ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ—СТОКСА ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

В. И. ПОЛЕЖАЕВ

(Москва)

Во многих задачах, встречающихся в современной газовой динамике, для учета диссипативных факторов — вязкости и теплопроводности газа — недостаточно приближений пограничного слоя и требуется решение полной системы уравнений Навье — Стокса. Сюда относятся, например, течения с большими продольными градиентами параметров, которые по порядку величины сравнимы или превышают поперечные градиенты (скачки температур, резкие развороты потока, скачки уплотнения и др.). В ряде случаев, например в течениях при низкой плотности, масштаб действия продольных градиентов становится значительным, что приводит к необходимости рассматривать структуру течения в окрестности больших градиентов. Постановка некоторых задач такого типа приводит к системе одномерных уравнений Навье — Стокса.

Приводится разностная схема для решения системы одномерных стационарных и нестационарных уравнений Навье — Стокса и даются примеры расчета структуры фронта стационарной ударной волны, нестационарного течения газа под действием внезапного нагрева одной из границ и нестационарного течения газа в окрестности распада начального разрыва. Решение стационарных задач осуществляется в результате установления при $t \to \infty$.

1. Система одномерных нестационарных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого вязкого теплопроводного газа имеет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = \rho X, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0$$

$$\rho \frac{de}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial T}{\partial x} + P_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \quad \left(e = \int_0^T c_v \, dT\right) \tag{1.1}$$

Здесь e — внутренняя энергия, c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, T — температура, ρ — плотность, u — продольная составляющая скорости, k — коэффициент теплопроводности, X — проекция внешних сил, P_{xx} — проекция тензора напряжений на ось x.

В предположении, что тензор напряжений линейно зависит от тензора скоростей деформации и при отсутствии вязкости приводится к тензору напряжений идеальной жидкости, имеем [1,2]

$$P_{xx} = -p + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{или} \quad P_{xx} = -p + \mu^+ \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \begin{pmatrix} \mu^+ = {}^4/_3\,\mu + \mu' \\ \mu' = \lambda + {}^2/_3\,\mu \end{pmatrix}$$

Здесь μ — коэффициент вязкости, λ — коэффициент второй вязкости, μ' — коэффициент объемной вязкости.

Для замыкания системы (1.1) задаются уравнения состояния и зависимости коэффициентов вязкости, теплопроводности и теплоемкости от температуры

$$p = p(\rho, T), \qquad \mu^+ = \mu^+(T)$$
$$k = k(T), \qquad c_v = c_v(T) \tag{1.2}$$

В начальный момент времени $t = 0$ заданы распределения по пространственной координате всех неизвестных функций

$$u^\circ = u(x, 0), \quad \rho^\circ = \rho(x, 0), \quad T^\circ = T(x, 0)$$

Граничные условия предполагаются следующими.

1) На стенке: условия прилипания для продольной составляющей скорости (в этом случае плотность на стенке вычисляется из уравнения неразрывности), заданный тепловой режим (температура стенки T_w, тепловой поток $q_w = k_w(\partial T / \partial x)_w$ или закон теплообмена на стенке).

2) Асимптотические условия в невозмущенном потоке: заданы значения всех неизвестных V_1, ρ_1, T_1. Численная реализация этих условий заключается в выборе такого размера области, что при приближении к границе значения вычисляемых величин u, ρ, T отличаются от соответствующих им асимптотических значений V_1, ρ_1, T_1 на заданную как угодно малую величину ε.

Приведем систему (1.1), (1.2) к безразмерному виду, вводя масштабы для скорости V_1, плотности ρ_1, температуры T_1, длины L, времени $t_1 = L/V_1$, вязкости μ_1, теплопроводности k_1, теплоемкости c_{v_1} так, что безразмерные величины определятся следующим образом

$$\bar{u} = \frac{u}{V_1}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_1}, \; \bar{x} = \frac{x}{L}, \; \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_1}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_1}, \quad c_v = \frac{c_v}{c_{v_1}}$$

При этом система (1.1) после очевидных преобразований примет исходный вид (черта над безразмерными величинами опущена).

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\varkappa\rho C_M{}^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho C_R}\frac{\partial}{\partial x}\mu^+\frac{\partial u}{\partial x} + C_F, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0\\ \frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\varkappa}{\rho c_v C_R P}\frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{C_1}{\rho c_v}p\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu^+ C_e}{\rho c_v C_R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\end{gathered} \tag{1.3}$$

Здесь введены безразмерные комплексы, составленные из параметров, выбранных в качестве масштабов

$$\begin{gathered}\varkappa = \frac{c_{p_1}}{c_{v_1}}, \quad C_M = \frac{V_1}{\sqrt{\varkappa p_1/\rho_1}}, \quad C_R = \frac{V_1 L}{\mu_1}\rho_1, \quad C_F = \frac{X_L}{V_1{}^2}, \quad P = \frac{\mu_1 c_{p_1}}{k_1},\\ C_1 = \frac{p_1}{\rho_1 c_{v_1} T_1}, \quad C_e = \frac{V_1{}^2}{c_{v_1} T_1}\end{gathered} \tag{1.4}$$

Вопрос о том, какие из комплексов (1.4) будут определяющими критериями подобия, решается отдельно в каждой конкретной задаче (п. 3, 4, 5) с учетом безразмерных комплексов, полученных из начальных и граничных условий и дополнительных соотношений (1.2). Для совершенного газа с уравнением состояния $p = \rho RT$ (R — универсальная газовая постоянная) два последних комплекса в (1.4) можно представить из комбинаций $\varkappa$ и C_M

$$C_1 = \varkappa - 1, \qquad C_e = \varkappa(\varkappa - 1)\frac{V_1{}^2}{\varkappa R T_1} = \varkappa(\varkappa - 1)C_M^2$$

Разностные схемы для системы одномерных нестационарных уравнений Навье — Стокса рассматривались в работах [3-5]. В недавней работе Крокко [6] исследуется схема, в которой аппроксимация исходной системы осуществляется только на стационарном режиме. В явных схемах для системы (1.3) диапазон изменения параметров сетки ограничивается условиями устойчивости вида

$$\tau \sim \min\left\{\frac{h}{|u| + 1/C_M},\ C_R h^2\right\}$$

Здесь h — шаг сетки по пространству, τ — по времени. Неявные схемы лишены этого недостатка, однако при их применении встречаются трудности из-за необходимости частого обращения матриц и хранения большого количества промежуточной информации в оперативной памяти вычислительной машины. Последнее обстоятельство особенно существенно при решении задач с двумя и более пространственными переменными.

Ниже применяется разностная схема, в которой инерционные и вязкостные члены в уравнении количества движения вынесены на верхний, а давление — на нижний слой по времени. Такая схема будет в некотором смысле промежуточной между явными и неявными схемами и позволяет свести решение всей системы к последовательному решению систем разностных уравнений с трехдиагональными матрицами. В серии экспериментальных расчетов установлено, что такая схема не имеет ограничения на параметры сетки типа $\tau \sim C_R h^2$ и удобна для исследования структуры стационарных и нестационарных течений сжимаемого газа с учетом вязкости и теплопроводности.

2. Введем пространственно-временную сетку с шагами h и τ так, что $x_i = ih$, $t_n = n\tau$ $(i = 1, \ldots, N;\ \ n = 1, \ldots, K)$; значения функции в узлах сетки

$$\varphi(x_i, t_n) = \varphi(ih, n\tau) = \varphi_i^n$$

Исходная дифференциальная система (1.3) аппроксимируется следующей разностной схемой

$$(E - \tau L_u)\, u^{n+1} = u_i^n - \frac{\tau}{\varkappa \rho_i^n C_M^2}\, \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2h} + \tau C_F, \quad (E - \tau L_\rho)\, \rho^{n+1} = \rho_i^n$$

$$(E - \tau L_T)\, T^{n+1} = T_i^n - \frac{p_i^{n+1}\tau}{\rho_i^{n+1} c_{vi}} \cdot C_1 \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + \frac{\mu^+ C_e \tau}{\rho_i^{n+1} c_{vi} C_R}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h}\right)^2 \tag{2.1}$$

$$p_i^n = p(\rho_i^n, T_i^n), \qquad c_{vi} = c_v(T_i^n)$$

Здесь E — единичный оператор. Разностные операторы L_u, L_ρ, L_T имеют вид

$$L_u u^{n+1} = \frac{1}{\rho_i^n C_R}\, \frac{\mu_{i+1/2}^+ u_{i+1}^{n+1} - (\mu_{i+1/2}^+ + \mu_{i-1/2}^+)\, u_i^{n+1} + \mu_{i-1/2}^+ u_{i-1}^{n+1}}{h^2} - u_i^n \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h}$$

$$L_\rho \rho^{n+1} = -\frac{u_{i+1}^{n+1}\rho_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}\rho_{i-1}^{n+1}}{2h} \tag{2.2}$$

$$L_T T^{n+1} = \frac{\varkappa}{\rho_i^{n+1} c_{vi} C_R P}\, \frac{k_{i+1/2} T_{i+1}^{n+1} - (k_{i+1/2} + k_{i-1/2})\, T_i^{n+1} + k_{i-1/2} T_{i-1}^{n+1}}{h^2} - u_i^{n+1} \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{2h}$$

$$\mu_i^+ = \mu^+(T_i^n), \qquad \mu_{i+1/2}^+ = \mu^+(T_{i+1/2}^n), \qquad \mu_{i-1/2}^+ = \mu^+(T_{i-1/2}^n)$$

$$T_{i+1/2} = {}^1/_2\,(T_i + T_{i+1}),\ T_{i-1/2} = {}^1/_2\,(T_i + T_{i-1})$$

Аналогично определяются $k_{i+1/2}$ и $k_{i-1/2}$.

Схема (2.1), (2.2) аппроксимирует систему нестационарных уравнений (1.3) на гладких функциях с порядком $0(\tau + h^2)$, а при достижении стационарного состояния (в счете на установление) — с порядком $0(h^2)$. Каждая из систем разностных уравнений, соответствующих строкам (2.1), имеет трехдиагональную матрицу и приводится к виду

$$a\varphi_{i+1} - b\varphi_i + c\varphi_{i-1} = f_i, \qquad \varphi(0) = \varphi_1, \qquad \varphi(1) = \varphi_N$$

и решается методом прогонки [7]. При расчете каждой строки из (2.1) используются входящие в коэффициенты и правые части величины, просчитанные на предыдущей строке. Для системы одномерных уравнений газовой динамики без учета вязкости и теплопроводности схема, имеющая аналогичную структуру, рассматривалась в работе [3], и было получено, что схема устойчива в сверхзвуковом и неустойчива в дозвуковом течениях. В экспериментальных расчетах, проведенных в настоящей работе для системы (1.3) в диапазоне изменения параметров $0 \leqslant C_R \leqslant 10^3$, $0,3 \leqslant C_M \leqslant 10$, $0 \leqslant C_F \leqslant 1$ получено достаточное условие устойчивости

$$\tau \leqslant hC_M \tag{2.3}$$

точнее $\tau \leqslant f_1(C_R)\, hC_M$, где $f_1(C_R) \geqslant 1$ и растет при уменьшении C_R. При весьма малых числах $C_M \sim 0{,}01$ схема неустойчива, однако это не существенно для рассматриваемых здесь задач.

Для контроля решения в процессе счета проверялись интегральные соотношения импульса, расхода и энергии, которые получаются из системы (1.3) интегрированием по всему отрезку

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial \rho u}{\partial t} - C_F\right) dx + \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 + \frac{1}{\varkappa C_M^2}(p_2 - p_1) = \frac{1}{C_R}(\tau_{w_2} - \tau_{w_1})$$

$$\int_1^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dx + \rho_2 u_2 - \rho_1 u_1 = 0 \tag{2.4}$$

$$\int_1^2 \left[\frac{\partial \rho e}{\partial t} + pC_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \mu^+ \frac{C_e}{C_R}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] dx + \rho_2 u_2 e_2 - \rho_1 u_1 e_1 = \frac{\varkappa}{C_R P}(q_{w_2} - q_{w_1})$$

$$\left(\tau_w = \mu_w^+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_w, \quad q_w = k_w \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_w\right),$$

3. Рассмотрим задачу о структуре фронта одномерной стационарной ударной волны. Пусть параметры газа перед волной имеют асимптотические значения V_1, ρ_1, T_1, а за волной — V_2, ρ_2, T_2. Будем предполагать, что газ совершенный, тогда параметры газа перед ударным фронтом и за ним связаны известными соотношениями [1,2] (3.1)

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\varkappa - 1)(\varkappa M_1^2 + 1)}{(\varkappa + 1)^2 M_1^2}(M_1^2 - 1), \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{(\varkappa - 1) M_1^2 + 2}{(\varkappa + 1) M_1^2}, \left(M_1 = \frac{V_1}{\sqrt{\varkappa R T_1}}\right)$$

$$\rho_1 V_1 = \rho u = \rho_2 V_2 \tag{3.2}$$

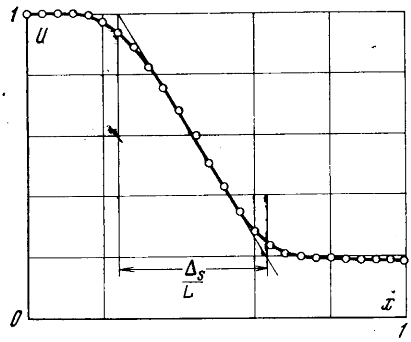
Здесь $\varkappa$ — показатель адиабаты, M_1 — число Маха в набегающем потоке.

Для системы стационарных одномерных уравнений Навье — Стокса в работах Джилбарга и Паолуччио [8] и Мизеса [9] предложен метод расчета структуры фронта, основанный на решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений в плоскости uT. Здесь для решения этой задачи применяется метод установления в плоскости xt с заданием асимптотических значений параметров газа перед волной и за волной на отрезке конечной длины. Близкая к рассматриваемой здесь постановка задачи осуществляется также в работе Крокко [6] для одномерного течения в расширяющемся сопле.

В дальнейшем предполагается, что коэффициент вязкости зависит от температуры по закону Сатерленда

$$\mu = T^{3/2}\frac{1+C^+}{T+C^+} \qquad (3.3)$$

причем $\mu' = 0$ и $\mu^+ = {}^4/_3\mu$, $C^+ = C/T_1$, где C — константа Сатерленда. Далее, при $P = \mu c_p/k = \mathrm{const}$ и $\varkappa$, $c_v = \mathrm{const}$ зависимость вида (3.3) справедлива и для коэффициента теплопроводности $k(T)$. В качестве масштабов для неизвестных и коэффициентов μ и k возьмем их значения в набегающем потоке. Полная система определяющих критериев подобия в такой постановке задачи состоит из чисел M_1, $\varkappa$, P, C/T_1.



Фиг. 1

Начало отсчета и масштаб длины L не заданы условиями задачи, поэтому число C_R не является определяющим критерием подобия.

Воспользуемся этим обстоятельством и введем отрезок длины L, внутри которого помещается весь ударный фронт (фиг. 1) так, чтобы значения u, ρ, T вблизи границы отличались от асимптотических значений на заданную величину ε. Если принять этот отрезок за масштаб длины, то тем самым в схеме (2.1)—(2.2) вводится масштабный параметр $C_R = V_1L\rho_1/\mu_1$ число Рейнольдса, отнесенное к масштабу длины L и параметрам в набегающем потоке.

Примем определение толщины волны по Прандтлю $\Delta_s = (V_1 - V_2)/(du/dx)_{\max}$

Из расчетов непосредственно определяется толщина фронта Δ_s, отнесенная к выбранному масштабу (в нашей нормировке)

$$\frac{\Delta_s}{L} = \frac{1-u_2}{[(u_{i+1}-u_i)/h]_{\max}} \qquad \left(u_2 = \frac{V_2}{V_1}\right) \qquad (i = 1, \ldots, N)$$

Отношение масштаба длины и толщины волны к длине свободного пробега в набегающем потоке можно представить в виде

$$\frac{L}{L_s} = 0.499\sqrt{\frac{8}{\varkappa\pi}}\frac{C_R}{M_1}, \qquad \frac{\Delta_s}{L_s} = \frac{\Delta_s}{L}\frac{L}{L_s} \qquad \left(L_s = \frac{\mu_1}{0.499\,\rho_1\sqrt{8RT_1/\pi}}\right)$$

Здесь L_s — длина свободного пробега в набегающем потоке.

Расчеты проводились по разностной схеме (2.1)—(2.2), причем уравнение неразрывности было взято в виде (3.2). Начальные данные при расчете на установление задавались в виде ступеньки

$$u^\circ = 1, \qquad T^\circ = 1 \qquad (0 \leqslant x \leqslant {}^1/_2)$$

$$u^\circ = u_2 = V_2/V_1, \qquad T^\circ = T_2/T_1 \qquad ({}^1/_2 < x \leqslant 1)$$

При таких начальных данных фронт волны в процессе итераций перемещается в сторону набегающего потока и «размазывается» на сетке, что приводит к установлению характерного несимметричного профиля (фиг. 1).

На сетке $N = 100$, $h = 1/99$, $\tau = 10\,h$ установление стационарного решения достигалось, как правило, за 40—60 итераций, причем на границах сетки выполнялось условие

$$|\varphi_i - \varphi_{i-1}| < \varepsilon \quad (i = 2, N)$$

где $\varepsilon = 10^{-4}$ для профиля температуры и $\varepsilon = 10^{-5}$ — для профиля скорости. При числе $P = 0.75$ стационарная система имеет интеграл энергии [2]

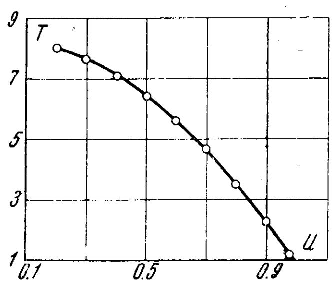
$$\frac{u_i^2}{2} + \frac{T_i}{(\varkappa - 1) M_1^2} = \text{const} \tag{3.4}$$

Это соотношение использовалось для контроля точности счета в узлах сетки в нормированном виде (константа в правой части определяется по параметрам набегающего потока)

$$B(x) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{(\varkappa - 1) M_1^2}\right]^{-1} \left[\frac{u_i^2}{2} + \frac{T_i}{(\varkappa - 1) M_1^2}\right] = 1 \tag{3.5}$$

Наибольшее отклонение величины $B(x)$ от единицы в узлах разностной сетки на стационарном режиме составляло не более 0.1%.

Пример расчета распределения скорости поперек ударного фронта приведен на фиг. 1 ($M_1 = 6$, $\varkappa = 1.405$, $P = 0.75$ $C/T_1 = 2.64$). На фиг. 2 дается сравнение численного решения (точки) с точным (3.5) (сплошная кривая) при $P = 0.75$. Масштабный параметр C_R в этом примере равен 70, $L/L_s = 7.84$, $\Delta_s/L = 0.382$ и $\Delta_s/L_s = 2.99$



Фиг. 2

В серии расчетов, выполненных изложенным здесь методом, исследовалось влияние параметров M_1, $\varkappa$, P, C/T_1 на структуру фронта стационарной ударной волны в диапазоне чисел $M_1 = 1.1 \div 14.5$, $\varkappa = 1.33 - 1.66$, $P = 0.5 \div 1$, $C/T_1 = 0 \div 10$. Толщина волны Δ_s/L_s падает с ростом числа M_1, причем при росте C/T_1 (что может означать, например, уменьшение температуры набегающего потока) падение толщины волны с ростом числа M_1 замедляется. При $C/T_1 = 2{,}64$ (что соответствует температуре набегающего потока для воздуха $T_1 = 42°$ K при $C = 110.4°$ K) на кривой Δ_s/L_s (M_1) имеется минимум в области $M_1 \sim 4$ с существенным возрастанием толщины волны в области больших чисел M_1.

Влияние параметра C/T_1 исследовано более подробно при числе $M_1 = 6$. При $C/T_1 = 0$ из закона вязкости (3.3) следует степенной закон $\mu = T^n$ с показателем степени $n = {}^1/_2$. Результаты расчета толщины фронта при этом значении n и числе $P = 0.75$ хорошо согласуются с результатами Мордухова и Либби [10]. При $C/T_1 \to \infty$ толщина фронта стремится к значению, соответствующему степенному закону изменения вязкости с показателем степени $n = 1.5$ и во всем диапазоне $C/T_1 = 0 \div \infty$ — увеличивается в шесть раз. При $C/T_1 \to \infty$ максимальное значение производной скорости du/dx заметно перемещается по фронту волны в сторону набегающего потока. При изменении показателя адиабаты $\varkappa$ от 1.33 (трехатомный газ) до 1.66 (одноатомный газ) при $M_1 = 6$ толщина волны увеличивается в два раза. Число Прандтля сравнительно слабо влияет на толщину фронта: при $M_1 = 6$, $\varkappa = 1.405$, $C/T_1 = 2.64$ в диапазоне $P = 0.5 \div 1$ толщина фронта уменьшается по линейному закону примерно на 20%. Этот результат согласуется с расчетами, выполненными Мизесом [9].

4. Пусть в газе с постоянной плотностью $\rho°$ и температурой $T° = T_{w_1}$, заключенном в замкнутой области между двумя стенками, температура на одной из стенок внезапно повышается до T_{w_2} и в дальнейшем остается неизменной. Определим распространение тепла и движение газа в последующие моменты времени.

Будем рассматривать совершенный газ с коэффициентами вязкости и теплопроводности, зависящими от температуры по формуле (3.3). Движение газа и распространение тепла в газе, заключенном в области длины L, определяется следующими размерными величинами:

$$x,\ t,\ \mu,\ k,\ c_v,\ R,\ \rho^\circ,\ T^\circ = T_{w_1},\ T_{w_2},\ L,\ C \qquad (4.1)$$

где независимыми являются четыре размерности: длины, времени, массы и температуры. Из перечисленных 11 размерных величин, согласно π-теореме теории размерностей [11], можно составить семь независимых безразмерных комбинаций, которые выберем в виде

$$\frac{T_{w_2}}{T_{w_1}},\ C_R = \frac{\sqrt{\varkappa R T_{w_1}}L\rho_1}{\mu_1},\ \varkappa = \frac{c_p}{c_v},\ P = \frac{\mu_1 c_p}{k_1},\ \bar{x} = \frac{x}{L},\ \bar{t} = \frac{t\sqrt{\varkappa R T_{w_1}}}{L},\ \frac{C}{T_{w_1}} \qquad (4.2)$$

В разностной схеме (2.1)—(2.2) эти безразмерные комбинации, являющиеся определяющими критериями подобия, соответствуют системе масштабных комплексов (1.4), если принять за масштабы значения параметров при температуре $T_{w_1} = T^\circ$, $\rho_1 = \rho^\circ$, а за масштаб скорости — скорость звука при температуре $T_{w_1} = T^\circ$ ($C_M = 1$, $C_F = 0$, $C_1 = \varkappa - 1$, $C_e = \varkappa(\varkappa - 1)$). Сюда добавляются также критерии T_{w_2}/T_{w_1} и C/T_{w_1}, появляющиеся при рассмотрении граничных условий и закона изменения вязкости и теплопроводности от температуры.

Весь процесс распространения тепла и движения газа в замкнутой области между двумя стенками вплоть до полного установления начальных возмущений разделяется на три основные части.

1. Развитие и распространение волн температуры, скорости, плотности, давления до момента столкновения их с противоположной стенкой можно рассматривать отдельно как процесс распространения волн в полубесконечную среду. В этом случае, как и в п. 3, характерная длина L не задана условиями задачи, и C_R — масштабный параметр, который исключается из системы (4.2), если перейти от координат $\bar{x}$, $\bar{t}$ к координатам

$$x^* = \bar{x}C_R = \frac{x\sqrt{\varkappa R T_{w_1}}\rho_1}{\mu_1}, \qquad t^* = \bar{t}C_R = \frac{t\varkappa R T_{w_1}\rho_1}{\mu_1}$$

2. Взаимодействие волн со стенками определяется системой критериев (4.2).

3. Стационарное состояние, при котором газ неподвижен, давление и тепловой поток постоянны, а плотность обратно пропорциональна температуре

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x}k\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$p = \rho R T, \qquad T(0) = T_{w_2}, \qquad T(L) = T_{w_1} \qquad (4.3)$$

Очевидно, стационарное состояние определяется только перепадом температур на стенках T_{w_2}/T_{w_1} и законом изменения теплопроводности газа от температуры. Расчеты этой задачи проведены по схеме, изложенной в п. 2, при начальных условиях

$$u^\circ = u(x, 0) = 0, \qquad \rho(x, 0) = \rho^\circ, \qquad T(x, 0) = T^\circ = T_{w_1}, \qquad 0 < x \leqslant L$$
$$T(0, 0) = T_{w_2} \qquad (4.4)$$

и граничных условиях

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad T(0, t) = T_{w_2}, \qquad T(L, t) = T_{w_1} = T^\circ \qquad (4.5)$$

Плотность газа на границе рассчитывалась из уравнения неразрывности по формуле первого порядка ($i = 1$):

$$\rho_1^{n+1} = \rho_1^{\,n} - \frac{\tau}{h}\rho_2^{\,n}u_2^{n+1} \qquad (4.6)$$

аналогично при $i = N$

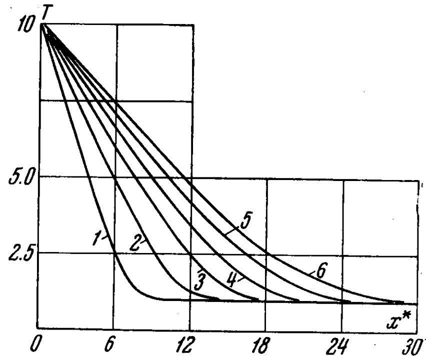
Развитие и перемещение волн температуры, скорости, плотности и давления в различные моменты времени до момента столкновения с противоположной стенкой иллюстрируется фиг. 3—6 ($1 - t^* = 1.515$, $2 - t^* = 3.03$, $3 - t^* = 4.545$, $4 - t^* = 6.06$, $5 - t^* = 7.575$, $6 - t^* = 9.09$). Здесь отношение температур $T_{w_2}/T_{w_1} = 10$, $\varkappa = 1.405$, $P = 0.75$, $C/T_{w_1} = 0.385$, параметры сетки: $h = 1/99$, $\tau = 0.1h$, масштабный параметр $C_R = 30$.

Рассмотрим особенности этого процесса в координатах x^*, t^*. (Безразмерная координата

$$x^* = x\sqrt{\varkappa R T_{w_1}}\,\rho_1/\mu_1$$

есть местное число Рейнольдса, отнесенное к скорости звука и параметрам невозмущенного газа. Можно дать, как и в п. 3, определение этой величины через длину свободного пробега в невозмущенном газе

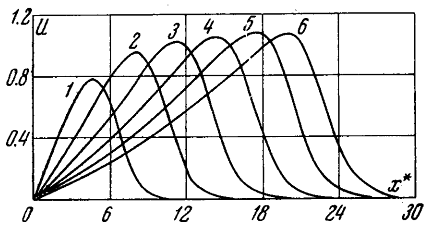
$$x^* \sim x/L_s \quad \text{при} \quad L_s \sim \mu_1/\rho_1\sqrt{\varkappa R T_{w_1}})$$



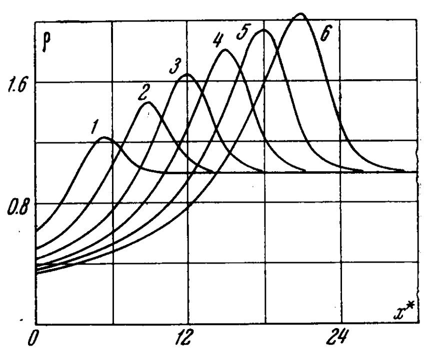
Фиг. 3

При $t^* \ll 1$ в окрестности нагретой стенки имеются значительные градиенты температуры и давления, что вызывает рост возмущений скорости и плотности газа. При $t^* \sim 1$ фронт волны давления отходит от стенки, и при $t^* \sim 1.5 \div 3$ давление у стенки выравнивается с образованием при $x^* = 0 \div 6$ области пониженной плотности. Профили скорости, плотности и давления (фиг. 4—6) иллюстрируют структуру и масштаб областей сжатия и разрежения. Ширина переднего фронта волны Δx^* в диапазоне $t^* = 1 \div 10$ равна 5—7 и в дальнейшем сравнительно мало меняется в диапазоне $t^* = 30 \div 40$, в то время как ширина области разрежения возрастает при удалении волны от стенки.

На фиг. 7 приведено сравнение профиля температурной волны $T(x)$ при $t^* = 1.515$ в движущемся газе и неподвижном (1 — движущийся, 2 — неподвижный). Последний случай рассматривался в работах [12, 13]; профиль температуры в неподвижном газе (фиг. 7) получен при помощи блока основной программы, реализующего счет только уравнения энергии ($\rho = \rho^0 = 1$ $u = 0$ на всем отрезке). Из-за пониженной плотности в области сильных градиентов температуры у стенки профиль температур в движущемся газе отстает от профиля температуры в неподвижном газе, и тепловой поток на нагретой стенке в движущемся газе выше, чем в неподвижном.



Фиг. 4



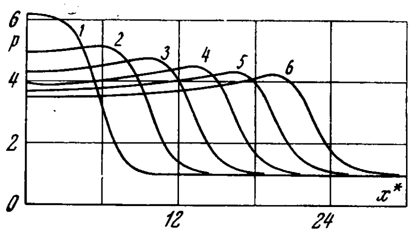
Фиг. 5

Сравнение результатов расчета с шагом по пространственной координате, уменьшенной вдвое, и с шагом по времени, уменьшенным в 10 раз, показало достаточно хорошую аппроксимацию решения на сетке. В момент времени $t^* = 10.1$ невязки разностных аналогов интегральных соотношений импульса, расхода и энергии (2.4) по отношению к суммарному импульсу $\rho_1 u_1 \ldots + \rho_N u_N$, суммарной массе $\rho_1 + \ldots + \rho_N$, суммарной энергии $\rho_1 e_1 + \ldots + \rho_N e_N$ равны соответственно 0.3, 0.4, 0.1%. Эти результаты показывают, что на гладких функциях разностная схема (2.1) — (2.2), не являющаяся дивергентной, тем не менее, достаточно хорошо удовлетворяет законам сохранения.

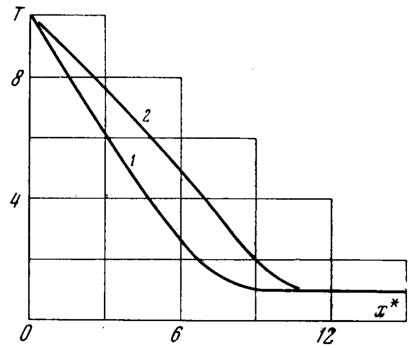
При взаимодействии волн с противоположной стенкой существенно, в какой стадии развития поток встречает стенку и характерным является число Рейнольдса, отнесенное к расстоянию между стенками

$$C_R = \frac{L\rho_1\sqrt{\varkappa R T_{w_1}}}{\mu_1}$$

а весь процесс должен рассматриваться в координатах $\bar{x}$, $\bar{t}$. В результате сжатия при столкновении со стенкой давление и тепловой поток становятся бо́льшими, чем в стационарном состоянии. При меньших C_R волна давления раньше достигает стенки, и при столкновении со стенкой давление и тепловой поток на стенке выше, чем при бо́льших C_R. В дальнейшем при развитии возвратного течения давление и тепловой поток становятся ниже стационарного зачения и выходят на стационарный режим с уменьшением амплитуды колебания по мере затухания колебаний газа между стенками.



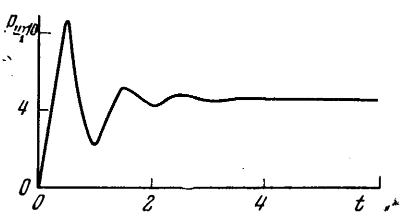
Фиг. 6



Фиг. 7

Расчет на установление проводился с шагом $\tau = h$ (при этом детали нестационарного течения ухватываются значительно грубее). На сетке $h = 1/_{99}$, $\tau = h$ при $C_R = 30$ установление стационарного режима (4.3) с точностью 0.1% по плотности и давлению и 0.01—0.02% по температуре достигалось после 650—700 шагов по времени. В конце указанного временного отрезка максимальная амплитуда колебания скорости $|u_{\max}|$ равна $2 \cdot 10^{-4}$. Формирование стационарного режима с точностью 1—2% наступает значительно раньше, после 300—350 шагов. Изменение по времени давления p_{w_1} на противоположной стенке показано на фиг. 8.

5. Пусть в некоторой точке задан начальный разрыв скорости, плотности, температуры (и соответственно — давления, исходя из уравнения состояния совершенного газа). Среда предполагается однородной, газ по обе стороны начального разрыва имеет постоянные параметры. Будем, как и раньше, рассматривать отрезок конечной длины L, который введем в качестве масштаба длины.



Фиг. 8

Начальные условия

$$\begin{aligned} &u(x, 0) = V_2, \quad \rho(x, 0) = \rho_2 \\ &T(x, 0) = T_2 \qquad (0 \leqslant x < x_0) \\ &u(x, 0) = V_1 \quad \rho(x, 0) = \rho_1 \\ &T(x, 0) = T_1 \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant L) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Граничные условия — асимптотические значения V_2, ρ_2, T_2 и V_1, ρ_1, T_1 по обе стороны начального разрыва; предположения о коэффициентах вязкости и теплопроводности сохраняются прежними (3.3).

Рассуждая по аналогии с п. 4, получим, что решение определяется следующими безразмерными критериями:

$$x^*, t^*, \frac{T_2}{T_1}, \frac{V_2}{V_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{V_1}{\sqrt{\varkappa R T_1}}, \varkappa, P, \frac{C}{T_1}\left(x^* = \frac{x V_1 \rho_1}{\mu_1}, \quad t^* = \frac{t V_1^2 \rho_1}{\mu_1}\right) \tag{5.2}$$

В разностной схеме (2.1)—(2.2) критерии (5.2) соответствуют безразмерным комплексам (1.4) с добавлением критериев граничных условий T_2/T_1, V_2/V_1, ρ_2/ρ_1 и параметра C/T_1, если считать, что безразмерные величины отнесены к значениям

$$V_1,\ \rho_1,\ T_1\quad \left(C_M = \frac{V_1}{\sqrt{\varkappa R T_1}},\ C_F = 0,\ C_1 = \varkappa - 1,\ C_e = \varkappa(\varkappa - 1) C_M^2\right)$$

а C_R некоторый масштабный параметр.

На фиг. 9 приводятся результаты расчета распределения давления $p(x^*)$ в различные моменты времени t^* для частного случая течения, вызванного распадом начального разрыва температур (и давлений) в неподвижном газе

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2 \qquad \rho_2/\rho_1 = 1, \quad V_2 = V_1 = 0$$

В этом случае система определяющих критериев состоит из чисел

$$\frac{T_2}{T_1},\ \varkappa,\ P,\ x^*,\ t^* \quad \left(x^* = \frac{x\sqrt{\varkappa R T_1}}{\mu_1}\rho_1, \quad t^* = \frac{t\varkappa R T_1}{\mu_1}\rho_1\right) \tag{5.3}$$

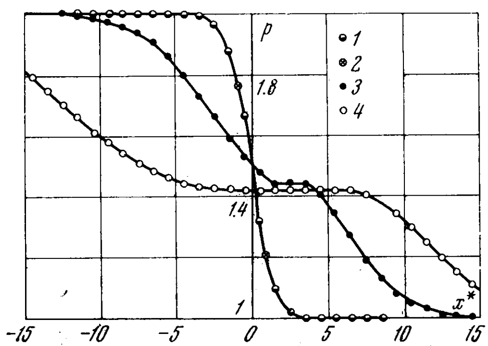
Здесь $\varkappa = 1.405$, $P = 0.75$, $\mu, k = \mathrm{const}$.

Этот расчет выполнен на сетке

$$N = 100,\ h = {}^1/_{99},\ \tau = 0.1h,\ C_R = 100$$

Во все моменты времени вплоть до $t^* \sim 10$ асимптотические граничные условия на концах отрезка L выполнялись с точностью $\varepsilon \leqslant 10^{-4}$. Результаты расчета с шагами по времени $\tau = 0.1h$ и $\tau = 0.01h$ хорошо согласуются между собой.

Аналогичная задача рассматривалась в работе [14] в предположении, что течение в окрестности распада начального разрыва можно разделить на невязкое и вязкое типа пограничного слоя. В работе [15] анализируется течение в окрестности распада разрыва путем разложения решений системы уравнений Навье — Стокса в ряды при малых моментах времени t. Из результатов расчета (фиг. 9) (точки 1, 2 — $t^* = 0.404$, 3 — $t^* = 4.04$, 4 — $t^* = 9.09$) следует, что при малых $t^* \leqslant 0.5$ (эти значения соответствуют начальному перепаду температур $T_2 / T_1 = p_2/p_1 = 2$) возмущения полей скорости и плотности, вызванные начальным разрывом температур (давлений), малы, и в окрестности распада начального разрыва имеется значительный градиент температур (и давлений). Для оценки точности численного решения при малых t^* проводились расчеты при различных масштабах $C_R = 100$ и $C_R = 10$. Эти результаты нанесены на фиг. 9 и удовлетворительно согласуются между собой (1 — $C_R = 100$, 2 — $C_R = 10$). В дальнейшем в окрестности распада разрыва образуется область с постоянным давлением, имеющая при $t^* \sim 4$ протяженность $\Delta x^* \sim 2$ и расширяющаяся с течением времени.



Фиг. 9

При $t^* \sim 10$ протяженность области постоянного давления составляет $\Delta x^* \sim 8$ и заметно формирование перемещающейся вправо волны сжатия и влево — волны разрежения. В момент времени $t^* = 10.1$ невязки интегральных соотношений импульса, расхода и энергии (2.4) по отношению к суммарному импульсу $\rho_1 u_1 + \ldots + \rho_N u_N$, суммарной массе $\rho_1 + \ldots + \rho_N$, суммарной энергии $\rho_1 e_1 + \ldots + \rho_N e_N$ равны соответственно 0.86, 0.01 и 0.09%.

Несколько повышенная величина относительной невязки импульса вызвана малой абсолютной величиной суммарного импульса в рассматриваемый момент времени.

Автор благодарит В. Я. Лихушина и В. С. Авдуевского за внимание к работе и полезные советы при ее выполнении.

Поступило 13.VI.66

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе В. Н. Теоретическая гидромеханика, ч. II, Физматгиз, 1963.
2. Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкостей. Изд. иностр. лит., 1963.
3. Gary J. On certain finite difference schemes for hyperbolic sistems. Math. of Comput., v. 18, No. 85, 1964.
4. Filler L. Ludloff H. Stability analiysis and integration of viscous equation of motion. Math. Comput., 1961, 15, No. 75.
5. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных уравнений Навье — Стокса для сжимаемого газа. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 5.
6. Crocco L. A suggestion for numerical solution of the steady Navier Stokes equations. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 10.
7. Годунов С. К., Рябенький В. С. Введение в теорию разностных схем. Физматгиз, 1962 г.
8. Gilbarg D., Paolucci o D. The structure of shock wave in continuum theory of fluids. J. Rational Mech. and Analysis, 1953, vol. 2, 617.
9. Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. Изд. иностр. лит., 1961.
10. Morduchow M., Libby P. On a complete solution of the one dimensional flow equations of a viscous, heat conducting, compressible gas. J. Aero Sci., 1949, vol. 16, No. 11.
11. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Физматгиз, 1965.
12. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Физматгиз, 1965.
13. Самарский А. А., Соболь И. М. Примеры численного расчета температурных волн. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 4.
14. Goldsworthy F. A. The structure of a contact region with application to the reflection of a chock from a heat conducting wall. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 1.
15. Демьянов Ю. А., Киреев В. Т. К анализу одномерных нестационарных течений газа с учетом теплопроводности и вязкости. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.