# О ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОГО ВИХРЯ

Ю. А. ГОСТИНЦЕВ, А. Д. МАРГОЛИН

*(Москва)*

Известен ряд задач, связанных с круговым движением вязкой несжимаемой жидкости с вращающимся цилиндром [1,2]. В данной работе рассмотрен случай нестационарного кругового движения вязкой жидкости при наличии в ней полости.

Пусть в бесконечном объеме, заполненном жидкостью, создано поле тангенциальной скорости $V_\varphi = \Gamma/2\pi r$ ($\Gamma$ — циркуляция) и вблизи оси имеется круговая цилиндрическая полость разрыва радиуса $r_0$.

Математическая модель течения идеальной жидкости с образованием полого вихря общеизвестна [3]. Выясним изменения в таком движении, связанные с вязкостью жидкости.

Для этого в момент времени $t = 0$ «включим» действие вязкости. За счет сил внутреннего трения потенциальное поле скорости будет изменяться, становясь вихревым. Если при этом движение жидкости остается плоским, то радиус разрыва $r_0$ будет неизменным. Это является следствием того, что в двумерной гидродинамике несжимаемой жидкости для всякого расширения или сжатия полости требуется бесконечное значение энергии [4].

В такой постановке задача описывается системой

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r^2}\right) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V_\varphi}{\partial r} - \frac{V_\varphi}{r} = 0 \quad \text{при } r = r_0, \quad V_\varphi \to 0 \quad \text{при } r \to \infty, \quad V_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r} \text{ при } t = 0$$

Вводя безразмерные величины

$$U = \frac{V_\varphi}{V_{\varphi 0}}, \quad \tau = t\frac{V_{\varphi 0}^2}{\nu}, \quad \xi = r\frac{V_{\varphi 0}}{\nu}, \quad a = r_0\frac{V_{\varphi 0}}{\nu}\left(V_{\varphi 0} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\right)$$

(здесь $V_{\varphi 0}$ — начальное значение скорости на границе разрыва) и, используя новую переменную $\theta = U - a/\xi$, получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\theta}{\xi^2} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\theta}{a} = \frac{2}{a} \quad \text{при } \xi = a, \quad \theta \to 0 \quad \text{при } \xi \to \infty, \quad \theta = 0 \text{ при } \tau = 0$$

Для решения уравнения применим метод преобразования Лапласа. Система (2) после преобразования сведется к уравнению Бесселя для функции мнимого аргумента ($\Theta(p, \xi)$ — изображения функции $\theta(\tau, \xi)$)

$$\xi^2\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} + \xi\frac{d\Theta}{d\xi} - \Theta(p\xi^2 + 1) = 0 \qquad (3)$$

с граничными условиями

$$d\Theta/d\xi - \Theta/a = 2/ap \quad \text{при } \xi = a, \qquad \Theta \to 0 \text{ при } \xi \to \infty$$

Общее решение уравнения Бесселя (3) имеет вид

$$\Theta(p, \xi) = C_1 I_1(\sqrt{p}\xi) + C_2 K_1(\sqrt{p}\xi)$$

Условию при $\xi \to \infty$ удовлетворяет одна функция Макдональда $K_1$, так как $I_1(\sqrt{p}\xi) \to \infty$ при $\xi \to \infty$, поэтому

$$\Theta(p, \xi) = C K_1(\sqrt{p}\xi)$$

С использованием граничного условия при $\xi = a$, получим

$$C = \frac{2}{p\left[a\sqrt{p}K_1'(\sqrt{p}a) - K_1(\sqrt{p}a)\right]}$$

Так как $zK_\nu'(z) = -zK_{\nu+1}(z) + \nu K_\nu(z)$ [5], то окончательно изображение функции $\theta(\tau, \xi)$ примет вид

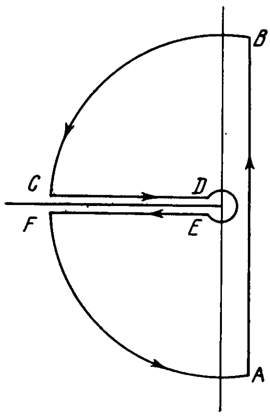
$$\Theta(p, \xi) = -\frac{2K_1(\sqrt{p}\xi)}{ap\sqrt{p}K_2(\sqrt{p}a)} \tag{4}$$

Определим оригинал $\varphi(\tau, \xi)$, изображение которого дается выражением

$$\Phi(p, \xi) = p\Theta(p, \xi) = -\frac{2K_1(\sqrt{p}\xi)}{a\sqrt{p}K_2(\sqrt{p}a)}$$

в соответствии с формулой обращения для преобразования Лапласа

$$\varphi(\tau, \xi) = -\frac{2}{a}\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\gamma - j\infty}^{\gamma + j\infty} e^{p\tau}\frac{K_1(\sqrt{p}\xi)}{\sqrt{p}K_2(\sqrt{p}a)}\,dp \tag{5}$$




Фиг. 1

Функция Макдональда $K_2(z)$ не имеет корней в правой половине плоскости [5] комплексного переменного $z$, где $|\arg z| \leqslant {}^1/_2\pi$. Совокупности точек, лежащих в правой половине плоскости комплексного переменного $z$, для которых $|\arg z| \leqslant {}^1/_2\pi$, будет соответствовать вся плоскость нового комплексного переменного $p = z^2$ с разрезом вдоль отрицательной действительной полуоси от $p = -\infty$ до $p = 0$.

Для нахождения решения (5) воспользуемся контуром $ABCDEF$ (фиг. 1). Подынтегральная функция однозначна везде на контуре и внутри его и, согласно теореме Коши, интеграл по $ABCDEF$ равен нулю.

Так как в пределе при стремлении радиуса большой окружности к бесконечности интегралы по $BC$ и $AF$ стремятся к нулю, а вклад от интеграла по малой окружности $DE$ с центром в начале координат для нашего случая также равен нулю, то интеграл (5) заменяется двумя несобственными интегралами по отрицательной вещественной полуоси, полученными из интегралов по $CD$ и $EF$.

Примем

$$p = u^2 e^{\pi j}, \quad \sqrt{p} = u e^{2\pi j}, \quad dp = -2u\,du \quad \text{вдоль } CD,$$
$$p = u^2 e^{-\pi j}, \quad \sqrt{p} = u e^{-{}^1/_2 \pi j}, \quad dp = -2u\,du \quad \text{вдоль } EF$$

тогда, используя известные формулы [6]

$$K_\nu(z e^{{}^1/_2 \pi j}) = -{}^1/_2 \pi j e^{-{}^1/_2 \nu\pi j}\left[J_\nu(z) - jY_\nu(z)\right]$$

$$K_\nu(z e^{-{}^1/_2 \pi j}) = {}^1/_2 \pi j e^{{}^1/_2 \nu\pi j}\left[J_\nu(z) + jY_\nu(z)\right]$$

получим из (5)

$$\varphi(\xi, \tau) = \frac{4}{\pi a}\int_0^\infty e^{-u^2\tau}\,\frac{J_1(u\xi)\,Y_2(ua) - Y_1(u\xi)\,J_2(ua)}{J_2^2(ua) + Y_2^2(ua)}\,du$$

Согласно теореме об изображении интеграла функции, будем иметь решение в виде

$$\theta(\tau, \xi) = \int_0^\tau \varphi(\tau, \xi)\,d\tau = \frac{4}{\pi a}\int_0^\infty (1 - e^{-u^2\tau})\,\frac{J_1(u\xi)\,Y_2(ua) - Y_1(u\xi)\,J_2(ua)}{J_2^2(ua) + Y_2^2(ua)}\,\frac{du}{u^2} \quad (6)$$

Приближенное решение для малых времен можно найти, используя асимптотическое разложение функций Бесселя, и получить формулу для изображения $\Theta(p, \xi)$ в виде ряда по показательным функциям [7], коэффициентами при которых служат члены ряда по $1 / \sqrt{p}$

Так как

$$K_\nu(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}\left\{1 + \frac{4\nu^2 - 1}{1!\,8z} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)}{2!\,(8z^2)} + O\left(z^{-3}\right)\right\}$$

то

$$\Theta(p, \xi) = -\frac{2}{a}\left(\frac{a}{\xi}\right)^{1/2}\frac{e^{-\sqrt{p}\,(\xi - a)}}{p\sqrt{p}}\left(1 + \frac{3a - 15\xi}{8a\xi\sqrt{p}} - \frac{15a^2 + 90a\xi - 345\,\xi^2}{128a^2\xi^2 p} + \cdots\right) \quad (7)$$

Используя табличные формулы обращения [7], получим для малых $\tau$

$$\theta(\xi, \tau) = -\frac{2}{a}\left(\frac{a}{\xi}\right)^{1/2}\left\{2\sqrt{\tau}\,j\Phi_*\left(\frac{\xi - a}{2\sqrt{\tau}}\right) + \frac{3a - 15\xi}{2a\xi}\,\tau j^2\Phi_*\left(\frac{\xi - a}{2\sqrt{\tau}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{15\,a^2 + 90\,a\xi - 345\,\xi^2}{128a^2\xi^2}\,(4\tau)^{3/2}\,j^3\Phi_*\left(\frac{\xi - a}{2\sqrt{\tau}}\right) + \cdots\right\}$$

Здесь

$$\Phi_*(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi, \qquad j\Phi_*(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,e^{-x^2} - x\Phi_*(x)$$

и общая рекуррентная формула

$$2nj^n\Phi_*(x) = j^{n-2}\Phi_*(x) - 2xj^{n-1}\Phi_*(x)$$

В размерном виде решение для скорости вращения, пригодное для малых значений $\nu t / r_0^2$, имеет вид

$$V_\varphi(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} - \frac{2\Gamma\sqrt{\nu t}}{\pi r_0\sqrt{r r_0}}\left\{j\Phi_*\left(\frac{r - r_0}{2\sqrt{\nu t}}\right) + \frac{\sqrt{\nu t}}{4}\,\frac{3r_0 - 15r}{r r_0}\,j^2\Phi_*\left(\frac{r - r_0}{2\sqrt{\nu t}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{15\,r_0^2 + 90\,r_0 r - 345\,r^2}{32\,r_0^2 r^2}\,(\nu t)\,j^3\Phi_*\left(\frac{r - r_0}{2\sqrt{\gamma t}}\right) + \cdots\right\} \quad (8)$$

и при $r = r_0$ (на поверхности разрыва)

$$V_\varphi(r = r_0, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\left(1 - \frac{4\sqrt{\nu t}}{r_0\sqrt{\pi}} + \frac{3\nu t}{r_0^2} - \frac{5\,(\nu t)^{3/2}}{r_0^3\sqrt{\pi}} + \cdots\right) \quad (9)$$

Для нахождения асимптотики решения при больших значениях времени воспользуемся разложением функций Бесселя в виде [6,7]

$$K_n(z) = (-1)^{n+1}\left\{\ln\frac{z}{2}+\gamma\right\} I_n(z) + \frac{1}{2}(-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(^1/_2\, z)^{n+2k}}{k!\,(n+k)!} \times$$

$$\times \left[\sum_{m=1}^{n+k} m^{-1} + \sum_{m=1}^{k} m^{-1}\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k (^1/_2\, z)^{-n+2k}\frac{(n-k-1)!}{k!}$$

$$I_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (^1/_2\, z)^{2k+n} \frac{1}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

где $\Gamma$ — гамма-функция, а $\gamma = \ln C = 0.5772$ — постоянная Эйлера. Тогда

$$\theta(\xi, \tau) = -\frac{2}{a}\frac{1}{2\pi j}\int_{(-\infty)}^{(0+)} \frac{e^{p\tau}}{p\sqrt{p}} \frac{K_1(\sqrt{p}\,\xi)}{K_2(\sqrt{p}\,a)}\,dp =$$

$$= -\frac{2}{a}\frac{1}{2\pi j}\int_{(-\infty)}^{(0+)} \frac{e^{p\tau}}{p}\frac{a^2}{2\xi}\left\{1 - \frac{p(\xi^2-a^2)}{4} + \frac{p\xi^2}{2}\ln\frac{\sqrt{p}\,\xi C}{2} + \cdots\right\} =$$

$$= -\frac{a}{\xi}\left\{1 - \frac{\xi^2}{4\tau} + \cdots\right\}$$

Асимптотика решения при $\tau \to \infty$ имеет вид

$$U = \theta + \frac{a}{\xi} = \frac{a\xi}{4\tau} + \cdots$$

и жидкость стремится к вращению по закону твердого тела с исчезающе малой угловой скоростью.

Приведенную здесь задачу можно трактовать с использованием понятия о вихревом пограничном слое, растущем от свободной поверхности. Внутри такого слоя особенно заметны изменения потенциального движения жидкости, вызванные действием вязкости; вне этого слоя движение можно считать потенциальным.

В самом деле, пусть изменение характера движения при малых временах происходит в некотором слое с безразмерной толщиной $\varepsilon$. Примем, что $U = V + v$ ($V = a / \xi$ — скорость в потенциальном потоке, а $v$ — возмущение скорости).

Из граничного условия на свободной поверхности при $\xi = a$

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{V}{\xi} + \frac{\partial v}{\partial\xi} - \frac{v}{\xi} = 0$$

получим

$$\frac{\partial v}{\partial\xi} = -\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{V}{\xi}\right)_{\xi=a} = \frac{2}{a}$$

Так как величина $\partial v / \partial\xi \sim \mathrm{const}$, то в области пограничного слоя $v \sim \varepsilon$. Используя уравнение движения, можно получить $\varepsilon^2 \sim \tau$. Таким образом, изменение потенциального характера движения из-за действия сил вязкости при малых временах происходит в тонком пограничном слое $\varepsilon \sim \tau^{1/2}$ у свободной поверхности. В этом случае скорость вращения изменяется от своего значения в потенциальном потоке на величину порядка $\varepsilon$, а сила вязкости — от своего значения на внешней границе слоя до нуля на свободной поверхности.

Для решения задачи в такой трактовке воспользуемся приближенным методом интегральных соотношений Кармана—Польгаузена. Обозначим через $\varepsilon$ безразмерную толщину вихревого слоя и произведем на его внешней границе сшивку с потенциальным течением по значениям скорости и первой производной

$$U_\varepsilon = \frac{a}{a+\varepsilon}, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_\varepsilon = -\frac{a}{(a+\varepsilon)^2}$$

Выполнение таких условий обеспечивает неразрывность значения силы вязкого трения при переходе через внешнюю границу слоя.

Будем искать приближенное распределение скорости в слое в виде, удовлетворяющем граничным условиям задачи

$$U = -\frac{a}{(a+\varepsilon)^2 \varepsilon (2a+\varepsilon)} \{2(a+\varepsilon)\xi^2 - (4a^2 + 6a\varepsilon + 3\varepsilon^2)\xi + 2a^2(a+\varepsilon)\}$$

Уравнение переноса момента импульса для движения имеет вид

$$\frac{d}{d\tau}\int_a^{a+\varepsilon} U\xi\, d\xi - (U\xi)_{\xi=a+\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt} = \left(\xi\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)\Bigg|_a^{a+\varepsilon} - \int_a^{a+\varepsilon}\frac{U}{\xi}\, d\xi$$

подставляя значение $U$, получим после некоторых преобразований обыкновенное дифференциальное уравнение для толщины слоя

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = \frac{6(a+\varepsilon)^3(2a+\varepsilon)\{3(2a+\varepsilon) - 2a^3/\varepsilon\ln(1+\varepsilon/a)\}}{\varepsilon(16a^5 + 74a^4\varepsilon + 114a^3\varepsilon^2 + 77a^2\varepsilon^3 + 24a\varepsilon^4 + 3\varepsilon^5)} \tag{10}$$

с начальным условием $\varepsilon = 0$ при $\tau = 0$.

Толщина вихревого слоя при малых временах растет пропорционально квадрату корню из времени $\varepsilon \approx \sqrt{6\tau}$.

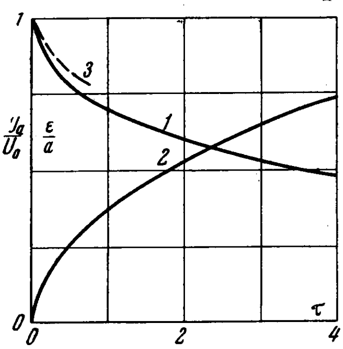
Скорость вращения на границе разрыва

$$U_{\xi=a} \approx 1 - \varepsilon/a$$

или

$$V_\varphi \approx \frac{\Gamma}{2\pi r_0}\left(1 - \frac{6\sqrt{\nu t}}{r_0} + \cdots\right)$$

Последнее размерное выражение скорости $V_\varphi$ хорошо совпадает с точным решением (9). При больших временах приближенное решение ведет себя так же, как точное: $U \approx {}^1/_4 a\xi / \tau$.




Фиг. 2

Характер изменения относительной скорости вращения на границе разрыва $U/U_0$ и роста относительной толщины слоя $\varepsilon/a$ представлен на фиг. 2 (кривые *1* и *2* соответственно). Это — результат решения уравнения (10) для случая $a = 10$; там же построено точное решение (9) задачи для малых $\tau$ (пунктиром).

Таким образом, при круговом движении вязкой жидкости с полым вихрем течение слабо отличается от потенциального везде, кроме области пограничного слоя на свободной поверхности, где движение становится вихревым. Внутри такого слоя сила вязкости изменяется от ее значения в потенциальном потоке до нуля на свободной поверхности полого вихря.

Поступило 13 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 2. Физматгиз, 1963.
2. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. Гостехиздат, 1955.
3. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. Изд. «Мир», 1964.
4. Биркгоф Г. Гидродинамика. Изд. иностр. лит., 1963.
5. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. Изд. иностр. лит. 1949.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Изд-во «Наука», 1964.
7. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. Изд-во «Наука», 1964.