

О РАСЧЕТЕ ПРЕРЫВНЫХ ВОЛН В ОТКРЫТЫХ РУСЛАХ

О. Ф. ВАСИЛЬЕВ, М. Т. ГЛАДЫШЕВ

(Новосибирск)

Способы расчета движения прерывных волн в открытых руслах рассматривались в 30-х и 40-х годах рядом авторов, в том числе Б. В. Проскуряковым (1934 г.), С. А. Христиановичем (1936 г.), М. Анри (1938 г.), Н. Т. Мелешенко и М. С. Якубовым (1940 г.), Де Марки (1945 г.), А. Крайа (1945—46 гг.), В. А. Архангельским (1947 г.). С появлением цифровых ЭВМ возникли и новые возможности для расчета прерывных волн. Настоящая работа посвящена численным методам расчета.

Сравнительно недавно в СССР и за рубежом были разработаны численные методы отыскания решений уравнений Сен-Венана без разрывов при неустановившихся течениях в руслах типа паводков и плавных попусков [1-3]. Расчет распространения прерывных волн связан с дополнительными математическими трудностями.

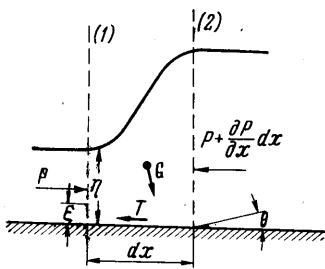
Имеющиеся методы численного расчета прерывных волн: метод характеристик с дополнительными условиями на разрыве [4], метод сеток с введением в уравнения фиктивных членов «псевдовязкости», появление которой приводит к размазыванию разрывов [5], метод сеток по явной шахматной схеме «треугольник» с выделением линии разрыва [6] не лишены недостатков, связанных, в частности с нестандартностью операций при вычислениях, малыми шагами по времени, связанными к тому же с шагами по длине.

Ниже описан численный метод для получения обобщенного решения. Разработанный численный метод позволяет решать задачи о движении прерывных волн без выделения разрывов при неподвижной сетке.

В конце статьи приводятся некоторые сведения о выполненных расчетах.

1. Основные уравнения неустановившихся потоков в открытых руслах. Уравнения неустановившегося, медленно изменяющегося движения жидкости в открытом русле были получены в прошлом столетии французским механиком Сен-Венаном.

Известно, что задачи о неустановившихся одно- и двумерных открытых потоках жидкости имеют глубокую аналогию с соответствующими задачами о газовых потоках (газогидравлическая аналогия или «теория мелкой воды»). Между тем, при разработке численных методов решения газодинамических задач было установлено, что очень важно, чтобы основные уравнения были представлены для решения в так называемой дивергентной форме. Это обстоятельство является наиболее существенным для задач с разрывами. Обычная форма уравнения неразрывности имеет дивергентную форму



Фиг. 1

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \quad (1.1)$$

Здесь x — координата поперечного сечения, отсчитываемая по оси русла, t — время, ω — площадь поперечного сечения потока, Q — расход потока, $q(x, t)$ — путевой приток, приходящийся на единицу длины русла.

Второе уравнение системы — динамическое — выведем из теоремы импульсов.

Выделим в потоке отсек (фиг. 1), ограниченный сечениями 1 и 2, нормальными к линии дна и отстоящими одно от другого на бесконечно малом расстоянии dx . Уравнение потока импульса для выделенного отсека, написанное в проекциях на ось x , совпадающую с линией дна, можно представить в виде

$$F_x = \alpha_2' \rho Q_2 v_2 - \alpha_1' \rho Q_1 v_1 + \partial J / \partial t \quad (v = Q / \omega) \quad (1.2)$$

Здесь F_x — проекция внешних действующих сил на направление движения, ρ и γ — плотность и объемный вес жидкости, v — средняя скорость потока; α' — коэффициент количества движения (коэффициент Буссинеска). J означает количество движения в выделенном отсеке. Предполагается, что направление движения присоединяющихся по пути частиц жидкости перпендикулярно основному направлению движения (оси x). Разность

$$\alpha_2' \rho Q_2 v_2 - \alpha_1' \rho Q_1 v_1 = \rho \frac{\partial (\alpha' Q v)}{\partial x} dx$$

Количество движения в отсеке

$$\xi J = \rho Q dx$$

При вычислении проекции действующих сил F_x нужно учесть следующие внешние силы: 1-проекцию веса отсека $dG = \gamma \omega dx \sin \theta$; 2-давление по поперечным сечениям, разность которых равна $-(\partial P / \partial x) dx$; 3-силу трения $dT = \tau_0 \chi dx$; 4-проекцию боковых реакций поверхности русла dR_s .

Здесь θ — угол наклона дна к горизонту, χ — длина смоченного периметра поперечного сечения, τ_0 — среднее касательное напряжение по смоченному периметру, P — сила давления жидкости в поперечном сечении потока.

Таким образом, проекция действующих сил

$$F_x = dG - \frac{\partial P}{\partial x} dx - dT + dR_s \quad (1.3)$$

Площадь поперечного сечения потока

$$\omega = \int_0^{\eta} b(x, \xi) d\xi \quad (1.4)$$

Здесь ξ — расстояние от дна, отсчитываемого по нормали к линии дна; b — ширина поперечного сечения потока; η — толщина слоя воды. Сила давления жидкости в сечении потока,

$$P = \gamma \cos \theta \int_0^{\eta} (\eta - \xi) b(x, \xi) d\xi \quad (1.5)$$

Проекция боковых реакций поверхности русла

$$dR_s = \gamma \cos \theta \int_0^{\eta} (\eta - \xi) \frac{\partial b(x, \xi)}{\partial x} d\xi dx$$

Заметим, что в (1.3) разность

$$dR_s - \frac{\partial P}{\partial x} dx = - \frac{\partial}{\partial x} (P)_{b=\text{const}} dx$$

Ввиду того что реальный «разрыв» (движущийся гидравлический прыжок) имеет относительно малую протяженность вдоль русла, а в остальном течении предполагаем плавную изменяемость движения по длине и относительно медленную изменяемость во времени, воспользуемся известным выражением для пристенных касательных напряжений

$$\tau_0 / \rho = gR i_m$$

Здесь g — ускорение силы тяжести, R — гидравлический радиус.

Положив также, что уклон трения i_m , в силу сказанного выше, может быть выражен при помощи формулы Шези, получим

$$\frac{\tau_0}{\rho} \chi = g\omega \frac{v |v|}{C^2 R} = g\omega \frac{|Q| |Q|}{K^2} \quad (K = \omega C \sqrt{R})$$

Здесь C — коэффициент Шези; K — модуль расхода.

Получим из (1.2) и (1.3) динамическое уравнение в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{P}{\rho} \right)_b + \alpha' \frac{Q^2}{\omega} \right] = g\omega \left(i - \frac{|Q| |Q|}{K^2} \right) \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{|P|}{\rho} \right)_b = \left(\frac{P}{\rho} \right)_{b=\text{const}}, \quad i = \sin \theta = - \frac{dz_0}{dx}$$

Здесь $z_0(x)$ — ордината дна русла, $i(x)$ — уклон дна.

Форма записи дифференциальных уравнений (1.1) и (1.6) дивергентная, что весьма существенно для расчета течений с разрывными (прерывными волнами). Обычно уклоны русел столь незначительны, что можно принять $\cos \theta \approx 1$ и соответственно

$$\eta = h \cos \theta \approx h \quad (h = z - z_0)$$

Здесь h — глубина потока, измеряемая по вертикали, z — ордината свободной поверхности потока, отсчитываемая от горизонтальной плоскости. Коэффициент Буассинеска положим $\alpha' \approx 1$. Тогда систему основных уравнений для отыскания Q, ω

можно написать в виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \quad \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{P}{\rho} \right)_b + \frac{Q^2}{\omega} \right] = g\omega \left(i - \frac{Q|Q|}{K^2} \right) \quad (1.7)$$

$$\frac{P}{\rho} = g \int_0^h (h - \xi) b(x, \xi) d\xi \quad (1.8)$$

Здесь P , h и K , так же как и z — функции x и ω . При отсутствии в потоке разрывов

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right)_b = g\omega \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.9)$$

С учетом (1.9) уравнения (1.7) для расчетов течений без разрывов удобно представить в следующей недивергентной форме [7, 8], перейдя к переменным $z(x, t)$, $Q(x, t)$:

$$B \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q, \quad (1-F) \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{g\omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + 2v \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \Phi \quad (1.10)$$

$$\Phi = \left[i + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_h \right] F - \frac{Q|Q|}{K^2}, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_h = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_{h=\text{const}}$$

$$F = (v/c)^2, \quad c^2 = g\omega/B$$

Здесь B — ширина свободной поверхности потока, F — число Фруда, c — скорость распространения малых возмущений.

При преобразовании уравнений (1.7) к (1.10) учтено также, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{Q^2}{\omega} = 2 \frac{Q}{\omega} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{Q^2}{\omega^2} \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_h + B \frac{\partial h}{\partial x} \right], \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial h} = B$$

В качестве начальных условий принимаем положение уровня воды и распределение расходов по длине русла в начальный момент времени ($t = 0$)

$$z = z(x, 0), \quad Q = Q(x, 0) \quad (1.11)$$

При наличии разрывов (прерывных воле) в потоке наблюдаются зоны как спокойного течения, так и бурного. Граничные условия в фиксированных нижнем и верхнем створах рассматриваемого участка русла могут быть заданы в виде

$$\{ Q = Q(t), \quad z = z(t) \quad \text{или} \quad Q = Q(z) \quad (1.12)$$

Число же граничных условий в каждом створе зависит от того, в каком состоянии находится поток в данном створе.

Помимо начальных и граничных условий, для решения дифференциальных уравнений неустановившегося движения должны быть заданы все величины (b , K , z_0 , q), с которыми связано определение коэффициентов уравнений.

2. Обобщенное решение. Обобщенным решением [7, 8] системы (1.7) назовем ограниченные интегрируемые по любой конечной части плоскости xt функции $\omega(x, t)$ и $Q(x, t)$, если они удовлетворяют соотношениям

$$\oint_{\Gamma} Q dt - \omega dx = \iint_S q dx dt, \quad \oint_{\Gamma} \left[\left(\frac{P}{\rho} \right)_b + \frac{Q^2}{\omega} \right] dt - Q dx = \iint_S g\omega \left(i - \frac{Q|Q|}{K^2} \right) dx dt \quad (2.1)$$

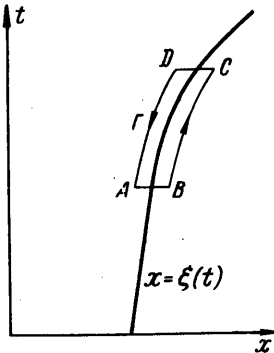
для любого кусочно-гладкого замкнутого контура Γ в плоскости xt и ограниченной им области S (фиг. 2).

Замена системы квазилинейных уравнений системой интегральных законов сохранения позволяет ввести понятие разрывного решения.

Из уравнений (2.1) следуют условия на разрыве или условия динамической совместности.

В силу произвольности контура Γ (фиг. 2) получаем условия на разрыве

$$c_* [\omega] - [Q] = 0, \quad c_* [Q] - \left[\frac{P}{\rho} + \frac{Q^2}{\omega} \right] = 0 \quad (2.2)$$



Фиг. 2

или

$$\left[\frac{P}{\rho} \right] \left[\frac{1}{\omega} \right] + [v^2] = 0, \quad c_* = v^- \pm \left(\frac{\omega^+}{\omega^-} \frac{P^+ - P^-}{\rho(\omega^+ - \omega^-)} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

$$[u] = u^+ - u^-, \quad c_* = d\xi / dt$$

Здесь c_* — скорость движения фронта прерывной волны.

3. Численное решение. Будем пользоваться методом сеток. Применение этого метода к задачам с разрывами осложняется необходимостью рассчитывать подвижные линии разрыва, положение которых в плоскости xt заранее неизвестно.

Для устранения этих затруднений в газовой динамике Лаксом [8] был предложен так называемый метод сквозного счета для построения обобщенного решения (в отличие от метода с введением псевдовязкости). Разностная схема строится таким образом, что позволяет вести вычисления, не обращая внимания на разрывы, так сказать, сквозь них. Такие разностные схемы хорошо оправдали себя на одномерных задачах газовой динамики. В данной работе был использован метод сквозного счета при фиксированной сетке. При применении такого метода обязательна дивергентная форма записи уравнений, а именно, форма их записи в виде законов сохранения (1.7).

Используемая разностная схема при этом является дивергентной, т. е. такой, для которой выполняются интегральные соотношения (2.1) для любой ячейки сеточной области в плоскости xt . При этом естественно ожидать хорошего выполнения соотношений на разрыве, являющихся следствиями законов сохранения.

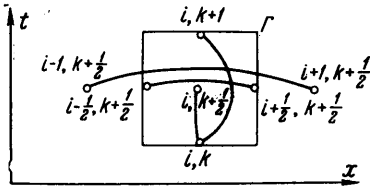
Была использована рекомендованная С. К. Годуновым неявная разностная схема [7]. В соответствии с этой схемой, расчет одного шага по времени разбивается на два этапа (с промежуточной операцией осреднения).

Первый этап — определение величины z , Q на вспомогательном промежуточном слое

$$t^{k+1/2} = tk + \kappa\tau \quad (0 < \kappa \leq 1)$$

В системе (1.10) производные заменяются отношениями разностей ($f = \{z, Q\}$)

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{k+1/2} - f_i^k}{\kappa\tau}, \quad \frac{df}{dx} = \frac{f_{i+1}^{k+1/2} - f_{i-1}^{k+1/2}}{2\Delta} \quad (3.1)$$



Фиг. 3

Коэффициенты при производных и правые части берутся из i -й точки нижнего слоя t^k , за исключением члена трения, который для повышения устойчивости разностной схемы берется на момент времени $t^{k+1/2}$ [3].

Для промежуточного слоя, в силу сказанного выше, правая часть уравнения (1.10) записывалась в виде

$$\Phi_i^{k+1/2} = \left[i + \frac{1}{B} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)_h \right] F_i^k + \left(\frac{Q|Q|}{K^2} \right)_i^k - \left(\frac{2|Q|}{K^2} \right)_i^k Q_i^{k+1/2} + \left(\frac{2|Q|Q|}{K^3} \frac{\partial k}{\partial h} \right)_i^k (z_i^{k+1/2} - z_i^k) \quad (3.2)$$

После определения значений на промежуточном слое с использованием метода прогонки производятся операция осреднения по формулам

$$f_{i+1/2}^{k+1/2} = \begin{cases} 3/8 (f_i^{k+1/2} + f_{i+1}^{k+1/2}) + 1/8 (f_{i-1}^{k+1/2} + f_{i+2}^{k+1/2}) & (i = 2, \dots, n-2) \\ 1/2 (f_i^{k+1/2} + f_{i+1}^{k+1/2}) & (i = 1, n-1) \end{cases} \quad (3.3)$$

где n — общее число точек сетки.

Заключительный этап — определение величин ω , Q на основном слое $t^{k+1} = tk + \tau$ по уравнениям (1.7) с использованием дивергентной схемы «крест». Получаемые разностные уравнения отвечают интегральным соотношениям (2.1), из которых и получается дивергентная схема «крест» (фиг. 3).

Действительно, если взять в качестве контура Γ контур, показанный на фиг. 3, то из соотношений (2.1) будем иметь

$$\omega_i^{k+1} = \omega_i^k - (Q_{i+1/2}^{k+1/2} - Q_{i-1/2}^{k+1/2}) \frac{\tau}{\Delta} + q_i^{k+1/2} \tau$$

$$Q_i^{k+1} = Q_i^k - \left\{ \left[\left(\frac{P}{\rho} \right)_b + \frac{Q^2}{\omega} \right]_{i+1/2}^{k+1/2} - \left[\left(\frac{P}{\rho} \right)_b + \frac{Q^2}{\omega} \right]_{i-1/2}^{k+1/2} \right\} \frac{\tau}{\Delta} + g \left[\omega \left(i - \frac{Q|Q|}{K^2} \right) \right]_i^{k+1/2} \tau \quad (3.4)$$

Для расчета в граничных точках на первом этапе для уравнений, записанных в характеристическом виде, также составляется неявная разностная схема [8]. На фиг. 4 описываемая схема показана для левой границы пунктиром. При этом правые части характеристических уравнений (в том числе — член трения) записывались в разностной схеме в соответствии с (3.2), т. е. как бы переносились в промежуточный слой.

При выполнении операции пересчета (второй этап) уравнения в характеристическом виде расписываются по схеме, указанной на фиг. 4 сплошными линиями. Вычисляются граничные величины после вычисления внутренних точек. Для правой границы строятся аналогичные схемы.

Описанный численный метод позволяет решать задачи о движении прерывных волн без выделения разрывов. Расчеты по описанному неявному методу сквозного счета показали, что его целесообразно использовать для относительно небольших разрывов (слабых прерывных волн). В случае же больших разрывов следует прибегать к использованию метода выделения разрыва.

Заметим, что этим недостатком не обладает явная дивергентная схема, например, «треугольник» Лакса [8], но расчеты по ней надо вести осторожно, а именно, нужно следить за соотношением между τ и Δ , так как «негибкость» этой схемы [8] может привести к существенным погрешностям при больших значениях отношения τ^{-1}/Δ^2 .

4. Примеры выполненных расчетов. Был выполнен ряд расчетов. Параметр κ в формулах (3.1) во всех расчетах принят равным $\kappa = 1$.

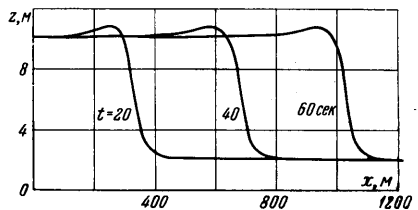
1. *Равномерное движение разрыва.* Расчет проведен для простого случая, когда задача имеет аналитическое решение, данное еще Сен-Венаном. Рассматривается движение в призматическом канале прямоугольного сечения с горизонтальным дном, без учета трения. Длина канала 2 км, ширина 200 м.

В начальный момент жидкость в канале находится в покое

$$\omega(x, 0) = 400 \text{ м}^2, \quad Q(x, 0) = 0$$

Так как поток в верхнем створе при распространении разрыва находится в сверхкритическом состоянии, в этом створе задаются два граничных условия

$$\omega(0, t) = 2000 \text{ м}^2, \quad Q(0, t) = 28000 \text{ м}^3/\text{сек}$$



Фиг. 5

В нижнем створе задается одно граничное условие $Q = 0$. При расчете были приняты шаги $\Delta = 20 \text{ м}$, $\tau = 2 \text{ сек}$.

Результаты расчета (последовательные положения уровня воды при движении разрыва через каждые 20 сек) показаны на фиг. 5.

Скорость распространения прерывной волны по численному расчету (17.3 м/сек) хорошо соответствует величине скорости прерывной волны 17,1 м/сек, полученной по формуле (2.3).

2. *Распространение прерывной волны по покоящейся жидкости.* Расчет производился применительно к опыту Фавра [9] (опыт 7, серия III). Лоток призматический, прямоугольного поперечного сечения, длина лотка 75 м, ширина 0,42 м, дно горизонтальное. Коэффициент шероховатости по Штриклеру-Маннингу $n = 0.01$. В начальный момент жидкость находится в покое при глубине 0.205 м. Затем за 0.2 сек расход в верхнем створе возрастает от 0 до 28 л/сек, в нижнем створе — остается неизменным. Так как в рассматриваемом случае поток как в верхнем, так и в нижнем створах находится в докритическом состоянии, достаточно задать в каждом граничном створе по одному граничному условию. Расчет производился с шагом по длине $\Delta = 0.75 \text{ м}$ и по времени $\tau = 0.2 \text{ сек}$.

На фиг. 6 показано сопоставление результатов расчета (пунктир) и эксперимента (сплошная линия). При использовании данных опыта в области фронта принималась высота волны, полученная Фавром после осреднения ондуляций. Подъем уровней по расчету получается более размазанным во времени, чем в опыте, однако вычисленная скорость распространения прерывной волны и ход уровней во времени согласуются с опытами вполне удовлетворительно.

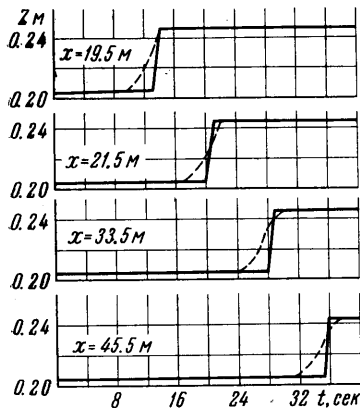
3. *Распространение положительной волны подпора при первоначальном равномерном движении.* Расчет производится применительно к опыту И. В. Егизарова [10], фиг. 22).

Призматический лоток прямоугольного поперечного сечения имеет уклон $i = 0.005$. Длина лотка 75 м, ширина 0,4 м, коэффициент Шези $C = 40 \text{ м}^{1/2} \text{ сек}^{-1}$ (автором приводится зависимость $C = f(h)$).

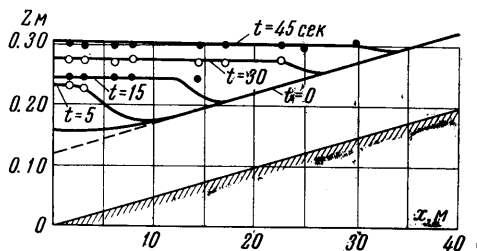
В начальный момент в лотке происходит равномерное движение с расходом 26,3 л/сек при глубине 0,12 м. В нижней части лотка имеет место небольшой подпор. Затем на 0,5 сек нижний конец лотка перекрывается щитом и расход падает до нуля. Расход в верхнем створе остается неизменным. Расчет производился с шагом по длине $\Delta = 0.75 \text{ м}$ по времени $\tau = 0.5 \text{ сек}$.

На фиг. 7 показаны полученные по расчету продольные профили свободной поверхности в моменты времени $t = 5, 15, 30$ и 45 сек (сплошная линия). Там же нанесены точки (белые и черные кружки), полученные из эксперимента. Совпадение расчета с опытом можно считать удовлетворительным.

Таким образом сравнение результатов расчета с результатами экспериментов подтверждает, что даже метод сквозного счета без выделения разрыва в целом вполне удовлетворительно описывает физическую картину распространения прерывных волн.



Фиг. 6



Фиг. 7

Авторы благодарят С. К. Годунова за рекомендации при разработке численного метода; В. Г. Судобичера — за участие в разработке программы; Н. А. Притвиц и Н. Б. Собстель — за подбор экспериментальных материалов для сравнения и выполненные расчеты по ним.

Поступило 8 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев О. Ф., Годунов С. К., Притвиц Н. А., Темноева Т. А., Фрязинова И. Л., Шугрин С. М. Численный метод расчета распространения длинных волн в открытых руслах и приложение его к задаче о паводке. Докл. АН СССР, 1963, т. 151, № 3.
2. Cunge J. A., Wegner M. Integration numerique des equations d'écoulement de Barre de Saint-Venant par un Schéma implicite de difference finies. Houille blanche, 1964, No 1.
3. Васильев О. Ф., Темноева Т. А., Шугрин С. М. Численный метод расчета неустановившихся течений в открытых руслах. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2.
4. Faure J., Nahas N. Etude numérique et expérimentale d'intumescences forte courbure du front. Houille blanche, 1961, No 5.
5. Preissmann A., Cunge J. A. Calcul du mascaret sur machine électronique. Houille blanche, 1961, No 5.
6. Keller H. B., Levine D. A., Whitham G. B. Motion of a bore over a sloping beach. J. fluid mech., 1960, vol. 7, No 2.
7. Годунов С. К. Разностные методы решения уравнений газовой динамики. Изд-во Новосибирск. ун-та, 1962.
8. Lax P. D., Weak solution of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation. Commun. Pure and Appl. Math. 1954, vol. 7, No 1.
9. Faure H. Etude theorique et expérimentale des ondes de translation dans les canaux decouverts, Dunod, 1935.
10. Егизаров И. В. Неустановившееся движение в нижних бьефах. Изв. НИИГ, 1937, т. 21.