

## ОБ УСЛОВИЯХ ПРИМЕНИМОСТИ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

М. Н. КОГАН

(Москва)

Для вывода уравнения Больцмана из уравнений Лиувилля фундаментальное значение имеет наличие нескольких характерных времен, введенных Н. Н. Боголюбовым [1].

В настоящей работе в рассмотрение введены также характерные пространственные масштабы, что позволило более детально исследовать влияние пространственных градиентов и граничных условий.

В работе применен удобный формализм, являющийся обобщением формализма работы [3].

Для большинства газа показано следующее (ср. [1-4]):

а) Уравнение Больцмана применимо для описания течений, в которых выполняется условие молекулярного хаоса и характерный размер  $L$  (время  $T$ ) которых много больше диаметра  $d$  (времени  $\tau_c$ ) взаимодействия молекул.

б) Если характерный размер  $L$  (время  $T$ ) течения много больше длины пробега  $\lambda$  (времени между столкновениями  $\tau$ ), т. е. при малых числах Кнудсена, то вне слоя Кнудсена (на расстояниях  $\gg \lambda$  от границы и по истечении времени  $\gg \tau$  от начального момента) выполняется условие молекулярного хаоса и применимы уравнение Больцмана и уравнения гидродинамики независимо от начальных и граничных условий.

в) Внутри кнудсеновского слоя и для течений с характерными масштабами  $d \ll L \ll \lambda$  и  $\tau_c \ll L \ll \tau$  уравнение Больцмана применимо лишь при выполнении условия хаоса в начальных и граничных условиях.

г) Уравнение Больцмана и уравнения гидродинамики применимы для описания турбулентных течений с характерными масштабами  $L \gg \lambda$  и  $T \gg \tau$ .

В работе предполагается асимптотическая сходимость всех разложений по малому параметру и существование и единственность решений всех встречающихся уравнений.

1. Будем исходить из эквивалентной уравнению Лиувилля цепочки Боголюбова [1], которую выпишем в безразмерной форме

$$\begin{aligned} \frac{D_s F_s}{Dt} &= \frac{\partial F_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \xi_i \frac{\partial F_s}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^s \frac{X_{ij}}{m} \frac{\partial F_s}{\partial \xi_i} = \\ &= -\varepsilon \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \xi_i} \int \frac{X_{i,s+1}}{m} F_{s+1} dz_{s+1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$F_s \equiv F_s(t, x_1, \dots, x_s, \xi_1, \dots, \xi_s) \equiv F_s(t, z_1, \dots, z_s), dz_i = dx_i d\xi_i, s = 1, \dots, N$$

$$t = \frac{t^*}{\tau_c}, \quad x_i = \frac{x_i^*}{d}, \quad \xi_i = \frac{\xi_i^*}{\xi_0}; \quad \frac{X_{ij}}{m} = \frac{X_{ij}^*}{m^*} \frac{d}{\xi_0^2} \quad (1.2)$$

$$F_s = V \xi_0^{3s} F_s^*, \quad \varepsilon = n d^3$$

Звездочкой отмечены размерные величины,  $t^*$  — время,  $x_i^*$  — радиус-вектор  $i$ -й молекулы,  $m^*$  — масса молекулы,  $\xi_0$  — средняя скорость молекул,  $\xi_i$  — скорость  $i$ -й молекулы,  $X_{ij}$  ( $|x_i - x_j|$ ) — сила взаимодействия  $i$ -й и  $j$ -й молекул,  $V$  — объем, занятый газом (уравнения (1.1) не меняются при предельном переходе  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$  и  $n = N/V = \text{const}$ ).

Уравнения (1.1) содержат единственную характерную длину  $d$  (время  $\tau_c$ ) и малый параметр  $\varepsilon$ . Граничные и начальные условия вводят ха-

рактерную длину течения  $L$  (время  $T$ ). Из соображений размерности следует, что функции  $F_s$  имеют структуру

$$F_s \equiv F_s(t, et, x_i, ex_i, \frac{\tau_c}{T} t, \frac{d}{L} x_i, \xi_i, \varepsilon) = F_s(t_0, t_1, x_{i0}, x_{i1}, t_L, x_{iL}, \xi_i, \varepsilon)$$

Здесь

$$t_0 = \varepsilon^2 t, \quad x_{i0} = \varepsilon^2 x_i, \quad t_L = \frac{t^*}{T} = \varepsilon \tau_c t, \quad x_{iL} = \frac{x_i^*}{L} = \varepsilon x_i, \quad \varepsilon_1 = \frac{\lambda}{L} \sim \frac{\tau}{T} = K$$

где  $K$  — число Кнудсена. Легко видеть, что

$$t_1 = \varepsilon t = nd^3 \frac{t^*}{\tau_c} = \frac{t^*}{\tau}, \quad x_{i1} = \varepsilon x_i = nd^3 \frac{x_i^*}{d} = \frac{x_i^*}{\lambda}$$

Таким образом, имеются три характерных масштаба:  $d$ -масштаб  $t_0, x_{i0}$ ;  $\lambda$ -масштаб  $t_1, x_{i1}$  и  $L$ -масштаб  $t_L, x_{iL}$ .

2. Назовем течение однородным, если

$$\begin{aligned} F_s(t_0 + \alpha, x_{i0} + \beta, t_1, x_{i1}, t_L, x_{iL}, \xi_i, \varepsilon) = \\ = F_s(t_0, x_{i0}, t_1, x_{i1}, t_L, x_{iL}, \xi_i, \varepsilon), \quad (\alpha, \beta) = O(\tau_c, d) \end{aligned} \quad (2.1)$$

В однородном случае функции  $F_s$  в  $d$ -масштабе зависят лишь от взаимного расположения  $s$  молекул

$$F_s \equiv F_s(r_{1j}, t_1, x_{i1}, t_L, x_{iL}, \xi_i, \varepsilon), \quad (x_{10} = x_{i0}, r_{1j} = x_{10} - x_{j0}) \quad (2.2)$$

$$(i = 1, \dots, s, j = 2, \dots, s)$$

Функции  $F_s$  однородны, если они однородны на границах и в начальный момент времени  $t = 0$ .

Действительно, пусть  $s$  молекул в момент времени  $t = 0$  находятся в фазовых точках  $z_i(0)$  и пусть, двигаясь, взаимодействуя лишь одна с другой, в момент  $t$  они окажутся в точках  $z_i(t)$ . Тогда, согласно (1.1),

$$\begin{aligned} F_s(t, z_1(t), \dots, z_s(t)) = F_s(0, z_1(0), \dots, z_s(0)) - \\ - \int_0^t d\vartheta \sum_{i=1}^s \int \frac{X_{i, s+1}}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_i} F_{s+1}(\vartheta, z_1(\vartheta), \dots, z_{s+1}(\vartheta)) dz_{s+1} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Пусть

$$z_i^* \equiv (x_i^*, \xi_i^*) = (x_i + \beta, \xi_i),$$

$$\Delta_s(t) = F_s(t, z_1(t), \dots, z_s(t)) - F_s(t, z_1^*(t), \dots, z_s^*(t))$$

Из уравнения (2.3) и подобия фазовых траекторий имеем

$$\Delta_s(t) = \Delta_s(0) - \varepsilon \int_0^t d\vartheta \sum_{i=1}^s \int \frac{X_{i, s+1}}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \Delta_{s+1}(\vartheta) dz_{s+1} \quad (2.4)$$

Если  $\Delta_s(0) = 0$ , то, ввиду однородности системы, и  $\Delta_s(t) = 0$ .

Ниже будем предполагать, что

$$L \gg d, \quad T \gg \tau_c \quad (2.5)$$

В этом случае условие однородности выполняется на границах и в начальный момент <sup>1</sup>, а следовательно, согласно доказанному выше, — и во всем течении.

<sup>1</sup> В противном случае макроскопические величины

$$M(\varphi) = \int \varphi(\xi_1) F_s d\xi_1 dz_2 \dots dz_s$$

имели бы на границе и в начальный момент структуру  $M(t_0, x_{i0}, t_1, x_{i1}, t_L, x_{iL})$ , в то время как они должны зависеть лишь от характерных масштабов  $L$  и  $T$ , т. е. имеют структуру  $M(t_L, x_{iL})$ .

3. По определению, большинственный газ — это газ, для которого виртуальный коэффициент  $\varepsilon = nd^3 \rightarrow 0$  при  $\lambda = 1 / nd^2 = \text{const}$ .

Будем искать решение уравнений (1.1) в виде

$$F_s(\mathbf{r}_{1i}, t_1, \mathbf{x}_{11}, t_L, \mathbf{x}_{iL}, \xi_i, \varepsilon) = \sum_{v=0} \varepsilon^v F_s^v(\mathbf{r}_{1i}, t_1, \mathbf{x}_{11}, t_L, \mathbf{x}_{iL}, \xi_i) \quad (3.1)$$

Для производных, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial t} &= \varepsilon \left( \frac{\partial F_s^0}{\partial t_1} + \varepsilon_1 \frac{\partial F_s^0}{\partial t_L} \right) + \dots, \quad \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{x}_{j \neq 1}} = - \frac{\partial F_s^0}{\partial \mathbf{r}_{1j}} + \\ &+ \varepsilon \left( - \frac{\partial F_s^1}{\partial r_{1i}} + \frac{\partial F_s^0}{\partial \mathbf{x}_{j1}} + \varepsilon_1 \frac{\partial F_s^0}{\partial \mathbf{x}_{jL}} \right) + \dots, \quad \frac{\partial F_s}{\partial \mathbf{x}_1} = \\ &= \sum_{j=2}^s \frac{\partial F_s^0}{\partial r_{1j}} + \varepsilon \left( \sum_{j=2}^s \frac{\partial F_s^1}{\partial r_{1j}} + \frac{\partial F_s^0}{\partial \mathbf{x}_{11}} + \varepsilon_1 \frac{\partial F_s^0}{\partial \mathbf{x}_{1L}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в уравнение (1.1) и приравнивая коэффициенты при равных степенях  $\varepsilon$ , получим

$$\frac{D_s F_s^0}{Dt_0} = \sum_{i=2}^s (\xi_1 - \xi_i) \frac{\partial F_s^0}{\partial r_{1i}} + \sum_{i,j=1}^s \frac{\mathbf{X}_{ij}}{m} \frac{\partial F_s^0}{\partial \xi_i} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{D_s F_s^v}{Dt_0} + \frac{d_s F_s^{v-1}}{dt_1} = - \sum_{i=1}^s \int \frac{\mathbf{X}_{i,s+1}}{m} \frac{\partial F_{s+1}^{v-1}}{\partial \xi_i} dz_{s+1,0} \quad (3.4)$$

Здесь

$$\frac{d_s}{dt_1} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^s \xi_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{i1}} + \varepsilon_1 \left( \frac{\partial}{\partial t_L} + \sum_{i=1}^s \xi_i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{iL}} \right) \quad (3.5)$$

Число Кнудсена  $K = \varepsilon_1$  произвольно. Здесь отыскивается асимптотическое решение при  $\varepsilon \rightarrow 0$  при фиксированном  $\varepsilon_1$ . В уравнения (3.3) и (3.4)  $\lambda$ - и  $L$ -масштабы входят совершенно одинаково. Поэтому, пока  $\varepsilon_1$  не конкретизировано, не будем различать эти масштабы и будем их совокупность называть 1-масштабом.

Уравнение Больцмана есть уравнение для  $F_1$ . При  $s = 1$  уравнение (3.3) удовлетворяется тождественно, а уравнение (3.4) имеет вид

$$\frac{d_1 F_1^0}{dt_1} = \int \frac{\mathbf{X}_{1,2}}{m} \frac{\partial}{\partial \xi_1} F_2^0(\mathbf{r}_{12}, t_1, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{21} = \mathbf{x}_{11}, \xi_1, \xi_2) dz_{20} \quad (3.6)$$

Функция  $F_2^0$  удовлетворяет уравнению (3.3) при  $s = 2$ . Заменяя производную по  $\xi_1$  в правой части, согласно этому уравнению, имеем

$$\frac{d_1 F_1^0}{dt_1} = \int (\xi_1 - \xi_2) \frac{\partial F_2^0}{\partial \mathbf{r}_{12}} d\mathbf{x}_{20} d\xi_2 = \int (\xi_1 - \xi_2) \frac{\partial F_2^0}{\partial \mathbf{r}_{21}} d\mathbf{r}_{21} d\xi_2 \quad (3.7)$$

Вводя цилиндрическую систему координат  $l, \rho, \omega$  с началом в точке  $\mathbf{x}_{10}$  и осью  $l$ , параллельной вектору относительной скорости  $\mathbf{g} = \xi_2 - \xi_1$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d_1 F_1^0}{dt_1} &= \int g \rho d\rho d\omega d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial F_2^0}{\partial l} dl = \int [F_2^0(+\infty, t_1, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{21} = \mathbf{x}_{11}, \xi_1, \xi_2) - \\ &- F_2^0(-\infty, t_1, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{21} = \mathbf{x}_{11}, \xi_1, \xi_2)] g \rho d\rho d\omega d\xi_2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, уравнение (3.8) больше не содержит  $d$ -масштаба и является уравнением в 1-масштабе. В этом масштабе  $F_2^0(+\infty, t_1, \mathbf{x}_{11},$

$\xi_1, \xi_2$ ) — вероятность найти в точке  $x_{11}$  молекулы со скоростями  $\xi_1$  и  $\xi_2$  до столкновения, а  $F_2^\circ(+\infty, t_1, x_{11}, \xi_1, \xi_2)$  — вероятность найти в той же точке молекулы с теми же скоростями после столкновения. Известно, что если молекулы со скоростями  $\xi_1$  и  $\xi_2$  при столкновении с прицельным расстоянием  $\rho$  приобретают скорости  $\xi'_1$  и  $\xi'_2$ , то молекулы со скоростями  $\xi'_1$  и  $\xi'_2$  сталкивающиеся с тем же прицельным расстоянием, приобретают скорости  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Поэтому

$$F_2^\circ(+\infty, t_1, x_{11}, \xi_1, x_{11}, \xi_2) = F_2^\circ(-\infty, t_1, x_{11}, \xi'_1, x_{11}, \xi'_2) \equiv F_2^\circ$$

$$\frac{dF_1^\circ}{dt_1} = \int (F_2^\circ - F_2^\circ) g \rho d\rho d\omega d\xi_2 \quad (3.9)$$

Если до столкновения в 1-масштабе выполняется условие хаоса

$$F_2^\circ(t_1, z_{11}, z_{21}) = F_1^\circ(t_1, z_{11}) F_1^\circ(t_1, z_{21}) \quad (3.10)$$

то уравнение (3.9) переходит в уравнение Больцмана

$$\frac{dF_1^\circ}{dt_1} = \int [F_1^\circ(z_{11}') F_1^\circ(z_{21}') - F_1^\circ(z_{11}) F_1^\circ(z_{21})] g \rho d\rho d\omega d\xi_2 \quad (3.11)$$

Таким образом, для вывода уравнения Больцмана необходимо лишь выполнение условия (2.5) и условия хаоса (3.10) в 1-масштабе.

4. Единственным механизмом, могущим приводить к установлению молекулярного хаоса или нарушать его, является механизм столкновений молекул. Поэтому хаос не может устанавливаться за время, меньшее  $t$ , или на длинах, меньших  $\lambda$ . С другой стороны, ясно, что столкновения нарушают условие хаоса, так как положение и скорости только что столкнувшихся молекул коррелированы. Однако при  $N \rightarrow \infty$ , прежде чем эти молекулы столкнутся вторично, они испытывают огромное число столкновений с другими молекулами. Поэтому условие хаоса должно сохраняться, если оно выполнено в начальный момент (см. [3,4]).

Рассмотрим уравнения (3.4) для  $v = 1$  и произвольных, но конечных  $s$ . Очевидно, что при  $t_0 \rightarrow \infty$  функции  $F_s^\circ$  будут неограниченно расти, если не выполняются условия

$$\frac{d_s F_s^\circ}{dt_1} = - \sum_{i=1}^s \int \frac{\mathbf{X}_{i,s+1}}{m} \frac{\partial F_{s+1}^\circ}{\partial \xi_i} dz_{s+1,0} \quad (s < \infty) \quad (4.1)$$

Эти уравнения выполняются при  $t_0 \rightarrow \infty$  и, следовательно, при  $r_{ij} \rightarrow \infty$  ( $i, j = 1, \dots, s$ ), т. е. когда  $s$  молекул уже не взаимодействуют. Интегралы в правых частях уравнений (4.1) легко преобразовать при помощи уравнений (3.3) точно так же, как это сделано при выводе уравнения (3.9); в результате имеем (см. [4], гл. VI; [5]) уравнения для функций  $F_s^\circ$  в 1-масштабе

$$\begin{aligned} & \frac{d_s}{dt_1} F_s^\circ(t_1, x_{11}, \dots, x_{s1}, \xi_1, \dots, \xi_s) = \\ & = \sum_{i=1}^s \int [F_{s+1}^\circ(t_1, x_{11}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{s+1,1} = x_{i1}, \xi_1, \dots, \xi_i', \dots, \xi_s, \xi_{s+1}')] - \\ & - F_{s+1}^\circ(t_1, x_{11}, \dots, x_{i1}, \dots, x_{s+1,1} = x_{i1}, \xi_1, \dots, \xi_i, \dots, \xi_s, \xi_{s+1})] g_{i,s+1} \rho d\rho d\omega d\xi_2 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Непосредственной подстановкой легко проверить, что уравнения (4.1) имеют «хаотическое» решение

$$F_s^\circ(t_1, z_{11}, \dots, z_{s1}) = \prod_{i=1}^s F_1^\circ(t_1, z_{i1}) \quad (4.3)$$

где функции  $F_1^\circ$  удовлетворяют уравнению Больцмана (3.11), если оно не нарушается начальными и граничными условиями. Однако можно показать<sup>1</sup>, что решение уравнений (4.2) стремится при удалении от границы и начального момента к виду (4.3) и в том случае, когда условия хаоса на границе и в начальный момент не выполняются, если  $L \gg \lambda$  и  $T \gg \tau$ , т. е. если число Кнудсена  $K = \varepsilon_1 \ll 1$ . Действительно, вспоминая (3.5), уравнения (4.2) можно переписать в виде

$$\frac{d_s F}{dt_1} + \varepsilon_1 \frac{d_s F_s}{dt_L} = \sum_{i=1}^s \int (F_{s+1}' - F_{s+1}) g_{i,s+1} d\rho d\omega d\xi_{s+1} \quad (4.4)$$

При  $K \ll 1$  имеем два существенно различных характерных масштаба: короткий  $\lambda$ -масштаб и длинный  $L$ -масштаб. Для того чтобы удовлетворялось уравнение Больцмана, достаточно потребовать удовлетворения условия хаоса в  $\lambda$ -масштабе, в то время как в  $L$ -масштабе он может и отсутствовать, т. е. должно выполняться условие

$$\begin{aligned} F_s(t_1, x_{11}, \dots, x_{s1}, t_L, x_{1L} = x_L, \dots, x_{sL} = x_L, \xi_1, \dots, \xi_s) = \\ = \prod_{i=1}^s F_1(t_1, x_{i1}, t_L, x_L, \xi_i) \end{aligned} \quad (4.5)$$

когда все молекулы находятся в одной точке в  $L$ -масштабе, в то время как условие (4.5) может не выполняться, если частицы находятся в разных точках  $x_{iL}$  в  $L$ -масштабе. Хаос в  $\lambda$ -масштабе есть собственно молекулярный хаос.

Будем искать решение уравнений (4.4) в некоторой точке  $(x_L, t_L)$   $L$ -масштаба в виде ряда

$$\begin{aligned} F_s(t_1, x_{11}, t_L, x_{1L} = x_L, \xi_i, \varepsilon_1) = \\ = F_s^\circ(t_1, x_{11}, t_L, x_L, \xi_i) + \varepsilon_1 F_s^1(t_1, x_{11}, t_L, x_L, \xi_i) + \dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Подставляя (4.6) в уравнения (4.4) и приравнивая коэффициенты при равных степенях  $\varepsilon_1$ , получим

$$\frac{d_s F_s^\circ}{dt_1} = \sum_{i=1}^s \int (F_{s+1}^\circ - F_{s+1}) g_{i,s+1} d\rho d\omega d\xi_{s+1} \quad (4.7)$$

$$\frac{d_s F_s^1}{dt_1} + \frac{d_s F_s^0}{dt_L} = \sum_{i=1}^s \int (F_{s+1}' - F_{s+1}) g_{i,s+1} d\rho d\omega d\xi_{s+1} \quad (4.8)$$

Будем следить за молекулами в  $\lambda$ -масштабе в выбранной точке  $L$ -масштаба. Тогда при  $t_1 \rightarrow \infty$  функции  $F_s^\circ$  будут неограниченно расти, если не выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^s \int (F_{s+1}^\circ(t_1 \rightarrow \infty) - F_{s+1}(t_1 \rightarrow \infty)) g_{i,s+1} d\rho d\omega d\xi_{s+1} = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{d_s F_s^\circ(t_1 \rightarrow \infty)}{dt_L} = \sum_{i=1}^s \int (F_{s+1}'(t_1 \rightarrow \infty) - F_{s+1}(t_1 \rightarrow \infty)) g_{i,s+1} d\rho d\omega d\xi_{s+1} \quad (4.10)$$

Это — рекуррентная система интегральных уравнений по переменным  $\xi_i$ , для отыскания решения которой не требуются начальные и граничные условия по  $t$  и  $x$ .

<sup>1</sup> Ср. работу [7].

Интегральные части всех уравнений одинаковы. Однородное уравнение (4.9) есть уравнение, описывающее равновесное состояние. Если решение этого уравнения единственno<sup>1</sup>, то единственным решением системы уравнений (4.9), (4.10) и так далее, к которому должно стремиться решение уравнений (4.7), (4.8), ..., будет хаотическое решение

$$\begin{aligned} F_s^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1, \dots, \xi_s) &= \prod_{i=1}^s F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_i) \\ F_s^1(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1, \dots, \xi_s) &= \sum_{i=1}^s F_1^1(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_j) \end{aligned} \quad (4.11)$$

где функции  $F_1^{\circ}, F_1^1 \dots$  удовлетворяют уравнениям

(4.12)

$$\begin{aligned} \int [F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1') F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_2') - F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1) F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_2)] g_{12} d\mathbf{p} d\omega d\xi_2 = 0 \\ \frac{dF_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1)}{dt_L} = \int [F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1') F_1'(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_2') + \\ + F_1^1(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1') F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_2') - F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1) F_1^1(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_2) - \\ - F_1^1(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_1) F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi_2)] g_{12} d\mathbf{p} d\omega d\xi_2 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Уравнения (4.12), (4.13) есть не что иное, как цепочка уравнений в методе Энскога — Чепмена решения уравнения Больцмана [6].

Следовательно, вне кнудсеновского слоя решение стремится к решению Гильберта — Энскога, а следовательно, — к уравнениям гидродинамики.

Таким образом, при  $K \ll 1$  характерным масштабом установления молекулярного хаоса является  $\lambda$ -масштаб. Вне кнудсеновского слоя справедливы как уравнение Больцмана, так и уравнения гидродинамики. Внутри же кнудсеновского слоя в общем случае уравнения Больцмана не применимы, если начальные и граничные условия не удовлетворяют в  $\lambda$ -масштабе условию хаоса. Если же последние условия удовлетворены, то течение описывается уравнением Больцмана, но не применимы уравнения гидродинамики или более высокие приближения в смысле Энскога — Чепмена (уравнения Барнетта и т. д.).

5. Гидродинамическая турбулентность является прекрасным примером явления, в котором имеется хаос на молекулярном уровне, в то время когда течение в макроскопическом смысле коррелировано. Так как масштаб гидродинамической турбулентности  $L \gg \lambda$ , и  $T \gg \tau$ , то молекулярный хаос успевает установиться и для ее описания применимы уравнения Больцмана, а при оставлении лишь первых двух членов в ряде Энскога (4.6) — и уравнения гидродинамики. Так, например, для крупномасштабных пульсаций число Кнудсена может быть столь малым, что можно ограничиться первым членом  $F_s^{\circ}$  в ряде Энскога (4.6). Решением уравнения (4.12), как известно, является равновесная максвелловская функция распределения

$$F_1^{\circ}(t_L, \mathbf{x}_L, \xi) = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m}{2kT} [(\xi_1 - u_1)^2 + (\xi_2 - u_2)^2 + (\xi_3 - u_3)^2] \right\} \quad (5.1)$$

$$(T = T(t_L, \mathbf{x}_L), \quad u_i = u_i(t_L, \mathbf{x}_L))$$

<sup>1</sup> Это предположение существенно.

Рассмотрим, например, осреднение по некоторому гидродинамическому временному масштабу интеграла от функции в турбулентном движении; имеем

$$\begin{aligned} & \left\langle \int \xi_{11} \xi_{22} F_2(t, x_1, \xi_1, x_2 = x_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right\rangle = \\ & = \left\langle \int \xi_{11} F_1(t, x_1, \xi_1) d\xi_1 \int \xi_{22} F_1(t, x_1, \xi_2) d\xi_2 \right\rangle = \langle u_1(t, x_1) u_2(t, x_1) \rangle \neq 0 \end{aligned}$$

т. е. макроскопические скорости в точке  $x_1$  закоррелированы, несмотря на наличие молекулярного хаоса.

Именно, благодаря наличию  $L$ -масштаба, много большего  $\lambda$ -масштаба, собственно говоря, и возможны турбулентные (упорядоченные) макроскопические движения, несмотря на то, что практически всегда начальные и граничные условия удовлетворяют условию молекулярного хаоса.

Если же  $L \ll \lambda$  и  $T \ll \tau$ , то течение может быть турбулентным лишь в том случае, когда в начальных и граничных условиях нарушены условия хаоса. Однако весьма трудно представить себе осуществление таких граничных условий в газах низкой плотности (при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ), а следовательно, трудно осуществимы и турбулентные движения с характерными масштабами  $L \ll \lambda$  и  $T \ll \tau$ .

Поступило 9 II 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н. Н., Кинетические уравнения, ЖЭТФ, 1946, т. 16, вып. 8.
2. Mc Cune J. E., Sandri G., Friesman E. A. A new approach to nonequilibrium statistical Mechanics of Gases. Rarefied Gas Dynamics. Third symposium. Academic press. N. Y.—London, 1963.
3. Grad H. Principles of the kinetic theory of Gases. Handbuch der Physik. ed. by S. Flugge. Band 12, 1958.
4. Prigogine I. Non-equilibrium statistical mechanics. 1962. Interscience publishers. N. F. London.
5. Жигулев В. Н., К теории упорядоченных статистических систем. Докл. АН СССР, 1965, т. 161, № 5.
6. Чепмен С. и Каулинг Т., Математическая теория неоднородных газов. М., Изд. иностран. лит., 1960.
7. Струминский В. В. О решении цепочки кинетических уравнений. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 1.