

5. Распределение давления. Давление p в любой внутренней точке прямоугольника (3.2) находится интегрированием полного дифференциала, образуемого частными производными, доставляемыми разделением действительной и мнимой частей (4.1). В частности, для распределения давления на стороне DF — образе поверхности крыла — тем же путем, что и выше для образа ударного фронта, получим

$$p = \int_0^{\tau} \frac{\partial p}{\partial \tau} d\tau = -c \int_0^{\tau} \text{Im}(i\tau) \Lambda(i\tau) d\tau$$

действительные функции $\Lambda(i\tau)$ и $\text{Im}(i\tau)$ даются соотношениями

$$\Lambda(i\tau) = \prod_{n=0}^{\infty} \left[(1 - 2\sqrt{q^{2n+1}} \cos \tau + q^{2n+1})^4 / \prod_{i=1}^4 (1 - 2\sqrt{q^{2n+1}} F_i \cos \tau + q^{2n+1} F_i^2)^{-1} \right]$$

$$\text{Im } L(i\tau) = \frac{\vartheta_2(\tau) - \varphi(T) \vartheta_3(\tau)}{\vartheta_4(\tau)} \frac{\sqrt{k} \vartheta_2(\tau) + \vartheta_3(\tau)}{\sqrt{k} \vartheta_2(\tau) - \vartheta_3(\tau)}$$

В плоскости xu координата r какой-либо точки поверхности крыла связана с координатой τ зависимостью $r = |(h \cos \tau - 1) / (h - \cos \tau)|$ и откладывается от точки E на фигуре в сторону точки N при $\tau > \arccos h^{-1}$ и в противоположную сторону — в случае противоположного знака неравенства.

Поступило 24 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Lighthill M. J. The diffraction of blast. I. Proc. Royal Soc. A., 1949, vol. 198, No. 1055.
2. Lighthill M. J. The diffraction of blast 2, Proc. Roy. Soc. A., 1950, vol. 200, p. 554—565.
3. Malmuth N. D. Hypersonic Flow over a Delta Wing of Moderate Aspect Ratio, AIAA J., 1966, vol. 4, No. 3.
4. Briggs J. L. Comment on Calculation of Oblige Shock Waves. AJAA J., 1964, vol. 2, No. 5.
5. Бабеев Д. А. Численное решение задачи обтекания нижней поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. Вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6.
6. Кочин Н. Е. Теоретическая гидромеханика, т. 2. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1962.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1963.
9. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа, т. 2. Изд. 2-е, М., Физматгиз, 1963.
10. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций. М.—Л., ОНТИ, 1936.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, М., Физматгиз, 1963.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЭЛЛИпсоидах вращЕНИЯ

В. А. БАШКИН, Н. П. КОЛИНА

(Москва)

Приведены результаты теоретического исследования ламинарного пограничного слоя на эллипсоидах вращения, обтекаемых сверхзвуковым потоком совершенного газа при нулевом угле атаки, в достаточно широком диапазоне изменения характеристических параметров: $M_{\infty} = 3-10$, $\delta = b/a = 0.5-4$, $H_{1w} = 0.05-0.75$.

Установлено, что при коэффициенте эллиптичности $\delta < 2.0$ максимум местного потока тепла имеет место в окрестности передней критической точки, а при $\delta \geq 2.0$ его положение смещается вниз по потоку от критической точки.

Для уменьшения тепловых потоков вершина и передние кромки гиперзвуковых летательных аппаратов имеют более или менее заметное затупление, формой которого в большинстве случаев является сегмент сферы или кругового цилиндра.

Как известно, величина теплового потока в критической точке в предположении ньютоновского течения обратно пропорциональна корню квадратному из радиуса кривизны затупления. Следовательно, для снижения максимальной величины теплового потока в критической точке необходимо иметь форму затупления с большим радиусом кривизны. Однако изменение формы затупления приводит при определенных условиях к смещению максимума теплового потока вниз по потоку от критической точки [1].

В связи с этим представляет практический интерес исследование влияния формы затупления на величину и характер распределения тепловых потоков вдоль образующей тела.

Ниже приведены результаты теоретического исследования ламинарного пограничного слоя на носовой части эллипсоидов вращения, обтекаемых сверхзвуковым потоком совершенного газа при нулевом угле атаки. Величина коэффициента эллиптичности δ изменялась в диапазоне от 0.5 до 4.0, число M полета — от 3 до 10, а величина температурного фактора H_{1w} — от 0.05 до 0.75; изменение динамического коэффициента вязкости в зависимости от температуры подчиняется закону Сезерленда.

1. Течение сжимаемого газа в ламинарном осесимметричном пограничном слое описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho r u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho r v) &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\mu}{P} \left[\frac{\partial H}{\partial y} + (P-1) \frac{\partial u}{\partial y} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь x и y — физические координаты, направленные вдоль и по нормали к обрабатываемой поверхности; r — радиус поперечного сечения осесимметричного тела; u, v — компоненты вектора скорости, параллельные осям координат x, y соответственно; μ — динамический коэффициент вязкости; ρ — плотность газа; H — полная энтальпия (теплосодержание) газа; P — число Прандтля. Индекс e характеризует параметры потока на внешней границе пограничного слоя, индекс w — на поверхности тела.

В настоящее время разработан ряд методов численного интегрирования системы уравнений (1.1) и на основании их составлены стандартные программы применительно к некоторым частным случаям. В частности, в работе [2] была использована стандартная программа для расчета ламинарного пограничного слоя на поверхности сферически затупленного кругового конуса, обтекаемого сверхзвуковым потоком совершенного газа при нулевом угле атаки. Предполагалось, что число Прандтля постоянно и равно 0.7, а зависимость динамического коэффициента вязкости от температуры подчиняется закону Сезерленда.

Для численного интегрирования системы уравнений (1.1) вводятся обобщенные параболические координаты по соотношениям [3]

$$\xi = \text{const } \xi, \quad \xi = \left(2 \int_0^x u_e \rho_e \mu_e r^2 dx \right)^{1/2}, \quad \eta = \frac{u_e}{\xi} \int_0^y \rho r dy \quad (1.2)$$

Тогда система уравнений (1.1) преобразуется к виду

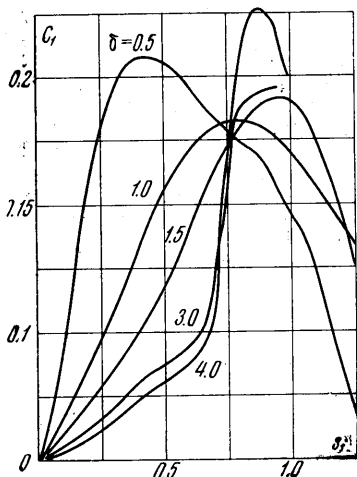
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\rho_1 \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial u_1}{\partial \eta} + \beta (h_1 - u_1^2) &= \alpha \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial s_1} - \frac{\partial u_1}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\rho_1 \mu_1}{P} \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \right) + f \frac{\partial h_1}{\partial \eta} + \gamma \rho_1 \mu_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta} \right)^2 &= \alpha \left(u_1 \frac{\partial h_1}{\partial s_1} - \frac{\partial h_1}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial s_1} \right) \\ \mu &= \mu_1 \mu_e, \quad \rho = \rho_1 \rho_e, \quad h = h_1 h_e, \quad u = u_1 u_e, \quad s = s_1 L \\ f &= f_w + \int_0^\eta u_1 d\eta, \quad \alpha = \xi \frac{ds_1}{d\xi}, \quad \beta = \frac{\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi}, \quad \gamma = \frac{u_e^2}{h_e} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь $s(\xi)$ — продольная координата, h — статическая энтальпия (теплосодержание) газа, L — характерный размер тела.

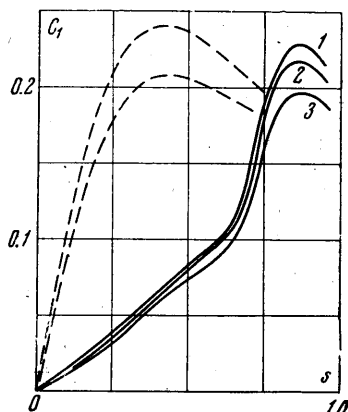
Решение системы уравнений (1.3) должно удовлетворять граничным условиям

$$\begin{aligned} u_1 = f = 0, \quad h_1 = h_{1w} = \text{const} \quad \text{при } \eta = 0 \\ u_1 = h_1 = 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1.4)$$

Стандартная программа работы [2] после небольшой доработки была приспособлена для расчета ламинарного пограничного слоя на поверхности эллипсоидов вращения, обтекаемых сверхзвуковым потоком совершенного газа при нулевом угле атаки. Эти изменения касались расчета величин τ и s , а также способа аппроксимации исходных данных невязкого потока. В качестве характерного размера была выбрана вертикальная полуось эллипсоида вращения. Температура газа на бесконечности принималась равной 270°K .



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Результаты численного интегрирования поля течения вокруг эллипсоидов вращения, обтекаемых сверхзвуковым потоком совершенного газа при нулевом угле атаки, приведены в работах [4, 5]. Для численного интегрирования нелинейных уравнений газовой динамики в работе [4] был использован метод интегральных соотношений, предложенный А. А. Дородницыным [6], а в работе [5] — метод, разработанный Г. Ф. Телениным [7].

Сравнение результатов расчетов по этим двум методам для соответствующих частных случаев показало достаточно хорошее согласование их между собой. Поскольку в работе [5] проведено более подробное параметрическое исследование поля течения вокруг эллипсоидов вращения при сверхзвуковых скоростях полета, то при расчете уравнений ламинарного пограничного слоя использовались в основном данные этой работы.

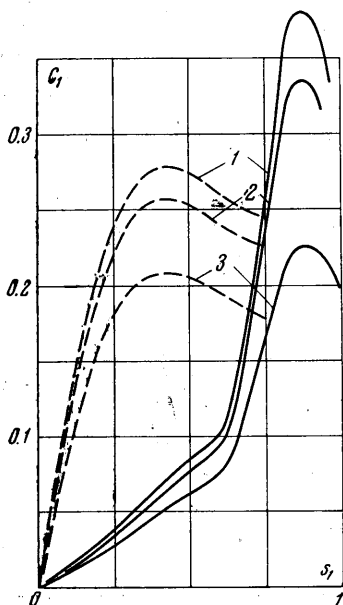
3. Влияние различных параметров: формы тела, числа M полета и температурного фактора на характер изменения напряжения трения вдоль образующей эллипсоида вращения показано на фиг. 1—3 в виде зависимости величины

$$c_1 = \frac{\tau_w}{V_m^2 \rho_{e0}} \sqrt{R_0}$$

от координаты s_1 при фиксированных значениях параметров δ , M_∞ и H_{1w} . Здесь τ_w — местное напряжение трения, V_m — максимальная скорость потока, ρ_{e0} — плотность торможения на внешней границе пограничного слоя, R_0 — число Рейнольдса, вычисленное по параметрам торможения, максимальной скорости и характерной длине.

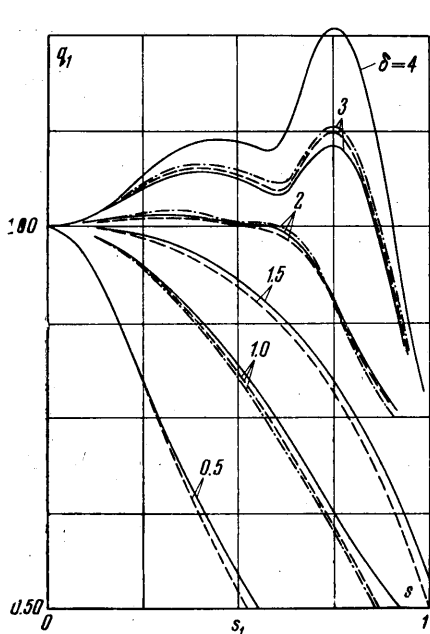
Из этих фигур можно видеть, что общий характер изменения напряжения трения вдоль образующей эллипсоида вращения будет типичным

для затупленных тел. В критической точке напряжения трения равно нулю; по мере удаления от нее его величина возрастает, достигает своего максимального значения в окрестности звуковой линии, а затем уменьшается.

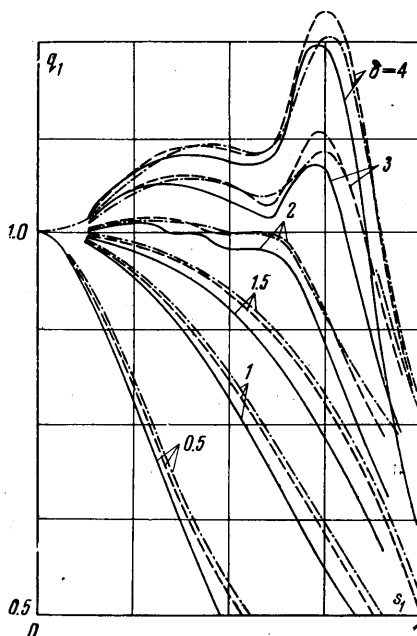


Фиг. 3

На фиг. 1 показано влияние формы тела — параметра δ — на распределение напряжения трения при числе $M_\infty = 3$ и величине температурного фактора $H_{1w} = 0.05$. По мере увеличения параметра δ происходит уменьшение градиента напряжения трения в окрестности критической точки и его увеличение при подходе к звуковой линии. Это приводит к тому, что при возрастании параметра δ максимум напряжения трения становится более резким. Максимальное значение напряжения трения по мере увеличения δ сначала уменьшается, достигает минимума, а затем возрастает.



Фиг. 4



Фиг. 5

Так как характеристики ламинарного пограничного слоя рассчитывались для дозвуковой и трансзвуковой областей течения, где числа M потока на внешней границе пограничного слоя малы и оказывают слабое влияние, то при фиксированном температурном факторе поведение местного напряжения трения и местного потока тепла целиком и полностью определяется характером изменения градиента скорости внешнего течения. Результаты расчетов параметров невязкого потока показывают, что в окрестности критической точки величина градиента скорости уменьшается, а в окрестности звуковой линии — увеличивается по мере возрастания параметра δ . При этом максимум градиента скорости из критической точки постепенно перемещается к звуковой линии.

На фиг. 2 показано влияние числа M полета на распределение напряжения трения для температурного фактора $H_{1w} = 0.05$ (пунктирной кривой нанесены зависимости для $\delta = 0.5$, сплошной — для $\delta = 3$; кривая 1 соответствует числу $M_\infty = 10$; кривая 2 — числу $M_\infty = 6$; кривая 3 — числу $M_\infty = 3$). Можно видеть, что увеличение числа M полета приводит к некоторому возрастанию напряжения трения. При этом при больших числах M полета его увеличение незначительно, что связано со стабилизацией распределения относительной скорости невязкого течения при гиперзвуковых скоростях.

Увеличение температурного фактора приводит к возрастанию напряжения трения (см. фиг. 3; пунктирной кривой нанесены зависимости для $\delta = 0.5$, сплошной — для $\delta = 4$ при числе $M_\infty = 3$; кривая 1 соответствует температурному фактору $H_{1w} = 0.75$; кривая 2 — $H_{1w} = 0.5$; кривая 3 — $H_{1w} = 0.05$). Физически это связано с тем, что в данном случае усиливается влияние градиента скорости.

4. Анализ теплопередачи на поверхности эллипсоидов вращения при сверхзвуковых скоростях полета начнем с рассмотрения влияния формы тела на характер распределения относительного потока тепла $q_1 = q_w(s) / q_w(0)$ вдоль образующей тела.

Такое представление результатов расчетов местных тепловых потоков обладает тем преимуществом, что эти зависимости слабо зависят от числа M полета и величины

температурного фактора при наличии сильного и умеренного теплообмена, а определяются в основном формой тела. На фиг. 4 показана зависимость величины q_1 от s_1 при фиксированных значениях параметра δ и величине температурного фактора $H_{1w} = 0.05$ (сплошная кривая соответствует числу $M_\infty = 3$, пунктирная кривая — числу $M_\infty = 6$, штрих-пунктирная кривая — числу $M_\infty = 10$), а на фиг. 5 приведены соответствующие зависимости для числа $M_\infty = 3$ (сплошная кривая соответствует величине температурного фактора $H_{1w} = 0.75$; пунктирная — $H_{1w} = 0.5$, штрих-пунктирная — $H_{1w} = 0.05$).

Из фиг. 4 и 5 можно видеть, что по мере увеличения параметра δ происходит смена характера распределения величины q_1 : при $\delta < 2$ функция $q_1(s_1)$ является монотонно убывающей, при $\delta \geq 2$ она сначала возрастает, достигает максимума, а затем уменьшается. Такой характер изменения величины $q_1(s_1)$ объясняется поведением градиента скорости внешнего течения, которое было описано выше при анализе напряжения трения.

Ниже приведены значения величины $q_0 = q_w(0) / q_w^\circ(0)$, где $q_w^\circ(0)$ — тепловой поток в критической точке сферы:

δ	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	M_∞	H_{1w}
q_0	1.381	1.0	0.8555	0.7715	0.672	0.6147	3	0.05
q_0	1.381	1.0	0.8575	0.771	0.671	0.615	3	0.75
q_0	1.381	1.0	0.837	0.7625	0.655	—	6	0.05
q_0	—	1.0	—	0.7505	0.6455	—	10	0.05

При увеличении параметра δ величина теплового потока в окрестности критической точки уменьшается, что связано с уменьшением градиента скорости внешнего течения в критической точке. Далее можно видеть, что значения $q_0(\delta)$ очень слабо зависят от числа M полета и величины температурного фактора H_{1w} . Поскольку для расчета теплового потока в окрестности критической точки сферы имеется много корреляционных формул и определение его не представляет большого труда, то зависимость q_0 от параметра δ можно рассматривать как универсальную и использовать ее для определения местного потока тепла в критической точке эллипсоида вращения.

Выше было показано, что при $\delta < 2$ максимальное значение теплового потока имеет место в окрестности критической точки, а при $\delta \geq 2$ — вблизи звуковой линии. Ниже приведены значения величины $q_{\max} = q_w \max / q_w^\circ(0)$ в зависимости от параметра δ для температурного фактора $H_{1w} = 0.05$:

δ	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	M_∞
q_{\max}	0.945	0.679	0.585	0.535	0.510	0.530	3
q_{\max}	1.027	0.740	0.630	0.570	0.545	—	6
q_{\max}	—	0.768	0.655	0.590	0.560	—	10

Можно видеть, что при $\delta \approx 3$ имеет место минимум теплового потока.

Поступило 2.VI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. E s k e r t E., T e w f i k O. Use of reference enthalpy in specifying the laminar heat transfer distribution around blunt bodies in dissociated air. «IASS», 1960, No. 6.
2. А н к у д и н о в А. Л. Результаты расчета пограничного слоя на затупленных конусах в сверхзвуковом потоке. Ж. вычисл. матем. и вычисл. физ., 1965, т. 5.
3. П е т у х о в И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. Сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», Изд-во «Наука», 1964.
4. Б е л о ц е р к о в с к и й О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной (расчетные формулы и таблицы полей течения). ВЦ АН СССР, 1961.
5. Г и л и н с к и й С. М., Т е л е н и н Г. Ф. Сверхзвуковое обтекание тел различной формы с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1964, т. 9—10, № 5.
6. Д о р о д н и ц ы н А. А. Об одном методе численного решения некоторых задач аэрогидродинамики. Тр. Всес. матем. съезда, Изд-во АН СССР, 1958, т. 3, 1956, т. 2.
7. Г и л и н с к и й С. М., Т е л е н и н Г. Ф., Т и н я к о в Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, ОН, Механика и машиностроение, 1964, т. 7—8, № 4, VII—VIII.