

К СТРОЕНИЮ ВЯЗКОГО ПОДСЛОЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Б. А. КАДЕР (Москва)

Обсуждается вопрос определения закона затухания турбулентных пульсаций в вязком подслое развитого турбулентного пограничного слоя. Показывается, что с наибольшей степенью доверия для этой цели можно использовать данные о переносе пассивной примеси при больших числах Прандтля или Шмидта. Выводится формула, определяющая перенос пассивной примеси при $N_{Pr}, N_{Sc} \gg 1$.

При помощи полученной формулы на основании статистического анализа экспериментальных результатов определяются характеристики турбулентного обмена в непосредственной близости от стенки. Обсуждается вопрос о зависимости этих характеристик от числа Рейнольдса.

1. Рассмотрим плоскопараллельное стационарное течение несжимаемой жидкости, ограниченной динамически гладкой непроницаемой поверхностью, при отсутствии продольного градиента давления. Ось x направим по течению, а ось z — перпендикулярно граничной плоскости. Предположим теперь, что на граничной поверхности $z = 0$ поддерживается постоянное значение ϕ_w — концентрации пассивной примеси (индекс w означает условия на стенке). Как известно (см., например, [1]), при этих предположениях в жидкости возникает постоянный поток примеси $j = j_w$ в направлении оси z , определяемый уравнением

$$j = j_w = \rho D \frac{d \langle \phi \rangle}{dz} - \rho \langle \phi' w' \rangle \quad (1.1)$$

где ρ — массовая плотность жидкости, D — молекулярный коэффициент диффузии, $\langle \phi' w' \rangle$ — корреляция пульсаций средней концентрации и средней скорости в направлении оси z в данной точке, $\langle \phi \rangle$ — средняя концентрация примеси в данной точке.

Уравнение (1.1) показывает, что профиль средней концентрации зависит от статистических характеристик пульсаций скорости и концентрации примеси. Полагая, как обычно принято,

$$\langle \phi' w' \rangle = -K_\phi \frac{d \langle \phi \rangle}{dz} \quad (1.2)$$

получим

$$j_w = \rho (D + K_\phi) \frac{d \langle \phi \rangle}{dz} \quad (1.3)$$

где $K_\phi(z)$ — турбулентный коэффициент диффузии. В отличие от коэффициента молекулярной диффузии, коэффициент турбулентной диффузии, очевидно, характеризует не физические свойства жидкости, а статистические свойства пульсационного движения и не является постоянной величиной. Поэтому проделанное преобразование носит формальный характер, и изучение K_ϕ совершенно эквивалентно изучению турбулентного потока примеси — $\rho \langle \phi' w' \rangle$.

При безградиентном стационарном течении дифференциальные уравнения, описывающие поля скоростей и температур в движущейся жидкости, аналогичным образом приводят к сходным с (1.1) уравнениям, указывающим на постоянство потока количества движения

$$\tau = \tau_w = \mu \frac{d \langle u \rangle}{dz} - \rho \langle u' w' \rangle \quad (1.4)$$

и потока тепла

$$q = q_w = -\lambda \frac{d \langle t \rangle}{dz} + \rho c_p \langle t' w' \rangle \quad (1.5)$$

Здесь τ_w — напряжение сдвига на стенке, μ — коэффициент вязкости, u, t — мгновенные значения скорости вдоль оси x и температуры в данной точке, λ — коэффициент теплопроводности, c_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Аналогично предыдущему, введем турбулентные коэффициенты диффузии тепла K_t и диффузии количества движения (трения) K_m . Если принять, что тепло можно считать пассивной примесью, то отсюда будет вытекать равенство $K_t = K_\phi = K$. Поэтому если окажется, что коэффициенты K_t и K_ϕ отличны, то это будет означать, что тепло не может рассматриваться как пассивная примесь и что механизм турбулентного переноса тепла чем-то отличается от механизма переноса пассивной примеси. В настоящее время, однако, нет оснований для того, чтобы допустить эту последнюю возможность.

Более сложен вопрос о соотношении коэффициентов K_m и $K_t = K_\phi = K$. Вообще говоря, из того, что обмен количеством движения может осуществляться также пуль-

сациями давления, не влияющими на обмен теплом или массой, следует, что коэффициент K_m не обязан совпадать с K . Однако пока еще не существует надежных данных, позволяющих судить о различии этих коэффициентов (см., например, обзор литературы по этому поводу в п. 5.7 книги [1]); поэтому большинство авторов считают, что $K_m = K$. В настоящей работе, как правило, коэффициент K_m рассматриваться не будет, однако в порядке обзора литературы кое-где будет употребляться символ K и для коэффициента турбулентного трения, тем самым неявно предполагается (в соответствии с общепринятыми представлениями), что общий характер функций $K(z)$ и $K_m(z)$, по-видимому, одинаков.

Ясно, что для определения профиля средней концентрации или температуры необходимо знать поведение функции $K(z)$. Цель настоящей статьи заключается в выяснении поведения функции $K(z)$ вблизи граничной поверхности.

Анализируя порядок членов уравнений Рейнольдса (т. е. осредненных уравнений гидромеханики) можно показать, что в непосредственной близости от стенки течение определяется в основном вязкостью жидкости. Эта область течения обычно называется вязким подслоем. Согласно современным воззрениям, турбулентные пульсации не затухают у границы вязкого подслоя, а проникают вплоть до стенки, сильно демпфируясь под влиянием сил вязкости (см., например, [1-14]). В то время как количественные характеристики турбулентности в ядре пограничного слоя изучены достаточно хорошо [1], по поводу пристеночной области пограничного слоя имеются весьма немногочисленные и зачастую противоречивые экспериментальные данные. Условимся характеризовать порядок затухания турбулентных пульсаций у стенки степенью первого из членов разложения функции $K(z)$ (которая предполагается достаточно гладкой) в ряд Тейлора с коэффициентом α , отличным от нуля

$$K_+ \sim \alpha z_+^n \quad (K_+ = K / \nu, \quad z_+ = z u_* / \nu, \quad u_* = \sqrt{\tau_w / \rho}) \quad (1.6)$$

(здесь и в дальнейшем индексом $+$ обозначаются безразмерные величины).

При помощи уравнения неразрывности можно строго показать (см., например, [1,2]), что функция $K_+(z_+)$ и ее две первые производные обращаются в нуль при $z_+ = 0$, так что $n \geq 3$. Заметим, что последнее утверждение является несколько более строгим в применении к переносу материальной примеси, чем в применении к переносу тепла, так как в последнем случае зависимость свойств жидкости от температуры и влияние диссипации кинетической энергии, вызывающей дополнительный нагрев среды, строго говоря, могут привести к тому, что уравнение (1.2) (являющееся основой при доказательстве того, что $K_+(0) = K_+'(0) = K_+''(0) = 0$) будет не вполне точным. Однако оценки влияния указанных эффектов, содержащиеся в работе [8], показывают, что роль их очень невелика, так что и для тепла коэффициенты при z_+^n с $n \leq 2$ в разложении функции $K_+(z_+)$ должны быть весьма малы.

По поводу величины n в литературе имеется ряд противоречивых мнений. Так, формулы, использованные в работах [4-7], приводят к значению $n = 3$, в то время как ряд авторов [2, 8-11] настаивают на предположении $n = 4$. Поэтому задача экспериментального изучения турбулентного потока примеси — $\rho \langle \delta'w' \rangle$ вблизи стенки весьма актуальна.

Существует несколько путей изучения поведения функции $K_+(z_+)$ вблизи стенки. Непосредственное измерение (большой частью коэффициента турбулентной диффузии количества движения), основанное на измерении всех величин, входящих в определение K (см. (1.3)), проводилось в работах [12-14]. Однако обработка данных этих измерений приводит к значению $n = 2$, находящемуся в противоречии с уравнениями гидромеханики. Это противоречие надо отнести, в первую очередь, за счет чрезвычайной трудности экспериментальных замеров профилей осредненных величин вблизи стенки, которые к тому же еще приходится дифференцировать. Таким образом, непосредственные измерения пока еще не могут дать ответ на вопрос о значении n .

Можно было бы попытаться исходить из сопоставления экспериментальных данных о распределении средней скорости (или температуры, или концентрации примеси) вблизи стенки с теоретическими кривыми, полученными при тех или иных предположениях о функции $K(z)$. Но из сказанного выше о трудности измерения таких распределений ясно, что и этот путь не может дать однозначный ответ. И действительно, разброс опытных данных оказывается таким, что кривые распределения скорости, построенные в предположении, что $n = 4$ [10], или что $n = 3$ [4], столь же хорошо совпадают с опытными данными, как и кривая, проведенная в предположении отсутствия турбулентных пульсаций вблизи стенки [15]. Это обстоятельство позволило многим авторам ссылаться на одни и те же экспериментальные данные для подкрепления предложенных ими резко различных (в отношении поведения вблизи стенки) теоретических или полумпирических формул, но оно же, очевидно, делает невозможным использование этих данных для обоснованного выбора между предложенными формулами.

Наиболее перспективным путем решения задачи представляется анализ экспериментальных данных по переносу пассивной примеси (тепла или массы) при очень

больших числах Прандтля или Шмидта, т. е. при $N_{Pr} = \nu/a \gg 1$ или $N_{Sc} = \nu/D \gg 1$ (ν — коэффициент кинематической вязкости, a — коэффициент температуропроводности).

Так как основная масса опытных данных в указанной области относится к массопередаче, а предположение о пассивности примеси также является более строгим в этом последнем случае, то будем в дальнейшем все время говорить о массопередаче. По своему физическому смыслу число Шмидта характеризует соотношение интенсивностью молекулярных механизмов передачи количества движения и массы. Это значит, что при $N_{Sc} \gg 1$, подслои «молекулярной массопроводности», который неизбежно должен существовать в непосредственной близости от стенки, глубоко утоплен в вязком подслое. В силу этого даже весьма незначительный уровень турбулентности во внешней части вязкого подслоя будет играть решающую роль в переносе массы, проникшей через пристеночную часть подслоя. Поэтому массопередача будет определяться поведением функции $K(z)$ в пределах вязкого подслоя вблизи от стенки, и, следовательно, можно рассчитывать определить функцию $K(z)$ из экспериментальных данных о массообмене при $N_{Sc} \gg 1$.

Поскольку при этом основную роль играет тонкий слой, примыкающий к стенке, то при расчете потока массы можно без большой ошибки пользоваться уравнениями плоскопараллельного течения и считать поток постоянным по z , что позволяет упростить расчет. В то же время поставить достаточно точные опыты по измерению массообмена относительно нетрудно, поэтому значение n , определяемое таким образом, заслуживает наибольшего доверия.

Все эти причины делают понятным большое внимание, уделявшееся исследователями методу определения закономерностей турбулентного перемешивания вблизи стенки по данным о тепло- и массообмене и наличие большого числа работ, в которых, исходя из тех или иных формул для $K(z)$, определялись выражения для потоков тепла и массы, которые затем сравнивались с эмпирическими данными с целью проверки исходных формул (см., например, [8, 9, 10]). Тем не менее, нам кажется целесообразным еще раз вернуться к такому подходу, поскольку в самое последнее время появились значительные новые эмпирические материалы, относящиеся к случаю очень больших N_{Sc} ; в то же время в предыдущих работах интервал значений N_{Sc} во многих случаях был явно недостаточным, в результате чего удовлетворительное согласие с опытом иногда получалось даже при выборе выражения для $K(z)$, которому отвечало $n = 2$.

Кроме указанных выше соображений настоящая работа отличается от предыдущих тем, что в ней не делается попытки с самого начала проверить лишь какую-то одну определенную формулу для $K(z)$, а вместо этого рассматривается семейство формул, содержащее показатель n в виде неизвестного параметра, значение которого определяется непосредственно из опытных данных (при помощи метода наименьших квадратов). Такой подход, разумеется, также не гарантирует получение точного значения n , но все же позволяет получить более объективные результаты, чем метод «подгонки» под готовую формулу, которой отвечает фиксированное значение показателя n .

2. Для вывода уравнения, описывающего массопередачу при больших N_{Sc} , воспользуемся, следуя Прандтлю и Тейлору, классической (и самой грубой) «двухслойной моделью» течения, т. е. условно разделим область динамического пограничного слоя на вязкий подслой ($0 < z_+ < \Delta$, где Δ — безразмерная величина вязкого подслоя) и область развитого турбулентного слоя ($\Delta < z_+ < d$, где d — безразмерная толщина пограничного слоя). Недостатки такой модели общеизвестны, но так как интерес представляют интегральные характеристики течения, то можно надеяться, что они не скажутся заметно на конечных результатах (которые, в принципе, можно затем проверить и на какой-то более точной модели). Перепишем уравнение (1.3) в виде

$$\frac{d \langle \phi_+ \rangle}{dz_+} = \frac{N_{Sc}}{1 + N_{Sc} K_+} \left(\langle \phi_+ \rangle = \frac{(\langle \phi \rangle - \phi_w) \tau_w}{i_w u_*} \right) \quad (2.1)$$

Число Стантона в наших обозначениях запишется в виде

$$N_{St} = \frac{i_w}{(\phi_0 - \phi_w) u_{0p}} = \frac{1}{\theta_+ u_{0+}}$$

Здесь нулем в нижнем индексе отмечены условия в центре трубы или вне пограничного слоя и

$$\theta_+ = \frac{(\phi_0 - \phi_w) \tau_w}{i_w u_*}, \quad u_{0+} = \frac{u_0}{u_*}$$

Согласно (1.6), $K_+ = \alpha z_+^n$ в области $0 < z_+ < \Delta$. В то же время в области $\Delta < z_+ < d$ поведение K_+ можно описать формулой $K_+ = A z_+$ (см., например, [1]).

Таким образом, получаем

$$K_+ = \begin{cases} \alpha z_+^n & \text{при } 0 < z_+ < \Delta \\ Az_+ & \text{при } \Delta < z_+ < d \end{cases} \quad (2.2)$$

Ясно, что $\alpha = A\Delta^{1-n}$.

Решение уравнения (2.1) будет различным в трех областях

$$N_{Sc}K_+ < 1, \quad 0 \leq z_+ < \delta$$

$$\langle \theta_+ \rangle = N_{Sc} z_+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{n(k+1)} (\alpha N_{Sc} z_+^n)^k + C_1 \quad (2.3)$$

$$N_{Sc}K_+ > 1, \quad \delta < z_+ \leq \Delta$$

$$\langle \theta_+ \rangle = \frac{1}{\alpha z_+^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 - n(k+1)} \frac{1}{(\alpha N_{Sc} z_+^n)^k} + C_2 \quad (2.4)$$

$$\Delta \leq z_+ \leq d$$

$$\langle \theta_+ \rangle = \frac{1}{A} \left[\ln z_+ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{1}{(AN_{Sc}z_+^n)^k} + C_3 \right] \quad (2.5)$$

Здесь N_{Sc} предполагается достаточно большим, так что $\delta < \Delta$.

Из условия $\langle \theta_+(0) \rangle = 0$, $\langle \theta_+(d) \rangle = \theta_+$ получим

$$C_1 = 0, \quad C_3 = A\theta_+ - \ln d - \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{k} \right)^{k+1} \frac{1}{(AN_{Sc}d)^k}$$

Кроме того, используя равенство $N_{Sc}K_+(\delta) = 1$ определим

$$\delta = (\alpha N_{Sc})^{-1/n} \quad (2.6)$$

Используя условия смыкания профилей в точках $z_+ = \delta$ и $z_+ = \Delta$, а также (2.6), получим

$$\begin{aligned} \theta_+ = & \frac{1}{A} \ln \frac{d}{\Delta} - \frac{1}{\alpha(n-1)\Delta^{n-1}} + N_{Sc}^{n-1/n} \alpha^{-1/n} \left[1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(nk)^2 - 1} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} N_{Sc}^{-k} (-1)^{k+1} \left[\frac{1}{(k+1)n-1} \frac{\Delta}{(\alpha\Delta^n)^{k+1}} + \frac{1}{k} \frac{d}{(Ad)^{k+1}} - \frac{1}{k} \frac{\Delta}{(A\Delta)^{k+1}} \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

Предположим N_{Sc} столь большим, что существенным будет лишь член ряда (2.7),

содержащий $N_{Sc}^{n-1/n}$. Тогда получим простое выражение

$$\theta_+ = BN_{Sc}^{n-1/n}$$

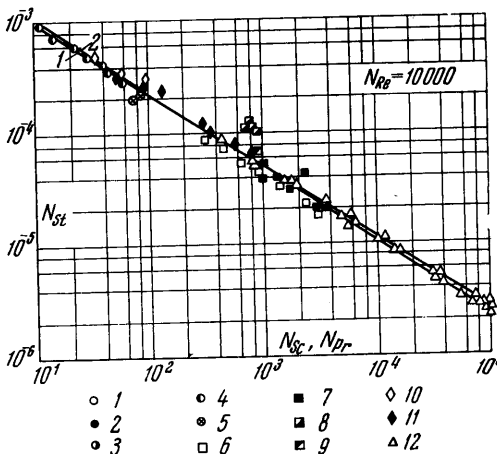
где B — числовой коэффициент при $N_{Sc}^{n-1/n}$. Введем локальный коэффициент трения

$$c_f = \tau_w / \frac{1}{2} \rho u_0^2 = 2 (u^* / u_0)^2 \text{ и}$$

перепишем эту формулу в виде

$$N_{St} = \frac{\sqrt{c_f}}{\sqrt{2} BN_{Sc}^{n-1/n}} = \frac{C}{N_{Sc}^{n-1/n}} \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) при $n = 4$ совпадает с результатами В.Г. Левича [9] и Дейслера [10], а при $n = 3$ — с формулами Рейхардта, Линя и др. [1]. Структура полученной общей формулы



Фиг. 1

лы согласуется также с формулой Д. Б. Сполдинга [15], выведенной другим путем. Полученный результат и будет служить основой анализа экспериментальных данных.

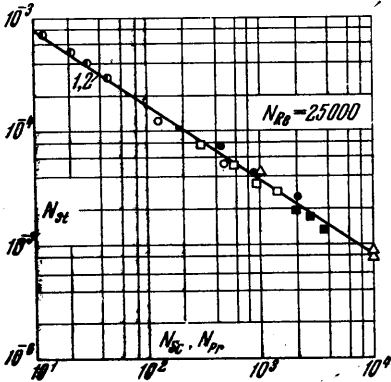
Проведем сначала некоторые прикидочные расчеты для определения порядка чисел Шмидта, которые необходимо принимать во внимание. Ориентировочно примем (см. [1])

$$A = 0.4, \quad \Delta = 11.1, \quad d = 10^3, \quad n = 3.$$

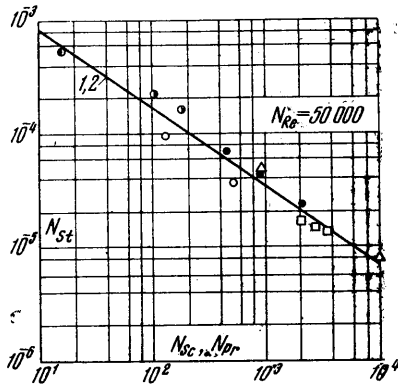
Тогда $\alpha = 3,25 \cdot 10^{-3}$ и (2.7) запишется в виде

$$\theta_+ \approx 10 + 9.25 N_{Sc}^{2/3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{5}{(4.45)^{k+1}} \frac{k+1}{k(3k+2)} - \frac{10^3}{k400^{k+1}} \right] N_{Sc}^{-k} \quad (2.9)$$

Отсюда можно заключить, что уже при $N_{Sc} \sim 30$ второй член на порядок больше первого и на два порядка превосходит наибольший из оставшихся членов ряда в (2.9).



Фиг. 2



Фиг. 3

Условные обозначения к фиг. 1, 2, 3:

- 1 — [17], 2 — [18], 3 — [19], 4 — [20], 5 — [21], 6 — [22], 7 — [23]
8 — [24], 9 — [25], 10 — [26], 11 — [27], 12 — [28].

Следовательно, при анализе достаточно рассматривать экспериментальные данные при $N_{Sc} > 30$.

Ясно видно, что для определения n замена (2.7) на (2.8) при этих условиях не вносит большой ошибки; однако и эту незначительную ошибку учтем, введя весовую функцию β , которая бы давала больший вес данным, полученным при больших числах Шмидта

$$\frac{1}{\beta} = \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{5}{4.45^{k+1}} \frac{k+1}{k(3k+2)} - \frac{10^3}{k400^{k+1}} \right] N_{Sc}^{-k} \right| \approx \frac{0.08}{N_{Sc}} \quad (2.10)$$

Экспериментальные данные, на основании которых определялась величина n , были собраны из работ [17-28] и подвергнуты статистическому анализу, основные результаты которого представлены в табл. 1 и на фиг. 1-3¹. Для вычисления параметров корреляционных уравнений был использован метод наименьших квадратов с функцией веса $\beta' = \lg \beta$ и без нее. Хорошее совпадение результатов обоих расчетов и высокое значение r_{11} указывает, что экспериментальные точки хорошо ложатся на аппроксимирующую прямую, и, следовательно, линейная корреляция в диапазоне $10 < N_{Sc} < 10^5$ вполне справедлива. Тем самым подтверждаются результаты прикидочного расчета как в отношении порядка чисел Шмидта, которые необходимо принимать во внимание при анализе, так и относительно незначительной роли весовой функции. Это отчетливо видно на фиг. 1-3 (1 — корреляционная прямая, рассчитанная с функцией веса β' , 2 — корреляционная прямая, рассчитанная без учета функции веса β').

¹ Заметим, что в этих экспериментальных работах критерии N_{Re} , N_{St} обычно определялись по величинам, характеризующим средний расход, а не условия вне пограничного слоя или на оси. Очевидно, однако, что при $N_{Sc} \gg 1$ вид формулы (2.8), записанной в этих критериях, не изменяется.

Таблица 1

	N_{Re}	N	С функцией веса		Без функций веса		
			n	C	n	C	$ r_{11} $
1	10000	73	2.89	0.00451	2.97	0.00487	0.990
2	25000	19	3.07	0.00388	3.13	0.00403	0.998
3	50000	13	3.16	0.00398	3.14	0.00393	0.978

N — число использованных экспериментальных точек, n — степень первого члена разложения K в ряд Тейлора с коэффициентом отличным от нуля, C — числовой коэффициент в формуле (2.8), r_{11} — коэффициент корреляции.

При анализе табл. 1 и графиков можно сделать следующие выводы.

1) С достаточной степенью достоверности можно заключить, что величина n содержится в пределах $3.0 \leq n \leq 3.2$. Отсюда следует, что в тейлоровском разложении функции $K(z)$ наиболее существен третий член, хотя, возможно, иногда следует учитывать и четвертый член ряда (отметим, что вывод формул (2.7), (2.8) и их оценки не меняются в предположении дробности n).

2) Для практических расчетов и теоретического анализа следует рекомендовать формулы, основанные на предположении $n = 3$ (для обычно употребляемых критерияльных формул $N_{Nu} = \gamma N_{Re}^l N_{Sc}^m$ рекомендуется принимать $m = 0,33$).

В заключение затронем еще один важный вопрос: меняется ли строение вязкого подслоя развитого турбулентного течения при изменении N_{Re} . Табл. 1 может натолкнуть на мысль о монотонном росте n с числом Рейнольдса. Для проверки гипотез $n_1 = n_2 = n_3$ воспользуемся тем, что статистика

$$T_{i,j} = \left| \frac{\sigma_{*i}}{\sigma_i} \sqrt{N-1} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)_i - \left(\frac{n-1}{n} \right)_j \right] \right| \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

имеет распределение Стьюдента t_{N-2} [29]. Здесь

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\lg N_{St_i} - \left(\frac{1-n}{n} \lg N_{Sc_i} + \lg C \right) \right]^2$$

$$\sigma_{*}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\lg N_{Sc_i} - \langle \lg N_{Sc} \rangle)^2, \quad \langle \lg N_{Sc} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lg N_{Sc_i}$$

Задавшись коэффициентом доверия 99%, найдем соответствующие доверительные интервалы $|t| < t_1$ (t_1 — 1% критическое значение t_{N-2}) и сравним их с $T_{i,j}$. Полученные данные приведены в табл. 2.

Таблица 2

$j \backslash i$	1	2	3	N	n	σ	σ_{*}	t_1
1	0	2.26	2.42	73	2.97	0.067	1.02	2.67
2	1.60	0	0.10	19	3.13	0.036	0.79	2.90
3	0.85	0.05	0	13	3.14	0.053	0.72	3.11

σ — среднеквадратичная ошибка корреляционного уравнения;
 σ_{*} — эмпирическое среднеквадратичное отклонение $\lg N_{Sc_i}$ от $\langle \lg N_{Sc} \rangle$.

Из табл. 2 следует, что на уровне значимости 1% гипотеза об идентичности строения вязкого подслоя при $10 \cdot 10^3 < N_{Re} < 50 \cdot 10^3$ не отвергается. Следует, впрочем, отметить, что в случае $T_{3,1}$ отклонение почти значимо.

Автор благодарит А. М. Яглома — научного руководителя этой работы и Дж. Вольфовица (Корнельский университет, США), приславшего микрофильм работы [28], содержащей наиболее полные экспериментальные данные о массообмене при больших числах Шмидта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Изд-во «Наука», 1965.
2. Elrod H. G. Note on the turbulent shear stress near a wall, *J. aeronaut. sci.*, 1957, vol. 24, No. 6.
3. Tien C. L. A note on distributions of temperature and eddy diffusivity for heat in turbulent flow near a wall. *Z. angew. Math. and Phys.*, 1964, B. 15, No. 1.
4. Reichardt H. Vollständige Darstellung der turbulenten Geschwindigkeitsverteilung in glatten Leitungen. *Z. angew. Math. und Mech.*, 1951, B 31, No. 7.
5. Wasan D. T., Tien C. L., Wilke C. R. Theoretical correlation of velocity and eddy viscosity for flow close to a pipe wall. *J. Amer. inst. chem. eng-rs*, 1963, vol. 4, No. 4.
6. Wasan D. T., Wilke C. R. Turbulent exchange of momentum, mass, and heat between fluid streams and pipe wall. *Internat. J. heat and mass transfer*, 1964, vol. 7, No. 1.
7. Lin C. S., Moulton R. W., Putnam G. L. Mass transfer between solid walls and fluid streams. *Industr. and engng. chemistry*, 1953, vol. 45, No. 3.
8. Driest E. R. On turbulent flow near a wall. *J. Aeronaut. sci.*, 1956, vol. 23, No. 11.
9. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.
10. Deisler R. G. Analysis of turbulent heat transfer, mass transfer and friction in smooth tubes at high N_{Pr} and N_{Sc} numbers. *US. Nat. advisory committee aeronaut.*, 1955, Report, No. 1210.
11. Лойцянский Л. Г. Перенос тепла в турбулентном движении. *ПММ*, 1960, т. 24, вып. 4.
12. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. *U. S. Nat. advisory committee aeronaut.*, 1954, Report, No. 1174.
13. Schubauer G. B. Turbulent processes as observed in boundary layer and pipe, *J. appl. phys.*, 1954, vol. 25, No. 2.
14. Sleicher C. A. Experimental velocity and temperature profiles for air in turbulent pipe flow. *Trans. Amer. soc. mech. eng-rs*, 1958, vol. 80, No. 3.
15. Лойцянский Л. Г. Гипотеза локальности в турбулентном движении жидкости при наличии вязкости. *ПММ*, 1958, т. 22, вып. 5.
16. Сполдинг Д. Б. Исследование теплообмена пластины с турбулентным потоком жидкости. *Инж.-физ. ж.*, 1963, т. 6, № 3.
17. Багоцкая И. А. Диффузия в жидкости при турбулентном режиме размешивания. *Докл. АН СССР*, 1952, т. 85, № 5.
18. Федорова А. И., Видович Г. Л. Диффузионная кинетика при турбулентном режиме размешивания. *Докл. АН СССР*, 1956, т. 109, № 1.
19. Амбразевичюс А. Б., Жукаускас А. А. Исследование теплоотдачи пластины в потоке капельной жидкости. *Тр. АН Литовской ССР*, 1959, серия Б, № 3.
20. Bernardo E., Eian C. S. Heat transfer tests of aqueous ethylene glycol solutions in an electrically heated tube, *Nat. advisory committee aeronaut*, 1945, Wartime report E 136 (Supersedes NACA ARR E5F07).
21. Bonilla C. F., Charles F. Mass transfer in liquid metal and fused salt systems. *U. S. Atomic energy committee techn. informat. service. First quarterly progress*, 1951, Report NYO-3086, Oak Ridge, September.
22. Lin C. S., Denton E. B., Gaskill H. S., Putnam G. L. Diffusion controlled electrode reactions. *Industr. and engng. chem.*, 1951, vol. 43, No. 9.
23. Linton W. H., Sherwood T. K. Mass transfer from solid shapes to water in streamline and turbulent flow. *Chem. engng. progr.*, 1950, vol. 46, No. 5.
24. Гзовский С. Я., Плановский А. Н. Исследование массообмена при растворении твердой фазы в жидкости. *Тр. Моск. ин-та хим. машиностр.*, 1957, т. 13.
25. Meyerink E. S. C., Friendlander S. K. Diffusion and diffusion controlled reaction in fully developed turbulent pipe flow. *Chem. engng sci.*, 1962, vol. 17, No. 2.
26. Morris F. H., Whitman W. G. Heat transfer for oils and water in pipes. *Industr. and engng chem.*, 1928, vol. 20, No. 2.
27. Friend W. L., Metzner A. B. Turbulent heat transfer inside tubes and the analogy among heat mass and momentum transfer. *J. Amer. inst. chem. eng-rs*, 1958, vol. 4, No. 3.
28. Hamilton R. M. Solid-liquid mass transfer in turbulent pipe flow. *Ph. D. Thesis*, Cornell University, 1963, June.
29. Крамер Н. *Mathematical methods of statistics*, 1946. (Русск. перев. Крамер Г. Математические методы статистики. Изд. иностр. лит., 1948.)