

НЕКОТОРЫЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ТЕЧЕНИЯ С МАХОВСКИМ
ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ УДАРНЫХ ВОЛН

А. Л. ГОНОР (Москва)

В работах [1,2] показано, что существует диапазон значений чисел Маха и геометрических параметров, для которых осуществляется обтекание конических тел с плоскими присоединенными скачками и регулярным пересечением скачков в пространстве. В данной статье определяется класс решений, соответствующий обтеканию конических звездообразных тел, с конфигурацией скачков в пространстве маховского типа.

1. Построение решения обратной задачи. Пусть однородный поток имеет в бесконечности скорость U и число Маха M_∞ . Систему координат выберем, как показано на фиг. 1, и рассмотрим движение газа при прохождении трех пересекающихся скачков: AOB , BOC и BOD . Для определения положения скачков возьмем следующие геометрические параметры: скачок AOB зададим углом γ_0 , который он образует с осью x . Скачок BOC — углом γ_1 , составленным с осью x и углом α , отложенным в плоскости $x = 1$ (фиг. 1). Вместо γ_1 можно ввести угол γ , расположенный между линией пересечения координатной плоскости xOy со скачком BOC и осью x , эти углы связаны соотношением $\text{tg } \gamma_1 = \text{tg } \gamma \sin \alpha$.

Положение третьего скачка определяется точками B и D . Обозначим вектор скорости за скачком BOC , отнесенный к величине скорости набегающего потока, через U_1 , а соответствующее число Маха — через M_1 . Проекции скорости определяются из выражений (1.1)

$$\begin{aligned} v_x &= 1 - (1 - \varepsilon) (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2}) \\ v_y &= (1 - \varepsilon) \text{ctg } \gamma_1 (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2}) \sin \alpha \\ v_z &= -(1 - \varepsilon) \text{ctg } \gamma_1 (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2}) \cos \alpha \end{aligned}$$

Отклонение потока после прохождения через скачок (угол $\delta_1 = \angle MOO_1$) можно вычислить из соотношения

$$\text{tg } \delta_1 = \frac{(v_y^2 + v_z^2)^{1/2}}{v_x}$$

Число M_1 находится после этого по известным формулам для косога скачка

$$M_1^2 \sin^2 (\gamma_1 - \delta_1) = \frac{1 + \varepsilon (M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1 - 1)}{M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1 + \varepsilon (M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1 - 1)}, \quad \varepsilon = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}$$

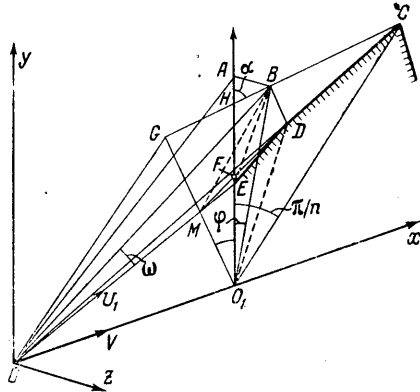
Здесь κ — показатель адиабаты. Учитывая, что точки B и M имеют координаты

$$B [1, \text{tg } \gamma_0, (\text{tg } \gamma_0 - \text{tg } \gamma) \text{tg } \alpha], \quad M [1, \text{tg } \delta_1 \sin \alpha, -\text{tg } \delta_1 \cos \alpha] \tag{1.2}$$

для угла ω между вектором скорости U_1 и линией пересечения скачков OB , получим

$$\cos \omega = \frac{\cos (\gamma_1 - \delta_1)}{\cos \gamma_1 [\sec^2 \gamma_0 + (\text{tg } \gamma_0 - \text{tg } \gamma)^2 \text{tg}^2 \alpha]^{1/2}} \tag{1.3}$$

Скачки AOB и BOD при заданных параметрах (γ_1 и α) скачка BOC образуют конфигурацию, соответствующую обтеканию некоторого тела, когда все проекции линий тока в плоскости $x = 1$, проходящих как через скачок AOB , так и через скачок BOD , сходятся в одну точку E , лежащую в плоскости xOy . Кроме этого, давление при переходе через поверхность контактного разрыва BOE остается непрерывным. Указанным двум требованиям, вообще говоря, можно удовлетворить, так как имеется возможность варьирования параметра γ_0 и угла поворота скачка BOD около линии OB . Введем в рассмотрение угол отклонения потока θ , лежащий в плоскости, нормальной к ребру OB , и образованный проекциями отрезка EB и вектора скорости U_1 на эту плоскость. Учитывая, что частицы газа, проходящие через скачок OAB , отклоняются на угол δ_0 , а координаты точки E есть $(1, \text{tg } \delta_0, 0)$, нетрудно определить нормальные



Фиг. 1

векторы к плоскостям BOE (N_1) и BOM (N_2). Их проекции после элементарных выкладок имеют вид

$$\begin{aligned} N_1 & [tg \delta_0 (tg \gamma_0 \sin \alpha - tg \gamma_1), - (tg \gamma_0 \sin \alpha - tg \gamma_1), \cos \alpha (tg \gamma_0 - tg \delta_0)] \\ N_2 & [tg \delta_1 (tg \gamma_0 - tg \gamma_1 \sin \alpha), - (tg \gamma_0 \sin \alpha - tg \gamma_1 + tg \delta_1 \cos^2 \alpha), \\ & \cos \alpha (tg \gamma_0 - tg \delta_1 \sin \alpha)] \end{aligned}$$

Отсюда находим выражение, определяющее угол θ

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \{ (tg \gamma_0 \sin \alpha - tg \gamma_1) [tg \delta_0 tg \delta_1 (tg \gamma_0 - \sin \alpha tg \gamma_1) + \sin \alpha tg \gamma_0 - \\ & - tg \gamma_1 + \cos^2 \alpha tg \delta_1] + \cos^2 \alpha (tg \gamma_0 - tg \delta_0) (tg \gamma_0 - \sin \alpha tg \delta_1) \} \cdot \\ & \{ [(\sin \alpha tg \gamma_0 - tg \gamma_1)^2 \sec^2 \delta_0 + \cos^2 \alpha (tg \gamma_0 - tg \delta_0)^2] [tg^2 \delta_1 (tg \gamma_0 - \sin \alpha tg \gamma_1)^2 + \\ & + (tg \gamma_0 \sin \alpha - tg \gamma_1 + \cos^2 \alpha tg \delta_1)^2 + \cos^2 \alpha (tg \gamma_0 - \sin \alpha tg \delta_1)^2] \}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Расположение ударной волны BOD можно определить теперь углом β , лежащим в плоскости угла θ , из условия, что поворот потока в этой плоскости задается выражением (1.4) и набегающий поток имеет число Маха $M_{1n} = M_1 \sin \omega$. В результате угол β находится по формулам для косоугольного скачка в виде

$$tg \theta = 2ctg \beta \frac{M_{1n}^2 \sin^2 \beta - 1}{M_{1n}^2 (\kappa + \cos 2\beta) + 2} \quad (1.5)$$

Углы ω и θ позволяют определить величину M_{1n} и по формуле (1.5) — угол скачка β . Однако расчет по предыдущим формулам возможен, если предварительно известен угол γ_0 . Для фактического вычисления этого угла при заданных значениях γ_1 и α необходимо воспользоваться условием непрерывности давления на контактом разрыве OBE . За скачком AOB коэффициент давления

$$c_p^{(0)} = 2(1 - \varepsilon) (\sin^2 \gamma_0 - M_\infty^{-2}) \quad (1.6)$$

Коэффициент давления газа после прохождения скачка определяется соотношением

$$c_p^{(2)} = 2(1 - \varepsilon) (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2}) + 2U_1^2 \frac{\sin^2 \omega (\sin^2 \beta - M_{1n}^{-2})(1 - \varepsilon) M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1}{1 + \varepsilon (M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1 - 1)}$$

Учитывая требование, чтобы $c_p^{(0)} = c_p^{(2)}$ и выражение для M_{1n} , получим

$$L = \sin^2 \omega \sin^2 \beta = \frac{(\sin^2 \gamma_0 - \sin^2 \gamma_1)(1 - \varepsilon + \varepsilon M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1)}{U_1^2 M_\infty^2 \sin^2 \gamma_1} \quad (1.7)$$

$$U_1^2 = [1 - (1 - \varepsilon) (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2})]^2 + (1 - \varepsilon)^2 ctg^2 \gamma_1 (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2})^2$$

Условие равенства давления вдоль контактного разрыва, представленное в форме (1.7), удобно тем, что не зависит от параметра α . С другой стороны, произведение L можно найти как функцию переменных γ_1, α и γ_0 при помощи соотношений (1.3) и (1.5). В результате имеем

$$L = f(\gamma_1, \alpha, \gamma_0) \quad (1.8)$$

Исключая из (1.7) и (1.8) величину L , получим неявное уравнение для определения γ_0 . В связи с тем, что выражение для функции $f(\gamma_1, \alpha, \gamma_0)$ имеет громоздкий вид, удобно находить корни уравнения графически как точки пересечения кривых (1.7) и (1.8), построенных при различных значениях параметров α и γ_1 . Допустим, уравнение имеет действительные корни, тогда построенная система скачков определяет обтекание некоторого пространственного тела с поперечным сечением, составленным из отрезков прямых. Определим геометрию этого тела (точки C, D, E на фиг. 1). Для этого предварительно укажем координаты следующих точек:

$$\begin{aligned} A & (1, tg \gamma_0, 0), & B & [1, tg \gamma_0, (tg \gamma_0 - tg \gamma) tg \alpha] \\ M & [1, tg \delta_1 \sin \alpha, - tg \delta_1 \cos \alpha], & E & (1, tg \delta_0, 0) \end{aligned}$$

Пусть центральный угол равен π/n , где n — число лучей звездообразного тела. Тогда из треугольника O_1CG для точки C имеем координаты

$$C \left[1, \frac{tg \gamma_1 \cos(\pi/n)}{\sin(\alpha - \pi/n)}, \frac{tg \gamma_1 \sin \pi/n}{\sin(\alpha - \pi/n)} \right] \quad (1.9)$$

Переходим к отысканию плоскости BOD . Пучок плоскостей, проходящих через OB , удовлетворяет уравнению

$$x [(\operatorname{tg} \gamma_0 - \operatorname{tg} \gamma) \operatorname{tg} \alpha + \lambda \operatorname{tg} \gamma_0] - \lambda y - z = 0 \quad (1.10)$$

Параметр λ для плоскости BOD находится из условия перпендикулярности плоскостей MOE и BOD . Учитывая, что уравнение плоскости MOE есть

$$x \operatorname{tg} \delta_0 - y + \left(\frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\cos \alpha \operatorname{tg} \delta_1} + \operatorname{tg} \alpha \right) z = 0$$

получаем для параметра λ выражение

$$\lambda = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \delta_0 \operatorname{tg} \gamma_0} \left[\left(\frac{\operatorname{tg} \delta_0}{\cos \alpha \operatorname{tg} \delta_1} - \operatorname{tg} \alpha \right) - \operatorname{tg} \delta_0 (\operatorname{tg} \gamma_0 - \operatorname{tg} \gamma) \operatorname{tg} \alpha \right]$$

Решая совместно уравнение (1.10) при $x = 1$ и уравнение прямой MC , получим для координат точек $D(1, y_d, z_d)$ и $F(1, y_f, 0)$ следующие значения:

$$y_d = \frac{y_m - az_m + ab}{1 + \lambda a}, \quad z_d = \frac{b - \lambda(y_m - az_m)}{1 + \lambda a}, \quad y_f = y_m - az_m \quad (1.11)$$

$$a = \frac{\operatorname{tg} \gamma_1 \cos(\pi/n) - \sin(\alpha - \pi/n) \operatorname{tg} \delta_1 \sin \alpha}{\operatorname{tg} \gamma_1 \sin(\pi/n) + \sin(\alpha - \pi/n) \operatorname{tg} \delta_1 \cos \alpha}, \quad b = \lambda \operatorname{tg} \gamma_0 + (\operatorname{tg} \gamma_0 - \operatorname{tg} \gamma) \operatorname{tg} \alpha$$

Проекция областей возмущенного потока на плоскость $x = 1$ за скачками BOD , AOB и BOC обозначим соответственно через S_0 и S_1 . С использованием формул (1.9), (1.11) их величины вычисляются из соотношений $S_0 = 0.5 y_c z_d$, $S_1 = 0.5 y_f (z_c - z_d)$. Переходим к вычислению сил. На стенку CD действует сила, вызванная постоянным давлением

$$c_p^{(1)} = 2(1 - \epsilon) (\sin^2 \gamma_1 - M_\infty^{-2}) \quad (1.12)$$

Стенка ED подвергается действию давления $c_p^{(0)}$, определяемого выражением (1.6). В каждой из областей BDC , BDE и ABE течение равномерное. Все линии тока, включая линию контактного разрыва, сходятся в точку E . Волновое сопротивление тела вычисляется по формуле

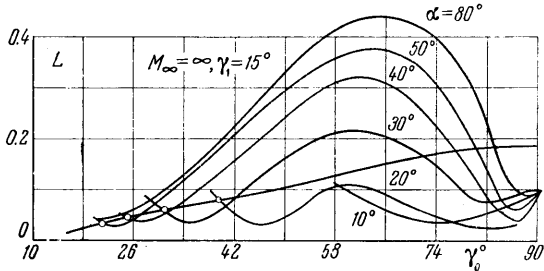
$$C_x = \frac{c_p^{(0)} S_0 + c_p^{(1)} S_1}{S_0 + S_1} \quad (1.13)$$

В случае, когда возникает подъемная сила, например при обтекании угла $2\pi/n$, представляющего треугольное крыло, у которого две плоскости расположены по потоку, коэффициент подъемной силы можно определить по формуле

$$C_y = \frac{c_p^{(0)} \sigma_0 + c_p^{(1)} \sigma_1}{S_0 + S_1}, \quad \sigma_0 = n p_{xz} S_{eod} = 0.5 z_d, \quad \sigma_1 = n p_{xz} S_{doc} = 0.5 (z_c - z_d) \quad (1.14)$$

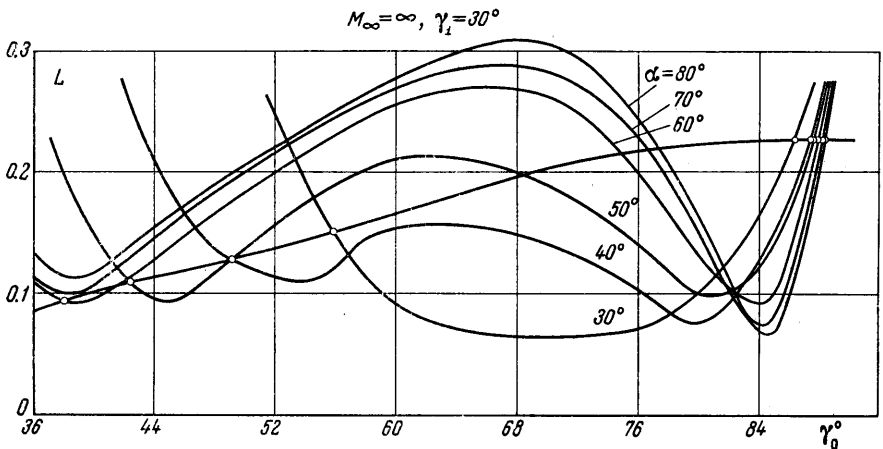
2. Исследование решения. Построенное решение имеет смысл, если система уравнений (1.7), (1.8) допускает действительные корни. На фиг. 2—3 эти корни представлены точками пересечения семейств линий (1.8) с кривой (1.7) с кривой (1.7), причем, согласно расчету, все возможные типы пересечений при $\kappa = 1.4$, $M_\infty = \infty$ и других значениях параметра γ_1 качественно охватываются этими двумя случаями. Как видно из построенных графиков, действительные корни существуют, и, следовательно, имеется возможность обтекания пространственного тела с маховским взаимодействием ударных волн. Учитывая, что при заданных значениях γ_1 и α кривые пересекаются несколько раз, было проведено исследование каждого корня; оказалось, что ряд корней определяет не истинное положение плоскости BOE , показанное на фиг. 1, а положение, зеркально отраженное относительно плоскости BOE ; поэтому для таких корней не существует физического решения. В связи с этим истинные корни не должны лежать в области, определяемой неравенством

$$\sin \alpha \geq p - \left[p^2 - \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma_0}{\operatorname{tg} \delta_0} - \frac{\operatorname{tg} \gamma_1}{\operatorname{tg} \delta_1} + 1 \right) \right]^{1/2} p = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{tg} \gamma_0}{\operatorname{tg} \delta_1} + \frac{\operatorname{tg} \delta_1}{\operatorname{tg} \delta_0} \right) \quad (2.1)$$



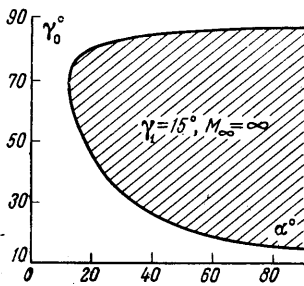
Фиг. 2

Пример такой области для $\gamma_1 = 15^\circ$ показан штриховкой на фиг. 4. При помощи условия (2.1) можно получить, что из трех типов корней, показанных на фиг. 2, остается только один тип, изображенный обведенными точками. Аналогично можно показать, что на фиг. 3 останутся только два множества действительных корней. Интересно при этом, что корни на фиг. 2 дают решение со слабым скачком AOB , тогда как на фиг. 3 одно множество корней будет давать слабый скачок, второе — сильный. Решение, представленное на фиг. 2, осуществляется при $\gamma_1 \leq 23^\circ$. Для больших значений γ_1 имеет место решение типа, показанного на фиг. 3. Сводные графики для обоих



Фиг. 3

типов решений построены на фиг. 5. Рассмотрим сначала, что означает случай, когда при определенных значениях γ_1 и α имеются два корня ($\gamma_0^{(1)}$ и $\gamma_0^{(2)}$). Формально это не противоречит единственности решения, так как разным корням соответствуют различные по форме тела. Однако для большего корня γ_0 тело будет с более глубокой впадиной (линия ED на фиг. 1 проходит ниже), чем в случае меньшего корня. Поэтому, учитывая, что точка C и наклон линии CD в обоих случаях одинаков, естественно допустить, что физически может осуществиться только одно из решений.



Фиг. 4

Рассмотрим случай, когда, согласно фиг. 5, имеется единственное решение со слабым или сильным скачком AOB в зависимости от значений параметра γ_1 . Видимо здесь, как и в разобранном выше примере, только один какой-то тип скачка будет соответствовать действительному течению. При этом допущении можно сделать вывод, что для тех значений γ_1 и α , при которых, согласно фиг. 5, решения нет (пунктирные кривые), будет реализоваться более сложное течение с искривленными ударными волнами.

Установим одну полезную аналогию с плоским маховским пересечением волн. Для этого спроектируем скорость набегающего потока и скорости возмущенного течения за скачками на линию OB . Тогда эти проекции совпадут между собой и разрыв на контактной поверхности BOE имеет только составляющая скорости, перпендикулярная линии OB .

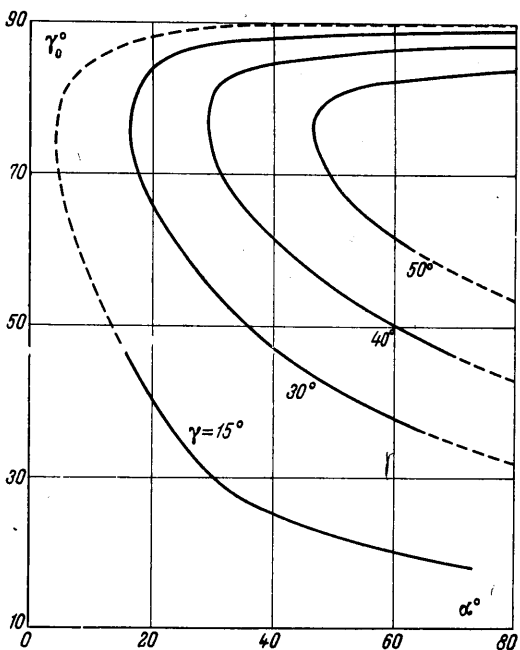
В связи с этим, если ввести систему координат, движущуюся вдоль OB с постоянной скоростью, равной указанным проекциям, то в такой системе координат движение газа представляется плоским, и можно воспользоваться готовыми результатами. В частности, известно [3], что для плоского течения существует область параметров (угол падения волны и интенсивность), для которых одновременно возможны регулярное и маховское пересечения. Аналогичная ситуация возникает и в разобранном случае. Согласно расчетам, существует область параметров γ_1 и α , в которой возможны оба вида взаимодействия. Правда, здесь, как указывалось ранее, формы соответствующих тел различны.

3. Некоторые результаты расчета. Решение, разобранный выше, а также найденное в работе [2], позволяют сделать некоторые выводы о возможных видах интерфе-

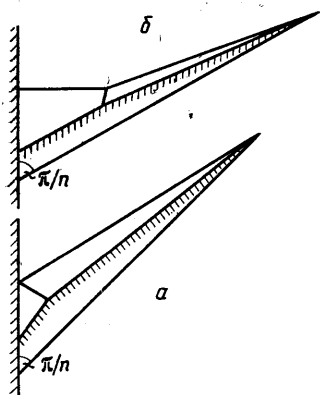
решения между крылом и стенкой. Именно, если рассматривать движение газа только внутри угла π/n , считая n произвольным положительным числом и принимая стороны этого угла за жесткие стенки, то такое течение будет эквивалентно обтеканию некоторого крыла, наклоненного к стенке под углом π/n . Когда этот угол мал, имеет место решение [2] и реализуется система скачков, показанная на фиг. 6, а.

При увеличении угла π/n (вплоть до $1/2\pi$) интерференция определяется решением, рассмотренным выше, и возникает конфигурация скачков, соответствующая фиг. 6, б. Отметим, что, согласно вычислениям, при увеличении угла π/n размах крыла увеличивается, угол стреловидности уменьшается. Причем в пределе, когда угол $\pi/n \rightarrow 1/2\pi$, возникает плоское течение около клина. Как известно из эксперимента, обтекание клина происходит со слабой волной, предельное же течение может быть обоих типов. Таким образом, если маховская конфигурация имеет место с сильной средней волной около стенки. При небольшом изменении угла наклона крыла может вызвать полную перестройку потока и возникновение сильной ударной волны около стенки. Применим теперь найденное решение к изучению обтекания класса треугольных крыльев с V-образным поперечным сечением. Для этого рассмотрим движение газа внутри произвольного угла $2\pi/n$ ($n > 2$), которое эквивалентно обтеканию треугольного крыла с двумя плоскостями, расположенными по потоку. В качестве иллюстрации приведем результаты вычисления геометрии и аэродинамических характеристик крыла со слабой средней волной. Расчет велся при значениях параметров: $\gamma_1 = 30^\circ$, $\gamma_0 = 39^\circ$, $\alpha = 60^\circ$, $\pi/n = 45^\circ$, $M_\infty = \infty$.

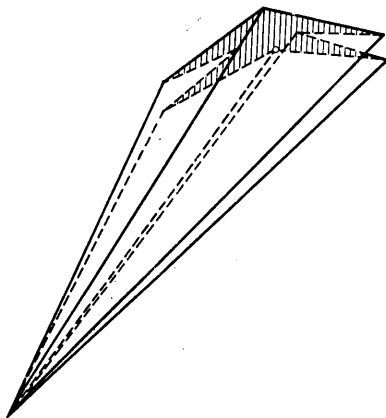
Характерно, что это толстое крыло относительно большого сопротивления имеет ка-



Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

чество $\sim 2,7$. Естественно ожидать, что у крыльев малого сопротивления качество будет еще выше. Соответствующий расчет при $\gamma_1 = 4^\circ 45'$, $\alpha = 28^\circ$, $\pi/n = 18^\circ$, $M_\infty = \infty$, использующий решение [2], дает $C_x = 0.012$ и $k = 6.69$.

В заключение рассмотрим обтекание гиперзвукового треугольного биплана (фиг. 7). Компановка биплана представляет два треугольных крыла, верхние плоско-

сти которых расположены по потоку. Расчет выполнен для случая регулярного взаимодействия при $\gamma_1 = 15^\circ 20'$, $\alpha = 36^\circ$, $\pi/n = 30^\circ$, $M_\infty = \infty$. В этом примере геометрия обеих крыльев выбрана одинаковой, а угол скоса верхнего крыла в плоскости $x = 1$ принят равным 30° . Аэродинамическое качество биплана, равное 3.18, значительно превышает максимальное качество эквивалентного по объему и длине эллиптического конуса.

Оценка влияния трения при $c_\tau = 2 \cdot 10^{-3}$ показала, что происходит уменьшение качества биплана примерно на 20%.

Поступило 15 X 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. М а й к а п а р Г. И. О волновом сопротивлении неосесимметричных тел в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
2. Г о н о р А. Л. Точное решение задачи обтекания некоторых пространственных тел сверхзвуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
3. К у р а н т Р. и Ф р и д р и х с К. Сверхзвуковые течения и ударные волны. Изд. иностр. лит., 1950.

НЕОСЕССИМЕТРИЧНЫЕ НОСОВЫЕ ЧАСТИ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ, ОБЛАДАЮЩИЕ МИНИМАЛЬНЫМ СОПРОТИВЛЕНИЕМ ДАВЛЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ СВЕРХЗВУКОВЫХ СКОРОСТЯХ ПОЛЕТА

Л. Е. ВАСИЛЬЕВ

(Москва)

Изучению влияния формы носовых частей тел вращения на их аэродинамические характеристики посвящен ряд теоретических и экспериментальных исследований. Предметом некоторых работ было отыскание тел минимального сопротивления при различных ограничениях их геометрии. К таким телам относятся прежде всего известные тела Сирса — Хаака и Кармана. В работе [1] найдены пять различных форм носовых частей, обладающих минимальным сопротивлением давления при больших сверхзвуковых скоростях. Все эти тела являются осесимметричными.

В работах Г. И. Майкапара показано, что осесимметричная форма удлиненных тел не является оптимальной и что применение специальных неосесимметричных форм поперечных сечений может привести к заметному снижению волнового сопротивления таких тел при больших сверхзвуковых скоростях.

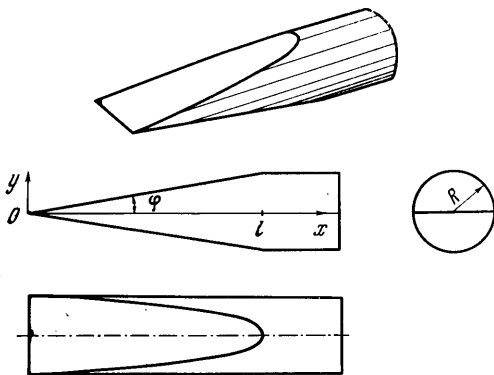
В данной работе в рамках ударной теории Ньютона рассмотрен вопрос об одной из возможных неосесимметричных оптимальных форм носовой части тела вращения, образованной пересечением поверхности этого тела вращения цилиндрическими поверхностями, имеющими горизонтальные (или вертикальные) образующие, перпендикулярные направлению набегающего потока.

В качестве примера на фиг. 1 показана простейшая форма носовой части такого типа для случая, когда указанные цилиндрические поверхности являются наклонными плоскостями. Такая форма носовой части тела вращения была исследована экспериментально Г. И. Майкапаром и Г. Т. Саядяном.

Пользуясь известной формулой Ньютона для коэффициента давления

$$C_p = 2 \sin^2 \delta \quad (1)$$

можно определить коэффициент сопротивления давления установленной под нуле-



Фиг. 1