

(ориентировочно — при начальном значении интенсивности пульсаций скорости порядка 9—12%) наступает универсальный режим развитой турбулентности. Наличие такого режима (и даже ориентировочное условие его наступления) согласуется с экспериментальными данными для спутных и затопленных, изотермических и нагретых турбулентных струй (см. [2], фиг. 15, 29 и др.).

Проведенные опыты показывают реальную возможность простого активного воздействия на течение свободной турбулентной струи.

Использованный в работе пульсатор может найти практическое применение как средство управления интенсивностью турбулентного обмена в свободных потоках (или в условиях, близких к ним — в камерах сгорания, химических реакторах и др.). Оказывается, что сложная, вообще говоря, картина течения в свободной турбулентной струе достаточно четко подчиняется внешним, произвольно задаваемым факторам (U_0 и n) и обобщается в исследованном диапазоне при помощи обычного критерия гомохронности числа Струхала S .

Поступила 6 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г. Н., Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
2. Улис Л. А., Кащаков В. П. Теория струй вязкой жидкости, Изд-во «Наука», 1965.
3. Абрамович Г. Н. Теория свободной струи и ее применение, Тр. ЦАГИ, 1936, № 293.
4. Щербина Н. А. О влиянии начальной турбулентности на границу и дальность затопленной струи. Тр. МФТИ, 1961, № 7.
5. Безменов В. Я., Борисов В. С. Турбулентная струя воздуха, нагретого до 4000° К. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 4.
6. Современное состояние гидроаэродинамики вязкой жидкости т. II. под ред. Гольдштейна С. Гос. изд. иностр. литер., 1948.

УСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛНОВЫХ ФОРМ ДВИЖЕНИЯ СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ

Л. В. ПАШНИНА (Москва)

В статье исследуется устойчивость волнового течения слоя вязкой несжимаемой жидкости под действием касательного напряжения и наклонной силы тяжести относительно длинноволновых возмущений.

Строится асимптотическое решение уравнений возмущенного движения и задача сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Показано, что после потери устойчивости пуазейлевским течением ламинарный характер течения не нарушается, но форма свободной поверхности принимает волновой профиль. Для малых чисел Рейнольдса устойчив пуазейлевский режим.

Найдено критическое число Рейнольдса для волнового течения, определены области устойчивости и неустойчивости.

§ 1. На плоской стенке под действием касательного напряжения течет слой вязкой жидкости. Сила тяжести составляет с неподвижным дном угол α . Можно показать, что в таких условиях после потери устойчивости потоком пуазейлевского типа [1], возможен волновой режим, уравнение свободной поверхности которого в системе координат, движущейся с волной, имеет вид

$$\begin{aligned} \zeta &= M_0 \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{AM_0^2}{3n} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + \frac{AM_0^2}{6n} \cos \frac{4\pi x}{\lambda} + 0 (M_0^3) \\ M_0^2 &= \frac{8\pi^2 (560RF^{-1} \cos \alpha + 691R^2\tau^2 + 2544R\tau - 3744)}{3\lambda^2 (5R\tau - 6) (-2944R^2\tau^2 + 1061R\tau - 8052)} \\ \lambda &= \frac{2\pi}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{A^2 M_0^2}{12n^2} \right), \quad M_0 = -\frac{4Dn}{AC}, \quad n = \frac{12(3 - V - R\tau)}{6V - 7R\tau - 6} \quad (1.1) \\ C &= \frac{R(-19R^2\tau^2 + 618R\tau V + 30R\tau - 230V^2 + 5092V - 2592)}{140(7R\tau + 6 - 6V)} \\ D &= \frac{R(560RF^{-1} \cos \alpha - 19R^2\tau^2 + 38R\tau V + 30R\tau - 672V^2 - 1632V - 864)}{140(6V - 7R\tau - 6)} \\ A &= \frac{6(R\tau + 6V - 12)}{6V - 7R\tau - 6}, \quad R = \frac{Q}{v}, \quad F = \frac{Q^2}{gh^3} \end{aligned}$$

Здесь R — число Рейнольдса, $F = Q / gh^3$ — число Фруда, V — скорость распространения волны. Ставится задача исследования устойчивости таких течений.

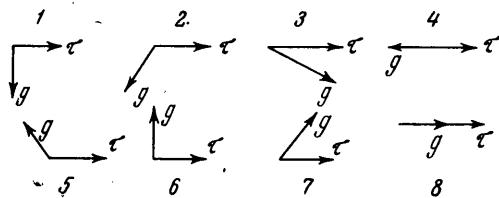
§ 2. В работе (1) получено условие устойчивости «пуазейлевского» течения в следующем виде:

$$\frac{2}{\delta} R^2 \cos \alpha (F^{-1} \cos \alpha - \tau) < \sin \alpha \quad (2.1)$$

критическое число Рейнольдса

$$R_* = -\frac{5}{8} \operatorname{tg} \alpha [1 - \tau F (2 \cos \alpha - \tau F)^{-1}] \quad (2.2)$$

Исследование соотношения (2.1) показало, что движение тяжелой жидкости под действием постоянного касательного напряжения по горизонтальному дну ($\alpha = \pi/2$) всегда устойчиво. Течение по вертикальной стенке при отсутствии касательного напряжения, а также, когда оно направлено вертикально вниз ($\alpha = \pi$), всегда неустойчиво. Такое движение можно стабилизировать, направив касательное напряжение в сторону, противоположную силе тяжести ($\alpha = 0$), и взяв $\tau > gh^3 / Q^2$ (здесь h — толщина потока). Вообще, предстаются возможными следующие случаи расположения силы тяжести и касательного напряжения (фиг. 2).



Фиг. 2

касательное напряжение в сторону, противоположную силе тяжести ($\alpha = 0$), и взяв $\tau > gh^3 / Q^2$ (здесь h — толщина потока). Вообще, предстаются возможными следующие случаи расположения силы тяжести и касательного напряжения (фиг. 2). В первом случае, как было замечено, движение всегда устойчиво. В случаях 2—5 устойчивость определяется условием (2.1), в 6—8 движение всегда неустойчиво. Если

силу тяжести устремить к нулю, $g \rightarrow 0$, то движение, соответствующее 2 и 4 станет устойчивым, а остальные закономерности не изменятся.

§ 3. Исследуем теперь устойчивость волновых решений (1.1) относительно длинноволновых возмущений. На исходное течение налагаются малые возмущения

$$\Psi = \psi + \psi^+, \quad P = p + p^+, \quad \zeta = \zeta + f \quad (3.1)$$

Здесь Ψ , P , $y = \zeta(x)$ — функция тока, давление и уравнение свободной поверхности невозмущенного движения, ψ^+ , p^+ , f — их малые возмущения.

Функция тока невозмущенного течения известна $\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1$, где $\varepsilon = 1/\lambda$ (λ — длина волн) — малый параметр

$$\psi_0 = a_0 y^3 + b_0 y^2 - V y$$

$$a_0 = \frac{1}{4} [(R \tau - 2V - 2) - \zeta (-2R \tau + 4V + 6) + \zeta^2 (R \tau - 6V - 12)]$$

$$b_0 = \frac{1}{4} [(-R \tau + 6V + 6) + \zeta (-6V - 12) + \zeta^2 (6V + 18)]$$

$$\begin{aligned} \psi_1 = & R \zeta' \left[\frac{1}{1120} [(-R^2 \tau^2 + 6R \tau V + 8R \tau - 8V^2 - 20V - 12) + \right. \\ & + \zeta (3R^2 \tau^2 - 24R \tau V - 40R \tau + 40V^2 + 120V + 84)] y^7 + \\ & + \frac{1}{480} [R^2 \tau^2 - 10R \tau V - 12R \tau + 24V^2 + 60V + 36] + \\ & + \zeta (-2R^2 \tau^2 + 42R \tau V + 48R \tau - 96V^2 - 300V - 216)] y^8 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \frac{1}{40} [(R \tau V + R \tau - 5V^2 - 12V - 6) + \zeta (15V^2 - 2R \tau V - 3R \tau + 48V + 30)] y^5 + \\ + \frac{1}{8} [(V^2 + 2V) + \zeta (-2V^2 - 6V)] y^4 + a_1 y^3 + b_1 y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 = & -\frac{1}{3960} R \zeta' [(19 R^2 \tau^2 + 68 R \tau V + 30 R \tau + 96V^2 - 96V - 864) + \\ & + \zeta (19 R^2 \tau^2 + 588 R \tau V - 30 R \tau - 96 V^2 + 192V + 2592)] \end{aligned}$$

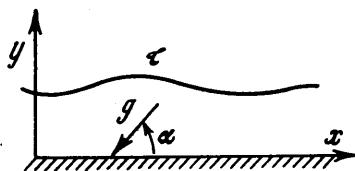
$$\begin{aligned} b_1 = & \frac{1}{1120} R \zeta' [(5R^2 \tau^2 + 12 R \tau V + 2R \tau - 16V^2 - 96V - 192) + \\ & + \zeta (20 R^2 \tau^2 + 84 R \tau V + 96V + 384)] \end{aligned}$$

Линеаризованные уравнения возмущенного движения имеют вид: (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x \partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi^+}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = & -p_x^+ + \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta \psi^+}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \psi^+}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = & p_y^+ + \frac{1}{R} \frac{\partial \Delta \psi^+}{\partial x} \end{aligned}$$

Исключая давление, получим

$$\frac{\partial \Delta \psi^+}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi^+}{\partial x} + \frac{\partial \psi^+}{\partial y} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi^+}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \psi^+}{\partial y} = \frac{1}{R} \Delta \Delta \psi^+ \quad (3.3)$$



Фиг. 1

Запишем граничные условия для функции ψ^+ . На дне потока:

$$\psi^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (3.4), (3.5)$$

на поверхности при $y = \zeta(x)$

$$p_{n\tau}^+ = 0, \quad p_{nn}^+ = 0 \quad (3.6), (3.7)$$

$$-\frac{\partial(\psi + \psi^+)}{\partial x} = \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial x} \frac{\partial(\psi + \psi^+)}{\partial y} + \frac{\partial(\zeta + f)}{\partial t} \quad (3.8)$$

Сделав преобразование координат $x \rightarrow x/\varepsilon$, что оправдано, т. к. пленка тонкая, в уравнениях возмущенного движения (3.2) и в граничных условиях (3.4)–(3.8), получим малый параметр. Это позволяет свести задачу определения возмущения функции тока ψ^+ к обращению оператора $\partial^4 / \partial y^4$. Граничными условиями возьмем (3.4)–(3.6), добавив к ним четвертое

$$\psi^+ = \Theta(x, t) \quad \text{при } y = \zeta(x) \quad (3.9)$$

Величины $\Theta(x, t)$ и $f(x, t)$ должны определяться условиями (3.7) и (3.8), оставшимися пока не использованными.

Разыскивая ψ^+ в виде ряда $\psi^+ = \psi_0^+ + \varepsilon\psi_1^+ + \varepsilon^2\psi_2^+ + \dots$ и представив возмущение функции тока $\Theta(x, t)$ и свободной поверхности $f(x, t)$ как

$$\Theta(x, t) = \Theta(x) e^{\sigma t} \quad f(x, t) = f(x) e^{\sigma t} \quad (3.10)$$

Возможность такого представления обсуждается в работе [3]. Из (3.7) и (3.8) после сокращения на $e^{\sigma t}$ и исключения $\Theta(x)$ получим для $f(x)$ обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$f_{xx} + d(x)f_x + b(x)f = 0 \quad (3.11)$$

где

$$\begin{aligned} d(x) = & R \Delta^{-1} (\tau - F^{-1} \cos \alpha) + 1/_{210} \Delta^{-1} \sigma R (R\tau + 204) + \Delta^{-1} [1/_{2} (-R\tau - 6) + \\ & + 1/_{280} \sigma R (134 R\tau + 282V - 400)] \zeta + \Delta^{-2} [R\tau - RF^{-1} \cos \alpha + \\ & + 1/_{210} \sigma R (204 + 38 R\tau)] [RF^{-1} \sin \alpha - 1/_{3360} R (301 R^2 \tau^2 - 195 R\tau V - \\ & - 1332 R\tau + 3456 V)] \zeta + 1/_{13440} R \Delta^{-1} (1127 R^2 \tau^2 + 20316 R\tau V - \\ & - 30450 R\tau + 2016 V^2 - 10752V - 46368) \zeta' - 3/_{2} RF^{-1} \sin \alpha \Delta^{-1} \zeta' + \\ & + 3/_{2} \Delta^{-1} (1 + 2R\tau) \zeta'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(x) = & \sigma \Delta^{-1} (1 + 2/_{5} \sigma R) + \sigma \Delta^{-2} (1 + 2/_{5} \sigma R) [RF^{-1} \sin \alpha - 1/_{3360} R (301 R^2 \tau^2 - \\ & - 135 R\tau V - 1332 R\tau + 3456 V)] \zeta + \Delta^{-1} [1/_{2} (-4R\tau + 3V + 3) + \\ & + 1/_{1680} \sigma R (423 R\tau + 1008V + 432)] \zeta' \end{aligned}$$

$$\Delta = -1/_{3} RF^{-1} \sin \alpha + 1/_{210} R (-19R^2 \tau^2 + 96R\tau + 108)$$

В начале работы были приведены результаты исследования устойчивости волнового течения жидкости. Эти же результаты можно получить из (3.11). Для $\zeta \equiv 0$ уравнение (3.11) есть уравнение с постоянными коэффициентами:

$$f_{xx} + d_0 f_x + b_0 f = 0 \quad (3.12)$$

где d_0 и b_0 — значения $d(x)$ и $b(x)$ при $\zeta \equiv 0$.

Невозмущенное движение будем называть устойчивым относительно возмущения

$$f(x, t) = f(x) e^{\sigma t} = e^{i\omega x + \sigma t}$$

если параметры течения таковы, что в случае, если ε — действительное число, то $R\varepsilon\sigma$ — отрицательна. Из (3.12) получим для ε следующее соотношение:

$$-\varepsilon^2 + i\varepsilon d_0 + b_0 = 0 \quad (3.13)$$

Считая ε малым параметром, представим $\sigma(\varepsilon)$ в виде ряда

$$\sigma = i\varepsilon\gamma + \varepsilon^2\beta + \dots$$

и приравнивая нулью действительную и мнимую части в (3.12), будем иметь

$$\gamma = -R\tau + RF^{-1} \cos \alpha + 0(\varepsilon^2)$$

$$\beta = RF^{-2}/210 (27F^2 R^2 \tau^2 - 108 R\tau F^2 - 108 F^2 - 70 F \sin \alpha - 130 FR^2 \tau \cos \alpha + \\ + 204 RF \cos \alpha + 84 R^2 \cos \alpha)$$

Эти соотношения определяют значения параметров, гарантирующих устойчивость. Полагая $R\varepsilon\sigma = \beta < 0$, после некоторых преобразований получим условие устойчивости пуазейлевского потока в следующем виде:

$$2/_{5} R^2 \cos \alpha (F^{-1} \cos \alpha - \tau) < \sin \alpha$$

что совпадает с (2.1).

Для волнового течения (1.1) уравнение (3.11) будет уравнением с периодическими коэффициентами периода λ , поэтому естественным обобщением определения устойчивости, которое было дано для пуазейлевского потока, будет такое: волновое движение жидкости (1.1) будем называть устойчивым относительно возмущения вида

$$f(x, t) = f(x) e^{\sigma t} = \varphi(x) e^{i\epsilon x + i\sigma t} \quad (3.14)$$

если параметры течения таковы, что, в случае действительного числа ϵ , $Re \sigma$ — отрицательна; здесь $\varphi(x)$ — периодическая функция периода λ . Согласно теории Флоке

(4) из вида выражения (3.14) ясно, что $\rho_1 = e^{i\lambda\epsilon}$ ни что иное как корень характеристического уравнения

$$\rho^2 + [f_1(\lambda) + f_2'(\lambda)]\rho + \exp\left\{-\int_0^\lambda d(x) dx\right\} = 0 \quad (3.15)$$

соответствующего дифференциальному уравнению (3.11). Здесь $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — линейно независимые частные решения уравнения (3.11) с начальными условиями:

$$f_1(0) = 1, \quad f_1'(0) = 0, \quad f_2(0) = 0, \quad f_2'(0) = 1$$

По теореме Виетта любые два корня уравнения (3.15) должны удовлетворять соотношению:

$$\rho_1 + \rho_2 = f_1(\lambda) + f_2'(\lambda), \quad \rho_1 \rho_2 = \exp\left\{-\int_0^\lambda d(x) dx\right\}$$

т. е. возмущения вида (3.14) будут допустимыми тогда, когда будет выполнено условие:

$$e^{i\epsilon\lambda} + e^{-i\epsilon\lambda} \exp\left\{-\int_0^\lambda d(x) dx\right\} = f_1(\lambda) + f_2'(\lambda) \quad (3.16)$$

Займемся теперь отысканием двух частных решений (3.11). Заменой

$$f(x) = z(x) \exp\left\{-\frac{1}{2} \int_0^\lambda d(x) dx\right\} \quad (3.17)$$

его можно привести к виду: (3.18)

$$z'' + P(x)z = 0, \quad P(x) = b(x) - \frac{1}{4}d^2(x) - \frac{1}{2}d'(x) = P_0 + P_1\xi + P_2\xi' + P_3\xi''$$

Но уравнение (3.18) содержит большой параметр λ , поэтому его можно еще записать следующим образом:

$$z'' + \lambda^2 P(\xi)z = 0 \quad (\xi = x/\lambda) \quad (3.19)$$

(штрихи означают дифференцирование по ξ). Решения (3.19) известны как *WBKY* решения (5) и имеют вид

$$z_{1,2} = C_{1,2}(-P)^{1/4} \exp\left\{\pm \lambda \int_0^\xi \sqrt{-P(\xi)} d\xi\right\} \quad (3.20)$$

Из начальных условий

$$C_1 = \sqrt{-P_0}, \quad C_2 = 1/\lambda \sqrt[4]{-P_0}$$

После некоторых преобразований условие (3.16) дает следующее соотношение:

$$2\operatorname{ch}\left\{\lambda \int_0^\xi \sqrt{-P(\xi)} d\xi\right\} = 2\operatorname{ch}\left\{\frac{1}{2} \int_0^\lambda d(x) dx - ie\lambda\right\} \quad (3.21)$$

Приравнивая в (3.21) аргументы у косинусов, получим

$$\sqrt{-P_0} [1 + \frac{1}{16} M_0^2 P_0^{-2} (P_1^2 - 4P_0 P_3)] = -\frac{1}{2} d_0 - ie \quad (3.22)$$

Для построения критической кривой $Re \sigma = 0$ представим σ и R в виде рядов

$$\sigma = ie(\gamma_0 + M_0^2 \gamma_1) + O(M_0^2/\lambda), \quad R = R_0 + M_0^2 R_1 + O(M_0^2/\lambda) \quad (3.23)$$

Подставляя (3.23) в (3.22) и приравнивая члены, не содержащие M_0 , получим

$$\varepsilon = -\frac{1}{2}id_0 + \sqrt{\frac{1}{4}d_0^2 + b_0}$$

т. е. ε — корень уравнения (3.13) и для определения R_0 и γ_0 будем иметь те же уравнения и те же значения, что и при исследовании устойчивости пузазейлевского потока.

Из равенства членов с M_0^2 получим

$$R_1 = \frac{4P_0P_8 - P_1^2}{16(-P_0)^{3/2}(\sqrt{-P_0}\partial d_0/\partial R + \partial P_0/\partial R)} = \frac{11655\Delta^3(1+2R_0\tau)}{(R_0F^{-1}\cos\alpha - R_0\tau)(324R_0^2\tau^2 - 784R_0\tau + 108)}$$

$$\Delta = -\frac{1}{3}R_0F^{-1}\sin\alpha - \frac{1}{210}R_0(-19R_0^2\tau^2 + 96R_0\tau + 108)$$

Здесь $R_0 = R_*$ и определяется равенством (2.2).

Учитывая связь M_0 и λ (1.1), можем записать, что критическое число Рейнольдса для волнового течения $R^* = R_* + R_2/\lambda^3 + O(1/\lambda^3)$

$$R_2 = \frac{8\pi^2(560R_0F^{-1}\sin\alpha + 691R_0^2\tau^2 + 2544R_0\tau + 3744)R_1}{3(3R_0\tau - 6)(-294R_0^2\tau^2 + 10616R_0\tau - 8052)}$$

Таким образом, график зависимости R^* для волнового течения (1.1) имеет вид, изображенный на фиг. 3. При $\lambda \rightarrow \infty$ кривая асимптотически стремится к прямой $R^* = R_*(R_* + \text{критическое число Рейнольдса для неволнового режима})$. Область 3 соответствует области неустойчивости как волнового так и пузазейлевского режимов, в области 2 устойчив волновой режим, но неустойчив пузазейлевский. В области 1 устойчивы оба режима, но естественно предположить, что здесь имеет место неволновое течение жидкости.

Поступило 12 V 1966

ЛИТЕРАТУРА

- Любутская Л. В. Устойчивость плоскоапараллельного потока вязкой жидкости под действием постоянного касательного напряжения и наклонной силы тяжести. Ж-л вычислит. матем. и матем. физ., 1961, т. I, № 6.
- Пашинина Л. В. Установившиеся течения в тонких пленках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, вып. 3.
- Линь Цая-Цяо. Теория гидродинамической устойчивости. Изд. иностр. литер., 1958.
- Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, 1950.
- Тамarkin Я. Д. О некоторых общих вопросах теории линейных дифференциальных уравнений. Петроград, 1917.

О СОПРОТИВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЮ ЧАСТИЦЫ, ВЗВЕШЕННОЙ В ТУРБУЛИЗОВАННОЙ СРЕДЕ

Ю. А. БУЕВИЧ (Москва)

Уравнения движения частицы в турбулизованной жидкости были рассмотрены Ченом [1], который исходил из известного уравнения Бассэ — Буссинеска — Осеена для ускоренного движения частицы в неподвижной жидкости, а затем на основе интуитивных соображений дополнял его членом, связанным с действием сил давления, возникающим при неустановившемся движении жидкости. Результат Чена был подвергнут критике и получил дальнейшее развитие в работе Корсина и Ламли [2], которые, пользуясь тем же методом, предложили уравнения (1)

$$\Theta d_2 \frac{dv^i}{dt} = \Theta d_1 \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} - u^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} - v \Delta u^i \right) - \frac{1}{2} \Theta d_1 \left(\frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial u^i}{\partial t} - v^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} \right) - \Theta (d_2 - d_1) g^i - 6\pi\mu a \left[(v^i - u^i) + \frac{a}{\sqrt{\pi\nu}} \int_{-\infty}^t \left(\frac{dv^i}{dt} - \frac{\partial u^i}{\partial t} - v^m \frac{\partial u^i}{\partial x^m} \right) dt \right] \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}}$$

Здесь d_1 и d_2 — плотности жидкости и материала частицы, Θ и a — объем и радиус частицы, μ и ν — динамическая и кинематическая вязкости, $u^i = u^i(t, x^m)$ — скорость жидкости, $v^i = v^i(t)$ — скорость частицы, g^i — вектор ускорения силы тяжести.

Уравнения в форме (1) приводят к весьма странным следствиям, порождающим сомнения в их правильности. Действительно, рассмотрим, например, стационарное движение частицы в поле $u^i = u\delta^i_1$, $\partial u^i / \partial t = \partial u^i / \partial x^1 = 0$, предполагая $v^i = v\delta^i_1$ и $d_1 = d_2$. Легко видеть, что, согласно (1), величина v — u в зависимости