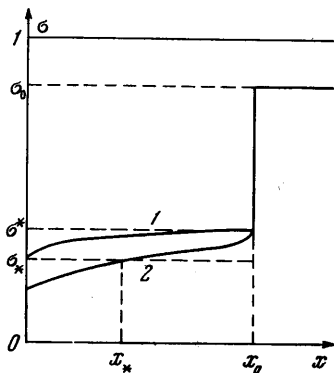


О ЗОНЕ НЕПОДВИЖНОГО ГАЗА ПРИ ВЫТЭСНЕНИИ ГАЗА ВОДОЙ ИЗ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

В. М. РЫЖИК (Москва)

Задача о вытеснении газа водой с учетом подвижности обеих фаз за фронтом обычно рассматривается в рамках теории Бакли — Леверетта, т. е. газ принимается несжимаемым [1]. При этом не учитывается одна важная особенность — образование зоны неподвижного (защемленного) газа.

На входе в пористую среду (на поверхности нагнетания), очевидно, движется только вытесняющая фаза. В случае несжимаемых жидкостей, если не учитывать капиллярных сил, из этого условия следует, что на входе устанавливается насыщенность



Фиг. 1

вытесняемой фазы $\sigma = \sigma_*$ такая, что при $\sigma > \sigma_*$ вытесняемая фаза подвижна, а при $\sigma < \sigma_*$ — неподвижна. Насыщенность σ_* определяется по кривым относительной проницаемости и есть известная величина для данной пористой среды. Таким образом, в зоне смеси за фронтом вытеснения фазовая проницаемость вытесняемой фазы везде отлична от нуля. Иное положение существует в случае, когда вытесняемой фазой является газ, сжимаемость которого значительна. В этих условиях может образоваться (вблизи входа в образец) целая область конечных размеров, в которой $\sigma < \sigma_*$ и вытесняемая фаза (газ) неподвижна (см. фиг. 1, на которой изображено характерное распределение насыщенности; 1 — несжимаемый газ, 2 — сжимаемый газ).

В общем случае решение задачи о вытеснении несмешивающихся жидкостей с учетом сжимаемости наталкивается на большие трудности. Однако при исследовании вытеснения газа водой положение в ряде случаев существенно упрощается ввиду малой вязкости газа по сравнению с вязкостью воды.

1. Как показано в работе Ю. И. Стклянина и В. А. Томельгаса [2], если на фронте вытеснения сжимаемых жидкостей образуется стационарный скачок насыщенности, т. е. скачок, насыщенности по обе стороны которого не зависят от времени, то насыщенности вытесняемой фазы на скачке σ^* и перед ним (σ_0) удовлетворяют известному соотношению теории Бакли — Леверетта [1]

$$\frac{F(\sigma^*) - F(\sigma_0)}{\sigma_0 - \sigma^*} = -F'(\sigma^*) \quad \left(F(\sigma) = \frac{f_1}{f_1 + Mf_2} \right) \quad (1.1)$$

Здесь $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ — относительные проницаемости для вытесняющей и вытесняемой жидкостей (воды и газа), M — отношение вязкостей воды и газа. В обычных условиях M велико — порядка 50—100. Начальная водонасыщенность $1 - \sigma_0$ чаще всего не превышает 0,30.

При этих условиях, как легко проверить, σ^* мало отличается от насыщенности σ_* , при которой газовая фаза неподвижна (во многих случаях поэтому оправдано предположение о поршневом вытеснении газа водой). Найдем приближенно величину $\sigma^* - \sigma_*$. Относительную проницаемость для газа при σ , близких к σ_* , можно представить в виде $f_2 = \beta(\sigma - \sigma_*)^\gamma$, где $\gamma > 1$ (обычно $\gamma \geq 2$). При больших значениях M

$$F(\sigma) \approx 1 - M \frac{f_2(\sigma)}{f_1(\sigma_*)}, \quad F'(\sigma) \approx -M \frac{f_2'(\sigma)}{f_1(\sigma_*)} \quad (1.2)$$

В то же время $F(\sigma_0)$ очень мало. Тогда из (1.1), учитывая, что $f_2(\sigma^*) \ll f_2'(\sigma^*)$, ввиду малости $\sigma^* - \sigma_*$, получим

$$f_2(\sigma^*) = \frac{f_1(\sigma_*)}{M(\sigma_0 - \sigma_*)}, \quad \text{или} \quad \sigma^* - \sigma_* = \left[\frac{f_1(\sigma_*)}{M\beta(\sigma_0 - \sigma_*)} \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (1.3)$$

Из (1.3) следует, что если $\gamma \geq 2$, то $\sigma^* - \sigma_*$ много меньше, чем обычные значения σ_* .

Для приближенного решения задачи о вытеснении газа водой используем два обстоятельства. Во-первых, во всей зоне, где газ подвижен, газонасыщенность мало отличается от постоянной σ_* . Поэтому относительную проницаемость для воды в этой зоне можно считать практически постоянной. Во-вторых, из формулы (1.3) следует, что относительная подвижность газа Mf_2 при больших значениях M имеет порядок $M^{-1/(\gamma-1)}$ и в обычных условиях много меньше единицы. Поэтому фильтрационное сопро-

тивление в зоне подвижного газа определяется фактически только величиной проницаемости для воды и есть величина постоянная. Это означает, что распределение давления может быть найдено по схеме поршневого вытеснения, и при исследовании давления можно считать известной функцией координат и времени.

2. Рассмотрим задачу о вытеснении газа водой из полубесконечного прямолинейного пласта при постоянном давлении нагнетания и давления на бесконечности. Эта задача, как известно [3], является автомодельной, и насыщенность на скачке не зависит от времени. Поэтому можно использовать предложенное выше приближение.

Уравнения совместной одномерной фильтрации воды и идеального газа без учета растворимости капиллярных сил имеют вид [2]

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + D^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial P}{\partial t} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} (P\sigma) - MD^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(f_2 P \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \quad \left(P = \frac{p}{p_1}, \quad D^2 = \frac{k p_1}{m \mu_1} \right)$$

Вода предполагается несжимаемой. Здесь P — безразмерное давление, p_1 — давление нагнетания, μ_1 — вязкость воды, k — проницаемость, m — пористость.

Пусть при $t = 0$, $P = P_0 = \text{const}$, $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$. При $x = 0$ имеем $f_2 = 0$ (нагнетается только вода) и $P = 1$. Тогда P и σ будут функциями автомодельной переменной $\xi = x/D\sqrt{t}$. Уравнения (2.1) в автомодельных переменных имеют вид

$$\frac{\xi}{2} \frac{d\sigma}{d\xi} - \frac{d}{d\xi} \left(f_1 \frac{dP}{d\xi} \right) = 0, \quad \frac{\xi}{2} \frac{d(P\sigma)}{d\xi} + M \frac{d}{d\xi} \left(f_2 P \frac{dP}{d\xi} \right) = 0 \quad (2.2)$$

При вытеснении газа водой, как и при вытеснении несжимаемых жидкостей, образуется скачок насыщенности (фиг. 1, $x = x_0$). За фронтом скачка образуются две зоны. В зоне, прилегающей к скачку, газ подвижен, а насыщенность, согласно скаванному в п. 1, мало отличается от σ_* . В этой зоне давление — фактически линейная функция ξ . Во второй зоне — между точкой $x = x_*$ (где $\sigma = \sigma_*$) и входным сечением газ неподвижен, и из второго уравнения (2.2) следует условие

$$P\sigma = \text{const} \quad (2.3)$$

В случае, когда перепады давления не слишком велики, можно считать, что в зоне заземленного (неподвижного) газа фазовая проницаемость для воды изменяется мало. Поэтому за нулевое приближение давления за скачком примем

$$P = 1 - \frac{1 - P^*}{\xi_0} \xi \quad (2.4)$$

Здесь ξ_0 — автомодельная координата скачка, P^* — давление на скачке. ξ_0 в том же приближении определяется из условия сохранения массы на скачке [1]

$$\frac{dx_0}{dt} = \frac{u_1^{(1)} - u_1^{(0)}}{m(\sigma_0 - \sigma^*)} \quad (2.5)$$

Здесь $u_1^{(1)}$ и $u_1^{(0)}$ — скорости фильтрации воды по обе стороны скачка. В автомодельных переменных

$$\xi_0 = -2 \frac{f_1(\sigma^*)}{\sigma_0 - \sigma^*} \left(\frac{dP}{d\xi} \right)^* \quad (2.6)$$

Используя приближенное выражение (2.4), получим

$$\xi_0 = \left(2 \frac{f_1(\sigma^*)}{\sigma_0 - \sigma^*} (1 - P^*) \right)^{1/2} \quad (2.7)$$

Давление на скачке может быть найдено путем решения автомодельного уравнения фильтрации газа в зоне перед скачком. Решение облегчается тем обстоятельством, что уравнение фильтрации газа в большинстве случаев может быть линеаризовано. Если важно знать только распределение насыщенности за скачком, то, ввиду малой вязкости газа, можно в формуле (2.4) с принятой точностью положить $P^* = P_0$.

Распределение газонасыщенности находится при помощи уравнения неразрывности для газа (второе из уравнений (2.2)). Подстановка вместо P выражения (2.4) дает

$$-\xi\sigma R + \xi P \frac{d\sigma}{d\xi} + 2Mf_2(\sigma)R^2 - 2Mf_2'(\sigma)PR \frac{d\sigma}{d\xi} = 0 \quad (2.8)$$

$$R = \frac{1 - P^*}{\xi_0} = \frac{\sigma_0 - \sigma^*}{2f_1(\sigma^*)} (1 - P^*)^{1/2}$$

Из (2.8) следует

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{\xi\sigma R - 2Mf_2R^2}{[\xi - 2Mf_2'(\sigma)R](1 - R\xi)} \quad (2.9)$$

Заметим, что на фронте скачка, в силу формулы (1.1) и приближенных выражений (1.3) и (2.7), выполняется соотношение

$$\xi = 2Mf_2'(\sigma)R \tag{2.10}$$

и, следовательно, $d\sigma/d\xi \rightarrow \infty$. Формула (2.10) будет в принятом приближении для произвольных ξ и σ решением задачи о вытеснении несжимаемых жидкостей (решение Бакли — Леверетта).

Уравнение (2.9) легко решается численно. Приближенное аналитическое решение можно найти, когда f_2 представляется в виде $\beta(\sigma - \sigma_*)^2$, т. е. $\gamma = 2$. В этом случае, в соответствии с формулой (1.4), при обычных значениях параметров M , β и σ_* имеем $\sigma^* - \sigma_* \ll \sigma_*$. Тогда в числителе правой части уравнения (2.9) можно оставить только первое слагаемое, которое представляется в виде $\xi\sigma_*R$. Ограничимся случаем, когда $1 - P_0$ не превышает 0.5 и в уравнении (2.9) вместо $1 - R\xi$ можно приближенно подставить постоянную величину $P^* = 1 - 0.5R\xi_0$. Условие $1 - P_0 < 0.5$ охватывает практически все интересные случаи.

С учетом всех сделанных допущений уравнение (2.9) перейдет в следующее:

$$\frac{d\sigma}{d\xi} = \frac{\xi\sigma_*R}{[\xi - 4MR\beta(\sigma - \sigma_*)]P^*} \tag{2.11}$$

Сделаем замену переменных

$$\frac{\sigma - \sigma_*}{\sigma^* - \sigma_*} = \varepsilon, \quad \frac{\xi}{\xi_0} = \zeta$$

Тогда получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = \frac{\alpha\zeta}{\zeta - \varepsilon} \quad \left(\alpha = \frac{4MR^2\beta\sigma_*}{P^*}\right) \tag{2.12}$$

Однородное уравнение первого порядка (2.12) легко интегрируется при помощи подстановки $\tau = \varepsilon/\zeta$; в результате получим

$$1. \text{ При } \alpha > 0.25 \tag{2.13}$$

$$\ln \zeta = \frac{0.5}{\sqrt{\alpha - 0.25}} \left[\arctg \frac{\tau - 0.5}{\sqrt{\alpha - 0.25}} - \arctg \frac{0.5}{\sqrt{\alpha - 0.25}} \right] - 0.5 \ln \left[1 - \frac{\tau(1 - \tau)}{\alpha} \right]$$

$$2. \text{ При } \alpha < 0.25$$

$$\zeta = \left(\frac{\tau - \delta_1}{1 - \delta_1} \right)^{\delta_2/(\delta_1 - \delta_2)} \left(\frac{\tau - \delta_2}{1 - \delta_2} \right)^{\delta_1/(\delta_1 - \delta_2)} \quad (\delta_1 > \delta_2) \tag{2.14}$$

Здесь δ_1 и δ_2 — корни уравнения $\delta^2 - \delta + \alpha = 0$. На фиг. 2 приведено семейство решений уравнения (2.12) при различных значениях α . Из фиг. 2 видно, что при $\alpha > 0.25$ за фронтом вытеснения существуют обе зоны — подвижного и неподвижного газа. Подвижному газу соответствует область, где $\varepsilon > 0$, т. е. точки от $\zeta = 1$ до точки $\zeta = \zeta_*$ — пересечения соответствующей кривой $\varepsilon(\zeta)$ с осью ζ . Протяженность зоны подвижного газа $1 - \zeta_*$ уменьшается с ростом α . При $\alpha = 4.25$ она составляет всего лишь 0.11. Если $\alpha < 0.25$, то, как следует из равенства (2.14), зона неподвижного газа отсутствует. Таким образом, при малой сжимаемости вытесняемой фазы зона, где эта фаза неподвижна, не образуется. Сжимаемость в этом случае приводит лишь к снижению газонасыщенности в зоне смеси. При $\alpha \rightarrow 0$ влияние сжимаемости падает и распределение насыщенности стремится к распределению для несжимаемых жидкостей, которое выражается формулой $\varepsilon = \zeta$.

Для того чтобы проверить допустимость замены в уравнении (2.9) давления P на P_* , было найдено решение уравнения (2.9) численным методом без этого предположения. Результаты такого расчета изображены на фиг. 2 пунктирными линиями. При численном решении предполагалось, что $1 - P_0 = 0.5$. Сравнение производилось для $\alpha = 0.50$ и $\alpha = 1.25$ так, что в приближенном уравнении (2.11) давление P_* принималось равным $1 - 0.5R\xi_0 = 0.75$. Как видно из фиг. 2, согласно точного и приближенного решений хорошее. Результат может быть заметно улучшен, если для следующего приближения принять значение $P_* = 1 - 0.5R(\xi_0 - \xi_*)$, т. е. среднее давление в зоне подвижного газа, определенной по первому приближению.

Насыщенность в зоне неподвижного газа с теми же допущениями можно найти из условия

$$\sigma = \frac{\sigma_*(1 - R\xi_*)}{1 - R\xi} \tag{2.15}$$

Полученное распределение насыщенностей позволяет найти изменение фильтрационных сопротивлений в зоне смеси и получить следующее приближение для распределения давления. Это можно сделать при помощи первого из уравнений (2.2). Положим $P_1 = 1 - R\xi$ и $P' = P - P_1$. Тогда, считая поправку P' малой, получим из (2.2)

$$\frac{d^2 P'}{d\xi^2} = - \frac{1}{f_1(\sigma)} \frac{d\sigma}{d\xi} \left(\frac{\xi}{2} + f_1'(\sigma) R \right) \quad (2.16)$$

Выразив $\sigma(\xi)$ по формулам (2.13), (2.15) или (2.14) и дважды интегрируя уравнение (2.16), найдем поправочную величину P' . При определении поправок к давлению следует учесть также поправки к величинам P^* и ξ_* , определяемые из уравнения фильтрации газа перед фронтом и условий на скачке.

3. Другой случай вытеснения газа водой с образованием стационарного скачка насыщенности есть предельное решение для одномерного линейного вытеснения с постоянной скоростью. Если вытеснение происходит с постоянной скоростью, то вдали от границ потока p и σ будут функциями переменной $z = x - Vt$, где V — постоянная скорость вытеснения. С учетом этого условия уравнения (2.1) примут вид

$$V \frac{d\sigma}{dz} - \lambda \frac{d}{dz} \left(f_1 \frac{dp}{dz} \right) = 0, \quad V \frac{d}{dz} (p\sigma) + M\lambda \frac{d}{dz} \left(f_2 p \frac{dp}{dz} \right) = 0 \quad \left(\lambda = \frac{k}{m\mu_1} \right) \quad (3.1)$$

Интегрирование дает

$$V\sigma - \lambda f_1 \frac{dp}{dz} = \lambda W, \quad V\sigma + M\lambda f_2 \frac{dp}{dz} = \frac{c}{p} \quad (c = \text{const}) \quad (3.2)$$

Здесь W — предельное значение dp/dz при $z \rightarrow -\infty$. Так как $\sigma \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$ и $\sigma = \sigma_0$ при $z \rightarrow +\infty$, то из условия сохранения массы воды легко получить

$$V = \lambda W / \sigma_0 \quad (3.3)$$

В области, где газ неподвижен, т.е. $\sigma < \sigma_*$, $z < z_0$, имеем $\sigma p = \sigma_* p_1$, при этом $p_1 = p(z_0)$. Из первого уравнения (3.2) следует

$$\frac{dp}{dz} = -W \frac{\sigma_0 - \sigma}{\sigma_0 f_1(\sigma)}, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dz} = -W \frac{\sigma_0 p - \sigma_* p_1}{\sigma_0 p f_1(\sigma_* p_1/p)} \quad (3.4)$$

Если приближенно представить $f_1(\sigma)$ в виде $1 - n\sigma$, где $n = \text{const} > 1$ (что соответствует обычному виду кривых относительных проницаемостей при небольших σ), то интегрирование уравнения (3.4) дает

$$p - p_1 - (n-1) \frac{\sigma_*}{\sigma_0} p_1 \ln \frac{\sigma_0 p - \sigma_* p_1}{(\sigma_0 - \sigma_*) p_1} = - \frac{W}{\sigma_0} (z - z_0) \quad (3.5)$$

В области подвижного газа σ мало отличается от σ_* , поэтому из (3.5) следует

$$p = - \frac{W}{\sigma_0} \frac{\sigma_0 - \sigma_*}{1 - n\sigma_*} z + p_0 \quad (3.6)$$

Здесь p_0 — давление при $z = 0$. Выберем в качестве начала координат по z координату фронта, где $\sigma = \sigma^*$. Из второго уравнения (3.2) имеем, полагая $f_2 = \beta (\sigma - \sigma_*)^\gamma$,

$$\sigma - M\beta (\sigma - \sigma_*)^\gamma \frac{\sigma_0 - \sigma_*}{1 - n\sigma_*} = \frac{\sigma_* p_1}{p} \quad (3.7)$$

Значение p_0 может быть определено из уравнения фильтрации газа перед фронтом. Пренебрегая вязкостью газа, приближенно можно считать $p_0 = p_{\infty}$. Если p_0 известно, то при $z = 0$ уравнение (3.7) дает

$$p_1 = \frac{p_0}{\sigma_*} \left[\sigma^* - M\beta (\sigma^* - \sigma_*)^\gamma \frac{\sigma_0 - \sigma_*}{1 - n\sigma_*} \right] \quad (3.8)$$

так как σ^* известно, то таким образом определяется p_1 . Тогда из уравнения (3.6) можно найти z_0 , и задача решена полностью.

Как отмечалось, в зоне за фронтом подвижность газа Mf_2 обычно мала по сравнению с σ . Тогда из формулы (3.7) видно, что на распределение насыщенности за фронтом при вытеснении с постоянной скоростью подвижность газа влияет незначительно.

Поступило 10 VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч ар н ы й И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
2. С т к л я н и н Ю. И., Т о м е л ь г а с В. А. О движении скачков насыщенности при фильтрации двух компонентных сжимаемых жидкостей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.