

Подставляя (3.23) в (3.22) и приравнявая члены, не содержащие M_0 , получим

$$\varepsilon = -1/2 id_0 + \sqrt{1/4 d_0^2 + b_0}$$

т. е. ε — корень уравнения (3.13) и для определения R_0 и γ_0 будем иметь те же уравнения и те же значения, что и при исследовании устойчивости пуазейлевского потока.

Из равенства членов с M_0^2 получим

$$R_1 = \frac{4P_0 P_3 - P_1^2}{16(-P_0)^{3/2} (\sqrt{-P_0} \partial d_0 / \partial R + \partial P_0 / \partial R)} = \\ = \frac{11655 \Delta^2 (1 + 2R_0 \tau)}{(R_0 F^{-1} \cos \alpha - R_0 \tau) (324 R_0^2 \tau^2 - 784 R_0 \tau + 108)}$$

$$\Delta = -1/3 R_0 F^{-1} \sin \alpha - 1/210 R_0 (-19 R_0^2 \tau^2 + 96 R_0 \tau + 108)$$

Здесь $R_0 = R_*$ и определяется равенством (2.2).

Учитывая связь M_0 и λ (1.1), можем записать, что критическое число Рейнольдса для волнового течения $R^* = R_* + R_2 / \lambda^2 + 0(1/\lambda^3)$

$$R_2 = \frac{8\pi^2 (560 R_0 F^{-1} \sin \alpha + 691 R_0^2 \tau^2 + 2544 R_0 \tau + 3744) R_1}{3(3 R_0 \tau - 6)(-294 R_0^2 \tau^2 + 10616 R_0 \tau - 8052)}$$

Таким образом, график зависимости R^* для волнового течения (1.1) имеет вид, изображенный на фиг. 3. При $\lambda \rightarrow \infty$ кривая асимптотически стремится к прямой $R^* = R_*$ (R_* — критическое число Рейнольдса для неволнового режима). Область 3 соответствует области неустойчивости как волнового так и пуазейлевского режимов, в области 2 устойчив волновой режим, но неустойчив пуазейлевский. В области 1 устойчивы оба режима, но естественно предположить, что здесь имеет место неволновое течение жидкости.

Поступило 12 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Л ю б у т с к а я Л. В. Устойчивость плоскопараллельного потока вязкой жидкости под действием постоянного касательного напряжения и наклонной силы тяжести. Ж-л вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. I, № 6.
2. П а ш и н и н А. В. Установившиеся течения в тонких пленках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, вып. 3.
3. Л и н ь Ц з я - Ц з я о. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. литер., 1958.
4. Л и п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
5. Т а м а р к и н Я. Д. О некоторых общих вопросах теории линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.

О СОПРОТИВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЮ ЧАСТИЦЫ, ВЗВЕШЕННОЙ В ТУРБУЛИЗОВАННОЙ СРЕДЕ

Ю. А. БУЕВИЧ (Москва)

Уравнения движения частицы в турбулизированной жидкости были рассмотрены Ченом [1], который исходил из известного уравнения Бассэ — Буссинеска — Осеена для ускоренного движения частицы в неподвижной жидкости, а затем на основе интуитивных соображений дополнял его членом, связанным с действием сил давления, возникающих при неустановившемся движении жидкости. Результат Чена был подвергнут критике и получил дальнейшее развитие в работе Корссина и Ламли [2], которые, пользуясь тем же методом, предложили уравнения

$$\vartheta d_2 \frac{dv^i}{dt} = \vartheta d_1 \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} - u^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} - \nu \Delta u^i \right) - \frac{1}{2} \vartheta d_1 \left(\frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial u^i}{\partial t} - v^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} \right) - \\ - \vartheta (d_2 - d_1) g^i - 6\pi \mu a \left[(v^i - u^i) + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}} \int_{-\infty}^t \left(\frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial u^i}{\partial t} - v^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} \right)_{t=\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right] \quad (1)$$

Здесь d_1 и d_2 — плотности жидкости и материала частицы, ϑ и a — объем и радиус частицы, μ и ν — динамическая и кинематическая вязкости, $u^i = u^i(t, x^m)$ — скорость жидкости, $v^i = v^i(t)$ — скорость частицы, g^i — вектор ускорения силы тяжести.

Уравнения в форме (1) приводят к весьма странным следствиям, порождающим сомнения в их правильности. Действительно, рассмотрим, например, стационарное движение частицы в поле $u^i = u^i \delta_1^i$, $\partial u^i / \partial t = \partial u^i / \partial x^1 = 0$, предполагая $v^i = v \delta_1^i$ и $d_1 = d_2$. Легко видеть, что, согласно (1), величина $v - u$ в зависимости

от величины и знака Δu может принимать сколь угодно большие положительные или отрицательные значения. По-видимому, причина таких несообразностей состоит в неправильном переходе от уравнений Бассэ — Буссинеска — Осеена, справедливых в связанной с жидкостью (конвективной) системе координат, к соответствующим уравнениям в фиксированной (лабораторной) системе. Между тем, указанный переход можно совершить вполне строго, используя известные результаты работ [3, 4], причем необходимость искусственного введения дополнительной «силы давления» вообще отсутствует.

Вводя относительную скорость частицы $w^i = v^i - u^i$ в конвективной системе координат ξ^i , запишем уравнения Бассэ — Буссинеска — Осеена

$$\partial d_2 \frac{Dw^i}{Dt} = -\frac{1}{2} \partial d_1 \frac{Dw^i}{Dt} - \partial (d_2 - d_1) g^i - 6\pi\eta a \left(w^i + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{Dw^i}{Dt} \Big|_{t=\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right)$$

Здесь символ D/Dt означает конвективное дифференцирование по времени (при $\xi^i = \text{const}$). Используя при переходе к фиксированной координатной системе x^i строго доказанные соотношения работ [3, 4], получим

$$w^i \rightarrow v^i - u^i, \quad \frac{Dw^i}{Dt} \rightarrow \frac{\partial w^i}{\partial t} + u^m \frac{\partial w^i}{\partial x^m} - w^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} = \frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial u^i}{\partial t} - v^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m}$$

$$\int_{-\infty}^t \frac{Dw^i}{Dt} \Big|_{t=\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \rightarrow \int_{-\infty}^t \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \left(\frac{dv^k}{dt} - \frac{\partial u^k}{\partial t} - v^m \frac{\partial u^k}{\partial x^m} \right) \Big|_{t=\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}$$

Здесь $x^i(x^m, t, \tau)$ — координаты элемента среды, находящегося в момент t в точке x^i , в момент времени $\tau \geq t$. Движение жидкости предполагается известным, поэтому производные $\partial x^i / \partial x^k$ под знаком интеграла всегда могут быть вычислены.

Переноса в правую часть преобразованного уравнения все слагаемые внешней силы, действующей на частицу, получим вместо (1)

$$\partial d_2 \frac{dv^i}{dt} = -\frac{1}{2} \partial d_1 \left(\frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial u^i}{\partial t} - v^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} \right) + \partial d_1 \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + v^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} \right) -$$

$$- \partial (d_2 - d_1) g^i - 6\pi\eta a \left[(v^i - u^i) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \frac{\partial x^i}{\partial x^k} \left(\frac{dv^k}{dt} - \frac{\partial u^k}{\partial t} - v^m \frac{\partial u^k}{\partial x^m} \right) \Big|_{t=\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \right]$$

Первый член в правой части по-прежнему представляет инерционную силу, связанную с присоединенной массой, второй — силу избыточного перепада давления при ускоренном движении жидкости (который действительно не нуждается в априорном введении), третий — силу тяжести с учетом силы Архимеда, четвертый — силу линейного сопротивления с учетом нестационарных эффектов. При достаточно малых a интегральный член в (2) может быть опущен [1], после чего эти уравнения приобретают особенно простой вид.

Уравнения (2) справедливы при тех же допущениях, которые ранее были сделаны в [1, 2] (малость радиуса частицы по сравнению с микромасштабом турбулентности, потенциальность внешней силы и т. д.). Они свободны как от интуитивизма работы [1], так и от отмеченных недостатков уравнений (1). Заметим, кстати, что введенная Ченом сила, обусловленная избыточным перепадом давления, оказывается ближе к истине, чем аналогичная сила, вводимая в [2].

Уравнения работ [1, 2] ранее широко использовались в анализе ряда проблем турбулентной диффузии дискретных частиц и др. (см., например, [5]). Поэтому возникает, по-видимому, необходимость пересмотра ряда полученных на их основе результатов.

Автор признателен Ю. П. Гупало, обратившему внимание автора на неадекватность уравнений (1).

Поступило 16 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Tchen Chan-mou Mean Value and Correlation Problems Connected with the Motion of Small Particles Suspended in a Turbulent Flow. Hague, 1947.
2. Corrsin S., Lumley J. On the Equations of Motion for a Particle in Turbulent Fluid. Appl. Sci. Res. A, 1956, vol. 6, No. 2—3.
3. Oldroyd I. G. On the Formulation of Rheological Equations of State. Proc. Roy. Soc. A 1950, vol. 200, No. 1063.
4. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды. Физматгиз, 1962.
5. Хинце И. О. Турбулентность. Изд. иностр. лит., 1963.