

## ПЛОСКОЕ ВИХРЕВОЕ ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ЗВУКОВОЙ ЛИНИИ ВЕКТОРУ СКОРОСТИ

Э. Г. ШИФРИН (Москва)

В работе изучается плоское вихревое течение в окрестности точки  $K$  звуковой линии, в которой она ортогональна вектору скорости. Существование, по крайней мере, одной такой точки при обтекании гладкого выпуклого профиля с отошедшей ударной волной равномерным потоком достаточно большой скорости ( $M_\infty \geq 1.69$  при  $k = 1.4$ ) вытекает из работы [1]. Точка  $K$  существует также в сверхзвуковой перерасширенной струе, если ее ось симметрии пересекается ударной волной, за которой имеет место переход дозвукового течения в сверхзвуковое. В этом случае точка  $K$  есть точка пересечения звуковой линии с осью симметрии (фиг. 1).

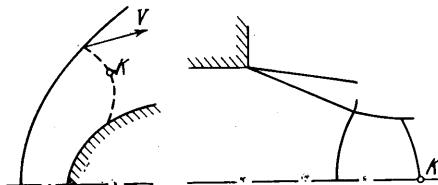
Уравнения газовой динамики в системе координат, линиями которой являются линии тока  $\psi = \text{const}$  и ортогональные к ним траектории  $\Phi = \text{const}$ , имеют вид (1)

$$(M^2 - 1) \frac{\partial \ln \lambda}{\partial s_1} = \frac{\partial \beta}{\partial s_2}, \quad \frac{\partial \beta}{\partial s_1} = \frac{\partial \ln \lambda}{\partial s_2} + \frac{1}{kRM^2} \frac{dS}{ds_2}, \quad \frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{\partial}{h_1 \partial \Phi}, \quad \frac{\partial}{\partial s_2} = \frac{\partial}{h_2 \partial \Psi}$$

Здесь  $\lambda$  — коэффициент скорости;  $\beta$  — угол наклона вектора скорости к некоторому фиксированному направлению, отсчитываемый против часовой стрелки;  $M$  — число Маха;  $S$  — энтропия;  $k$  — показатель адиабаты;  $R$  — газовая постоянная;  $h_1$ ,  $h_2$  — коэффициенты Ламэ. Пользуясь формулами, выраждающими кривизну координатной линии через коэффициенты Ламэ, из системы (1) можно получить

$$h_2 q(\lambda) = F(\Psi)$$

$$h_1 \lambda \exp \int_{S_0}^S \frac{dS}{kRM^2} = \Phi(\Phi) \quad (2)$$



Фиг. 1

где интеграл вычисляется вдоль линии  $\Phi$ ;  $q(\lambda) = \lambda^{1/2} (k+1) - 1/2 (k-1) \lambda^2 [1/(k-1)]$ .

Здесь  $F(\Psi)$ ,  $\Phi(\Phi)$  — произвольные функции; положим  $F(\Psi) = 1$ ,  $\Phi(\Phi) = 1$ .

Выведем из уравнений (1), (2) приближенные уравнения вихревого трансзвукового течения, имеющего место в окрестности некоторой точки  $O$  звуковой линии. Поставим начало координат в эту точку. Будем считать, что в некоторой ее окрестности энтропия  $S(\Psi)$  будет достаточно гладкой функцией, так что

$$\frac{S}{kR} = W_0 \Psi + 1/2 W_1 \Psi^2 + o(\Psi^2), \quad W_0 = \frac{1}{kR} \frac{dS}{d\Psi}, \quad W_1 = \frac{1}{kR} \frac{d^2S}{d\Psi^2} \quad \text{в точке } O \quad (3)$$

Положим

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 - \frac{u(\Phi, \Psi)}{k+1} = 1 - \varepsilon^2 \frac{U(\Phi^\circ, \Psi^\circ)}{k+1} \\ \beta &= \frac{v(\Phi, \Psi)}{k+1} = \varepsilon^2 \Phi^\circ W_0 + \varepsilon^3 \frac{V(\Phi^\circ, \Psi^\circ)}{k+1}, \quad \Phi = \varepsilon^2 \Phi^\circ, \quad \Psi = \varepsilon \Psi^\circ \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр. Подставив (3), (4) в (1) и (2), при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$U \frac{\partial U}{\partial \Phi^\circ} + \frac{\partial V}{\partial \Psi^\circ} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial \Psi^\circ} + \frac{\partial V}{\partial \Phi^\circ} = \omega \Psi^\circ, \quad \omega = (k+1)(W_1 - W_0 \varepsilon^2) \quad (5)$$

Для системы (5) можно найти точное решение, аналогичное точному решению уравнений потенциального трансзвукового течения, при помощи которого С. В. Фальковичем был исследован асимптотический характер течения в окрестности «центра сопла» при условии ограниченности ускорения [2].

Решение (5), описывающее течение в окрестности точки  $K$ , имеет вид

$$u = A\Phi - 1/2 (A^2 - \omega) \Psi^2, \quad v = \Omega\Phi + A^2 \Phi \Psi - 1/4 A (A^2 - \omega) \Psi^3 \quad (6)$$

$$\Omega = (k+1) W_0 = \frac{k+1}{kR} \frac{dS}{d\Psi}, \quad A = -(k+1) \frac{\partial \lambda}{\partial s_1} \quad \text{в точке } K$$

Звуковая линия  $u = 0$  представляет собой в плоскости  $\Phi\Psi$  параболу, обращенную выпуклостью в сторону сверхзвуковых скоростей при  $\omega < A^2$  и в сторону дозвуковых скоростей — при  $\omega > A^2$ . Эти условия совпадают с полученными в [3] путем исследования точных уравнений газодинамики.

В [3] доказывается существование нечетного числа линий ветвления, пересекающих звуковую линию в точке  $K$  при  $\Omega \neq 0$ . На линии ветвления якобиан  $\partial(u, v)/\partial(\varphi, \psi)$  обращается в нуль. Воспользовавшись формулами (6), получим, что линия ветвления в плоскости  $\varphi\psi$  представляет собой параболу

$$\varphi = \frac{A^2 - \omega}{2A} [(\psi + \Omega)^2 - \Omega^2]$$

Таким образом, если  $\Omega \neq 0$  и  $\omega \neq A^2$  (при  $\omega = A^2$  звуковая линия — прямая), то звуковую линию в точке  $K$  пересекает единственная линия ветвления.

Найдем отображение окрестности точки  $K$  в плоскость годографа  $uv$ . Исключая из (6) переменную  $\varphi$ , получим для определения  $\psi$  кубическое уравнение

$$\frac{1}{3} A^2 (A^2 - \omega) \psi^3 + \frac{1}{2} \Omega (A^2 - \omega) \psi^2 + A^2 u \psi + (\Omega u - A v) = 0 \quad (7)$$

Дискриминант этого уравнения выражается в виде

$$D = v_*^2 - (3\Omega_* u_* + 2\Omega_*^3) v_* + u_*^3 - \frac{3}{4} u_*^2 \Omega_*^2 + 6u_* \Omega_*^4 = (v_* - v_1)(v_* - v_2)$$

$$\Omega_* = \frac{\Omega}{2A^2}, \quad u_* = \frac{u}{A^2 - \omega}, \quad v_* = \frac{3}{2} \frac{v}{A(A^2 - \omega)}$$

$$v_{1,2} = \frac{1}{2} [3\Omega_* u_* + 2\Omega_*^3 \pm (\Omega_*^2 - u_*)^{1/2}]$$

При  $u_* > \Omega_*^2$  имеем  $D > 0$ , и уравнение (7) имеет один вещественный корень; при  $u_* < \Omega_*^2$  уравнение (7) имеет один корень при  $v_* > v_1$  и при  $v_* < v_2$  ( $D > 0$ ); при  $v_2 < v_* < v_1$  уравнение (7) имеет три корня ( $D < 0$ ), при  $v_* = v_2$  или  $v_* = v_1$  — два корня, при  $v_* = v_1 = v_2$  — один. Таким образом, отображение окрестности точки  $K$  в плоскость годографа имеет вид складчатой поверхности, изображенной на фиг. 2, при  $\Omega > 0$ . Линия ветвления (край складки) пересекает звуковую линию в точке  $K$ , а также в точке  $L$ , в которой кривизна линии тока обращается в нуль. Линии тока  $\psi = \text{const}$  представляют собой в плоскости годографа, так же как и в потенциальном течении [2], прямые

$$u = \frac{1}{\Omega_* + A^2 \psi} [Av - \frac{1}{3} A^2 (A^2 - \omega) - \frac{1}{2} \Omega (A^2 - \omega) \psi^2]$$

Линия ветвления будет их огибающей и имеет точку возврата, которая при  $A^2 > \omega$  расположена в области сверхзвуковых скоростей, а при  $A^2 < \omega$  — в области сверхзвуковых скоростей.

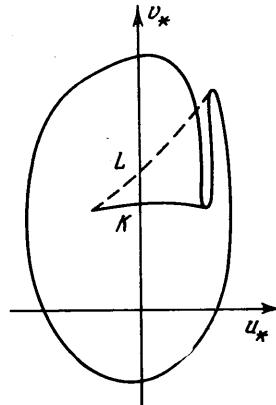
Исследуем теперь поведение характеристик в окрестности точки  $K$ . Дифференциальное уравнение характеристик в плоскости  $\varphi\psi$  имеет вид

$$(d\varphi / d\psi)^2 = -u = -A\varphi + \frac{1}{2} (A^2 - \omega) \psi^2$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$-d \ln x = y \left[ y^2 \pm \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{A^2} - 1 \right) \right]^{-1} dy$$

$$(x = A\psi, y^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega}{A^2} \right) - \frac{\varphi}{A\psi^2})$$



Фиг. 2

Интегрируя и возвращаясь к прежним переменным, получим

$$\begin{aligned} \psi^2 \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega}{A^2} \right) - \frac{\varphi}{A\psi^2} \right]^{1/2} - \frac{\pm 1 + r^{1/2}}{4} \right\}^{1 \pm r^{-1/2}} \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega}{A^2} \right) - \frac{\varphi}{A\psi^2} \right]^{1/2} - \frac{\pm 1 - r^{1/2}}{4} \right\}^{1 \mp r^{-1/2}} = C \quad \text{при } r > 0 \\ \psi \left[ 1 \mp 4 \left( -\frac{1}{16} - \frac{\varphi}{A\psi^2} \right)^{1/2} \right] \exp \left[ 1 \mp 4 \left( -\frac{1}{16} - \frac{\varphi}{A\psi^2} \right)^{1/2} \right] = C \quad \text{при } r = 0 \\ \psi^2 \left\{ -\frac{\varphi}{A\psi^2} \mp \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega}{A^2} \right) - \frac{\varphi}{A\psi^2} \right]^{1/2} \right\} \exp \left\{ \pm 2(-r)^{-1/2} \arctg (-r)^{-1/2} \times \right. \\ \times \left. \left[ \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega}{A^2} \right) - \frac{\varphi}{A\psi^2} \right)^{1/2} \mp 1 \right] \right\} = C \quad \text{при } r < 0 \end{aligned}$$

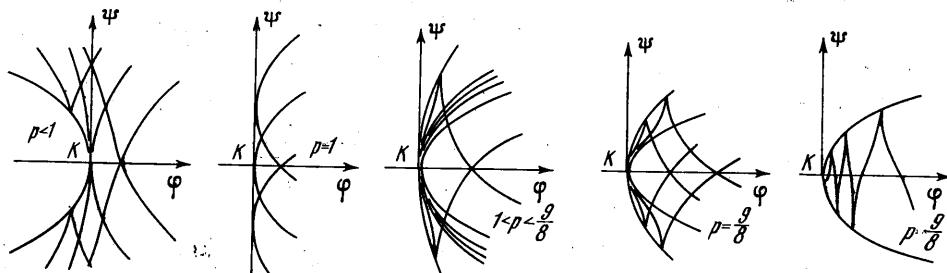
Анализ этих формул позволяет установить качественную картину расположения характеристик (фиг. 3) в плоскости  $\varphi\psi$  при различных значениях  $r = 9 - 8 \omega / A^2$ .

При  $p = \omega / A^2 < 1$  расположение характеристик качественно такое же, как и в потенциальном течении; через точку  $K$  проходят две характеристики разных семейств, являющиеся параболами

$$-\phi/A\psi^2 = 1/8 (1 \pm r^{1/2}) = \mu_{1,2} \quad (8)$$

При  $p = 1$  прямая звуковая линия будет огибающей характеристик, которые являются параболами  $\psi = \pm 2\sqrt{\phi/A} + C$ . (Заметим, что для исследования характера течения при  $\omega = A^2$  необходимо учитывать члены более высокого порядка.)

При  $p > 1$  звуковая линия будет параболой, обращенной выпуклостью в сторону дозвукового течения. Здесь возможны три случая.



Фиг. 3

При  $1 < p < 9/8$  сверхзвуковая область, расположенная в плоскости  $\phi\psi$  сверху от оси симметрии (в плоскости  $\phi\psi$  расположение характеристик симметрично относительно оси  $\psi = 0$ ), разбивается на три области звуковой линии, осью симметрии и двумя характеристиками первого семейства, проходящими через точку  $K$  и являющимися параболами  $\mu_{1,2}$  (8).

Установим расположение характеристик первого семейства относительно семейства парабол  $-\phi/A\psi^2 = \mu$ . Характеристики первого семейства, исходящие из звуковой линии, сделяются в области между звуковой линией и характеристикой первого семейства  $\mu = \mu_2$ ; они приближаются к точке  $K$ , пересекая параболы с возрастающими значениями  $\mu$  вплоть до параболы  $\mu = \mu_2$ .

Характеристики первого семейства в области между характеристиками первого семейства  $\mu = \mu_2$  и  $\mu = \mu_1$  приближаются к точке  $K$ , пересекая параболы с убывающими значениями  $\mu$ , вплоть до характеристики  $\mu = \mu_1$ . При удалении от точки  $K$  они пересекают параболы с возрастающими значениями  $\mu$ .

В области между характеристикой  $\mu = \mu_1$  и осью симметрии характеристики первого семейства будут отражением от оси симметрии характеристик второго семейства, проведенных из звуковой линии; если передвигаться вдоль характеристики первого семейства, удаляясь от оси симметрии, то она пересекает параболы с убывающими значениями  $\mu$ .

При  $p = 9/8$  характеристики  $\mu = \mu_1$  и  $\mu = \mu_2$  совпадают. Характеристики первого семейства, исходящие из звуковой линии, расположены в области между звуковой линией  $\mu = 1/16$  и характеристикой  $\mu = 1/8$ ; они приближаются к точке  $K$ , пересекая параболы с возрастающими значениями  $\mu$ . Характеристики первого семейства, расположенные в области между характеристикой  $\mu = 1/8$  и осью симметрии, будут отражением от оси симметрии характеристик второго семейства, исходящих из звуковой линии; если передвигаться вдоль характеристики первого семейства, удаляясь от оси симметрии, то она пересекает параболы с убывающими значениями  $\mu$ .

При  $p > 9/8$  из точки  $K$  не выходит характеристик. Каждая характеристика пересекает звуковую линию дважды: сверху и снизу от оси симметрии.

Заметим, что в указанной картине расположения характеристик имеется некоторое сходство с расположением характеристических поверхностей в окрестности «центра сопла» пространственного потенциального течения [4].

Поступило 20 V 1966

## ЛИТЕРАТУРА

- Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
- Фалькович С. В. К теории сопла Лаваля. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
- Шифрин Э. Г. Некоторые свойства симметричного обтекания профиля с отошедшей ударной волной. МЖГ, 1966, № 5.
- Рыжов О. С. О пространственных трансзвуковых течениях газа в каналах. ПММ, 1959, т. 23, вып. 4.