

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В ТРУБАХ МЕТОДОМ ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ

Н. В. БАНИЧУК

(Москва)

В статье рассматривается задача о движении вязко-пластической среды в трубах и каналах. Используются результаты работ [1,2], где даны вариационная формулировка и качественный анализ указанной задачи. Для численного решения вариационной задачи применяется метод локальных вариаций, предложенный в [3]. Более подробное изложение алгоритма этого метода применительно к крайевым и вариационным задачам содержится в [4]. Приводятся результаты расчетов на ЭВМ некоторых конкретных задач.

1. Рассмотрим задачу о стационарном течении вязко-пластической среды в цилиндрической трубе. Расположим прямоугольную систему координат xuz таким образом, чтобы ось z была параллельна оси цилиндра. Обозначим через D область поперечного сечения трубы плоскостью xu , а через C — границу области D . Труба заполнена вязко-пластической средой с вязкостью μ и предельным напряжением сдвига τ_0 . В направлении оси z действует постоянный перепад давления Δp . Через u обозначим скорость течения жидкости вдоль оси z . Используя результаты работы [2], можем утверждать, что реализуется течение, которое удовлетворяет крайевому условию

$$u = 0 \text{ на } C \quad (1.1)$$

и доставляет минимум функционалу

$$I = \iint_D \left\{ \frac{\mu}{2} (u_x^2 + u_y^2) + \tau_0 (u_x^2 + u_y^2)^{1/2} - \Delta p u \right\} dx dy \quad (1.2)$$

При этом расход среды через поперечное сечение D вычисляется по формуле

$$Q = \iint_D u dx dy \quad (1.3)$$

Введем безразмерную скорость $u' = \mu u / \tau_0$, безразмерный расход среды $Q' = Q \mu / \tau_0$ и безразмерный функционал $I' = I \mu / \tau_0^2$, а отношение $\Delta p / \tau_0$ обозначим через α (будем в дальнейшем опускать штрихи). В новых переменных функционал (1.2) примет вид

$$I = \iint_D \left\{ \frac{u_x^2 + u_y^2}{2} + (u_x^2 + u_y^2)^{1/2} - \alpha u \right\} dx dy \quad (1.4)$$

а соотношения (1.1), (1.3) останутся прежними.

2. Решение указанной вариационной задачи проводилось численно на ЭВМ по методу локальных вариаций, предложенному Ф. Л. Черноусько [3]. Изложим этот метод применительно к сформулированной задаче. Разобьем область D на равные прямоугольные ячейки параллельными прямыми $x = i \Delta x$, $y = j \Delta y$, где $\Delta x > 0$ и $\Delta y > 0$ — достаточно малые числа, а $i = 0, 1, 2, \dots, m$; $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Через P_{ij} обозначим точку пересечения прямых с координатами $x_i = i \Delta x$, $y_j = j \Delta y$, а через u_{ij} — значение функции u в точке P_{ij} . Для граничных точек, в силу (1.1), имеем $u_{ij} = 0$. Интеграл (1.4) заменим суммой интегралов по ячейкам, целиком принадлежащим области $D + C$

$$I = \Sigma I_{ij} \quad (2.1)$$

Здесь I_{ij} — интеграл по ячейке с вершинами P_{ij} , $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i+1,j+1}$, который приближенно равен

$$I_{ij} = \Delta x \Delta y \left\{ \frac{1}{2} [(u_x)_{ij}^*]^2 + [(u_y)_{ij}^*]^2 + [(u_x)_{ij}^*]^2 + [(u_y)_{ij}^*]^2 \right\}^{1/2} - \alpha u_{ij}^* \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= (u_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1}) / 4 \\ (u_x)_{ij}^* &= (u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j} - u_{i,j+1} - u_{ij}) / (2\Delta x) \\ (u_y)_{ij}^* &= (u_{i+1,j+1} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j} - u_{ij}) / (2\Delta y) \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к задаче об отыскании значений u_{ij} во всех внутренних точках P_{ij} , которые доставляют минимум сумме (2.1).

Работа алгоритма заключается в следующем. Сначала в таблицу чисел u_{ij} , которая хранится в памяти ЭВМ, засылается начальное приближение для u_{ij} . Затем переходим

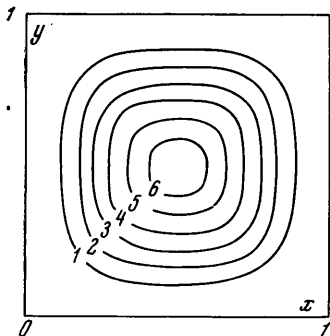
к варьированию во всех внутренних точках значений u_{ij} с заданным шагом $h > 0$ (в граничных точках $u_{ij} = 0$). Если при замене u_{ij} на $u_{ij} + h$ уменьшается сумма тех четырех слагаемых в сумме (2.1), которые зависят от точки P_{ij} , то в таблицу, где хранится решение, вместо u_{ij} записывается $u_{ij} + h$, после чего рассматривается следующая точка. В противном случае аналогично проверяется значение $u_{ij} - h$. Итерация будет окончена, когда проварьируются все внутренние точки.

Затем переходим к следующей итерации, которая выполняется аналогично, и т. д. Если от итерации к итерации функционал не убывает, что шаг h уменьшается, и итерации продолжаются. Если шаг h в процессе итераций стал достаточно малым и дальнейшее его уменьшение не приводит к уменьшению функционала, то уменьшаются вдвое числа Δx , Δy и одновременно удваиваются числа m , n (измельчается сетка). Функция u_{ij} во вновь образованных точках получается интерполяцией по соседним точкам. После этого процесс итераций продолжается аналогичным образом на удвоенной сетке. Итерирование можно закончить, когда числа Δx , Δy , h достаточно малы ($h \ll \max(\Delta x, \Delta y)$) и дальнейшее их уменьшение не будет приводить к уменьшению функционала.

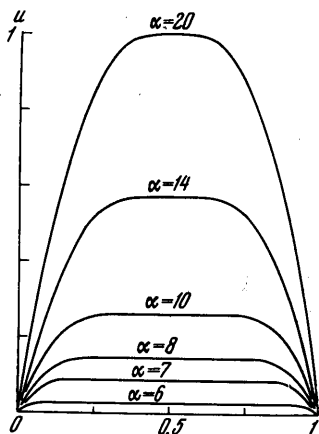
Приближенное решение задачи (1.1), (1.2) определяется путем интерполирования по найденным u_{ij} . Описанный алгоритм локальных вариаций реализован в Вычислительном центре АН СССР в виде стандартной программы решения вариационных задач

для ЭВМ «Стрела» (см. [4]). Отметим, что вариационная задача (1.1), (1.4), как показано в [2], не относится к числу классических вариационных задач и не может быть непосредственно сведена к краевой задаче для уравнений Эйлера. Тем не менее, метод локальных вариаций позволяет получить эффективное численное решение задачи.

3. По описанному выше алгоритму рассчитывалось течение вязко-пластической среды в трубе с поперечным сечением D в виде единичного квадрата ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$). Квадрат D первоначально разбивался сеткой с $m = n = 2$, $\Delta x = \Delta y = 1/2$. Начальное приближение задавалось в виде $u = 0$, а в качестве начального шага варьирования выбиралось $h_0 = 0.1$. Когда варьирование с начальным шагом не давало уменьшения функционала, то шаг уменьшался вдвое и варьирование продолжалось.



Фиг. 2



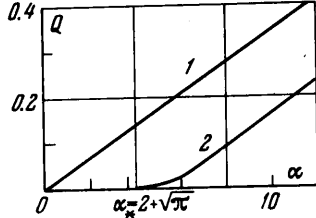
Фиг. 3

Когда после очередного дробления шаг варьирования достигал значения $h_* = 10^{-7}$, то числа Δx , Δy уменьшались вдвое, а числа m , n соответственно увеличивались. После этого шагу варьирования h придавалось его начальное значение h_0 , и процесс варьирования продолжался аналогичным образом на удвоенной сетке. Варьирование оканчивалось, когда $\Delta x = \Delta y = 1/32$, $m = n = 32$, $h = h_*$, а затем по полученному решению просчитывался расход среды через поперечное сечение D по формуле (1.3).

Течения рассчитывались при значениях параметра $\alpha = 6, 7, 8, 10, 14, 20, 30$. На фиг. 1 кривыми 1, 2, 3, 4 показано полученное в результате расчетов при $\alpha = 10$ распределение скоростей соответственно в плоскостях $y = 1/8, 1/4, 3/8, 1/2$. На кривых 2, 3, 4 имеются участки, где скорость постоянна и течение среды происходит как движение твердого тела. Области, где вязко-пластическая среда движется с постоянной скоростью, называются ядрами течений.

Деформация границы ядра течения в плоскости xu при увеличении перепада давления α показана на фиг. 2. На ней замкнутыми кривыми 1, 2, 3, 4, 5, 6 показаны соответственно границы ядер, когда $\alpha = 6, 7, 8, 10, 14, 20$. На фиг. 3 даны распределения скоростей в плоскости $y=1/2$ при различных значениях параметра α , указанных цифрами у кривых. Видно, что при увеличении параметра α (это соответствует увеличению перепада давления или уменьшению предельного напряжения сдвига) размеры ядер уменьшаются. Распределение скоростей при этом приближается к распределению скоростей при течении вязкой жидкости в трубе квадратного сечения.

Зависимость расхода Q от параметра α представлена кривой 2 на фиг. 4. Область $\alpha \leq \alpha_*$, где расход $Q = 0$, соответствует отсутствию течения вязко-пластической среды при перепадах давления, меньших критического. Выражение для α_* в зависимости от размеров и конфигурации области поперечного сечения трубы получено в [2], причем в случае единичного квадрата имеем $\alpha_* = 2 + \sqrt{\pi}$. При $\alpha > \alpha_*$ зависимость $Q(\alpha)$ является нелинейной, а при дальнейшем увеличении параметра α стремится к прямой. При $\alpha = 20$ тангенс угла наклона кривой $Q(\alpha)$ к оси α равен $dQ/d\alpha = 0.034$. Отметим, что в случае вязкой жидкости, подчиняющейся уравнениям Навье — Стокса, задача о стационарном течении в трубе сводится к задаче Дирихле для уравнения Пуассона и легко решается методом Фурье. Зависимость расхода вязкой жидкости от перепада давления для трубы квадратного сечения представлена прямой 1 на фиг. 4, уравнение которой $Q/\alpha = 0.036$.

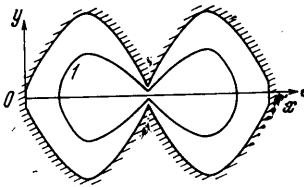


Фиг. 4

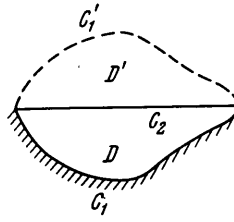
4. Рассмотрим течение вязко-пластической среды в трубе, поперечным сечением которой является область D (см. фиг. 5): $0 \leq x \leq 1, |y| \leq f$, где $f = a + |\sin 2\pi x|$. Воспользуемся следующим преобразованием: $x' = x, y' = y/f(x)$ (в дальнейшем штрихи опускаем). При этом преобразовании область D деформируется в прямоугольник D_0 : $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$, а функционал (1.4) принимает вид

$$I = \iint_{D_0} \left\{ \frac{u_x^2 + u_y^2 / f^2}{2} + (u_x^2 + u_y^2 / f^2)^{1/2} - \alpha u \right\} f dx dy \quad (3.1)$$

Минимизация функционала (3.1) проводилась аналогично тому, как это делалось в случае расчета течения по трубе с квадратным поперечным сечением. Расчеты проводились при перепаде давления $\alpha = 8$ для следующих значений параметра a , характеризующего минимальную ширину области D (фиг. 5): $a = 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64$.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 кривой 1 нанесена граница ядра течения, когда параметр a равен $1/8$. При уменьшении параметра a ядро течения остается односвязным. Представлена полученная в результате расчетов зависимость скорости движения ядра u_* от параметра a .

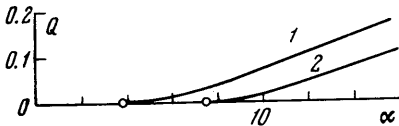
a	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$
u_*	0.404	0.353	0.324	0.314	0.312

5. Рассмотрим стационарное течение вязко-пластической среды в открытом наклонном канале под действием силы тяжести. Давление атмосферы над свободной поверхностью среды предполагается постоянным. Пусть ось z параллельна образующей стенок канала и расположена под углом ϕ к горизонту. Через D обозначим поперечное сечение канала плоскостью, перпендикулярной оси z (фиг. 6), границы области D — кривая C_1 (сечение стенок канала) и прямая C_2 (сечение свободной поверхности). Используя общий вариационный принцип медленных движений вязко-пластической среды [2], можем утверждать, что реализуется течение, которое удовле-

творяет краевому условию $u = 0$ на C и доставляет минимум функционалу (1.2). Для рассматриваемого течения постоянная Δp , входящая в функционал (1.2), равна $\Delta p = \rho g \sin \Phi$, где через g обозначено ускорение свободного падения в поле тяжести земли, а через ρ — плотность среды.

Величина скорости на свободной поверхности не фиксирована. Для численного решения сформулированной вариационной задачи нужно несколько изменить алгоритм, описанный в п. 2. Будем различать граничные точки, соответствующие кривой C_1 и прямой C_2 . В граничных точках, соответствующих стенкам канала, имеем $u_{ij} = 0$. Величины же скоростей в граничных точках, соответствующих свободной поверхности среды, не фиксируются. Значения скоростей в этих точках варьируются в процессе решения задачи аналогично тому, как это делается для внутренних точек, лишь с тем отличием, что в рассмотрении берется сумма функционалов по двум прилегающим к данной граничной точке ячейкам, а не по четырем ячейкам, как делается для внутренних точек.

В настоящей статье для расчета течения в канале был использован другой простой прием, сводящий указанную задачу к расчету течения в трубе. Пусть область D' симметрична области D относительно прямой C_2 . Рассмотрим область $D + D'$, ограниченную кривыми C_1 и C_1' (C_1' симметрична C_1).



Пусть решена задача о течении вязко-пластической среды в трубе с поперечным сечением $D + D'$ при граничном условии $u = 0$ на $C_1 + C_1'$. Тогда полученное решение удовлетворяет условию прилипания на кривой C_1 и, в силу аддитивности функционала (1.2), реализует его минимум в области D . Таким образом, решение задачи о течении вязко-пластической среды в трубе с попереч-

ным сечением $D + D'$, рассматриваемое в области D , будет решением задачи о движении среды по каналу поперечного сечения D . Следовательно, полученное выше численное решение задачи о течении в трубе с поперечным сечением в виде единичного квадрата ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$) можно рассматривать как решение соответствующей задачи для канала с поперечным сечением в виде прямоугольника: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1/2$. Здесь отрезок прямой $y = 1/2$ — свободная поверхность среды, а отрезки прямых $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ — стенки канала. На фиг. 7 дается сравнение расхода Q для течения вязко-пластической среды по каналу с поперечным сечением $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1/2$ (где отрезок $y = 1/2$ представляет свободную поверхность) и течением этой же среды по трубе с тем же поперечным сечением. Зависимость $Q(\alpha)$ для канала представлена кривой 1, а для трубы — кривой 2 (фиг. 7). Расчет течения в трубе с указанным прямоугольным сечением проводился аналогично расчету для трубы с квадратным сечением. Из фиг. 7 видно, что наличие свободной поверхности (при той же форме сечения) приводит к увеличению расхода среды.

Автор искренне благодарит Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и ценные советы, Г. И. Баренблатта и С. С. Григоряна — за полезные обсуждения.

Поступило 20 IV 1966

ЛИТЕРАТУРА

- И л ь ю ш и н А. А. Деформация вязко-пластического тела. Уч. зап. МГУ, Механика, 1940, вып. 39.
- М о с о л о в П. П., М я с н и к о в В. П. Вариационные методы в теории течений вязко-пластической среды. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
- Ч е р н о у с ь к о Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 4.
- Б а н и ч у к Н. В., П е т р о в В. М., Ч е р н о у с ь к о Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций. Ж. вычислит. мат. и матем. физ., 1966, № 6.