{dy^2} \frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} + \frac{dv_1^\circ}{dy} \frac{d^3\varphi^\circ}{dy^3} \right] + \\ + iRD \left[(v_1^\circ - C^\circ) \frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} - \frac{d^2v_1^\circ}{dz^2} \varphi^\circ \right] \\ \omega_z^{*'} = -\frac{1}{2} \frac{d^2\varphi'}{dy^2} + iRDE \left[\frac{\varphi^\circ}{2} \frac{d\omega_3^\circ}{dy} + \frac{(v_1^\circ - C^\circ)}{4} \frac{d^2\varphi^\circ}{dy^2} \right] \\ \frac{1}{C^\circ - 3/2} (3\text{ctg } \gamma + \alpha^2 S') \varphi^\circ(0) + \left(C^\circ - \frac{3}{2} \right) R \frac{d\varphi^\circ(0)}{dy} - \\ - i \frac{(D+1)}{D} \frac{d^3\varphi'(0)}{dy^3} - \frac{2i}{D} \frac{d\omega_z^{*'}(0)}{dy} = 0 \\ - \frac{3\varphi^\circ(0)C'}{(C^\circ - 3/2)^2} + \frac{3\varphi'(0)}{C^\circ - 3/2} - \frac{d^2\varphi'(0)}{dy^2} + \frac{1}{D} \left[2\omega_z^{*'}(0) + \frac{d^2\varphi'(0)}{dy^2} \right] = 0 \\ \varphi'(1) = \frac{d\varphi'(1)}{dy} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Интегрируя (3.4) с учетом (3.3) и (1.3), получаем для C' выражение

$$C' = \frac{i}{2} \left[R \left(\frac{12}{5} + F \right) - \frac{2}{3} (3\text{ctg } \gamma + \alpha^2 S') \right] \quad \left(F = \frac{3}{5(1+D)} + 3E \geq 0 \right) \quad (3.5)$$

Учитывая (3.1) и (3.5), находим, что в области малых значений волнового числа величина C_i имеет вид

$$C_i = 1/2 i\alpha \left[R (12/5 + F) - 2/3 (3\text{ctg } \gamma + \alpha^2 S') \right] \quad (3.6)$$

Из (3.6) видно, что в координатном пространстве α , R , F поверхность нейтральных возмущений $C_i = 0$ при фиксированных γ и S' состоит из плоскости $\alpha = 0$ и поверхности $abcd$, уравнение которой имеет вид

$$R \cdot (12/5 + F) - 2/3 (3 \operatorname{ctg} \gamma + \alpha^2 S') = 0 \quad (3.7)$$

Так как D и E не могут быть отрицательными [2], то согласно (3.5), величина F в (3.7) может принимать лишь положительные значения. При фиксированном F , γ , S' в плоскости $F = \text{const}$ нейтральная кривая состоит из линии $\alpha = 0$ и кривой (3.7). В точке ветвления нейтральной кривой имеем

$$R^* = \frac{5/6 \operatorname{ctg} \gamma}{1 + 5/12 F}, \quad \alpha = 0 \quad (3.8)$$

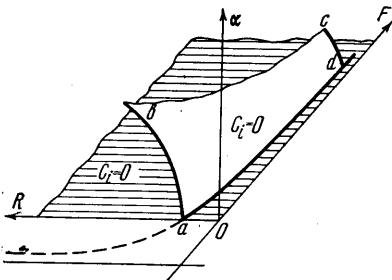
Из (3.8) непосредственно вытекает, что с увеличением F точка ветвления нейтральной кривой асимптотически приближается к оси F (фиг. 2). Если R^* является минимальным критическим числом Рейнольдса, то вращение частиц, из которых состоит точка сплошной среды, оказывает дестабилизирующее влияние на течение слоя.

Используя выражение (3.6) для C_i , нетрудно убедиться, что учет релаксации среды ($F \neq 0$) увеличивает как положительные, так и отрицательные значения C_i . Из (3.3) находим, что при малых значениях α несимметричность тензора напряжений при наличии релаксации среды не оказывает влияния на скорость распространения возмущений.

Поступило 26 I 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. G r a d Н. Statistical mechanics, thermodynamics and fluid dynamics of systems with arbitrary number of integrals. Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 4.
2. Г р о о т, М а з у р П. Неравновесная термодинамика. Изд. «Мир», 1964.
3. Y i h C h i a - S h u n. Stability of liquid flow down an inclined plane. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No 3 (русск. перев: Механика. Сб. перев. и обз. ин. период. литер., 1963, № 5).
4. И в а н и л о в Ю. П. Об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости над наклонным дном. ПММ. 1960, т. 14, вып. 2
5. Л и н ь Ц з я о. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. лит. 1958,



Фиг. 2