

## ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛАХ С УЧЕТОМ ЗАВИХРЕННОСТИ ВНЕШНЕГО ПОТОКА

И. Н. МУРЗИНОВ

(Москва)

В работе излагается метод и приводятся результаты численных расчетов гиперзвукового ламинарного пограничного слоя на затупленных конусах с учетом завихренности внешнего потока, вызванной искривленной головной ударной волной. Предполагалось, что воздух в пограничном слое находится в равновесно диссоциированном состоянии, но число Прандтля полагалось постоянным,  $\sigma = 0.72$ . Расчеты выполнены в диапазоне скоростей движения  $3 \div 8$  км/сек, углов полураствора конусов  $\theta_k = 0 \div 20^\circ$ . При учете вихревого взаимодействия пограничного слоя с внешним течением распределение теплового потока и трения будет зависеть от числа Рейнольдса в набегающем потоке (при прочих равных условиях). В расчетах число Рейнольдса  $R_\infty$ , вычисленное по параметрам набегающего потока и радиусу сферического затупления, изменялось от  $2.5 \cdot 10^3$  до  $5 \cdot 10^4$ . Для меньшего из указанных чисел Рейнольдса толщина пограничного слоя на затуплении становится соизмеримой с отходом ударной волны от тела, и для  $R_\infty < 2.5 \cdot 10^3$ , по-видимому, необходимо пересмотреть схему расчета. При  $R_\infty > 5 \cdot 10^4$  для не очень длинных конусов вихревое взаимодействие становится не очень существенным. Результаты расчетов обработаны в соответствии с критериями подобия обтекания тонких тупых конусов гиперзвуковым потоком вязкого газа [1,2].

§ 1. Постановка задачи. В обычных предположениях уравнения количества движения, неразрывности и энергии для ламинарного пограничного слоя в условиях равновесно диссоциирующего воздуха можно записать в виде [3]

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v_1 \frac{\partial u}{\partial \eta} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho i^{-n} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial (ru)}{\partial x} + \frac{\partial (rv_1)}{\partial \eta} &= 0 \\ u \frac{\partial i}{\partial x} + v_1 \frac{\partial i}{\partial \eta} &= \frac{u}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\rho i^{-n}}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial \eta} \right) + \rho i^{-n} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\left( v_1 = \frac{R_\infty^{1/2}}{C^{1/2}} \rho v + u \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \eta = \frac{R_\infty^{1/2}}{C^{1/2}} \int_0^y \rho dy, \quad R_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 r_0}{\mu_\infty} \right)$$

Здесь  $xr_0$ ,  $yr_0$  — расстояния вдоль образующей тела и по нормали к ней;  $uV_\infty$ ,  $vV_\infty$  — составляющие скорости по осям  $x$  и  $y$ ;  $\rho$ ,  $\rho_\infty$ ,  $\mu$ ,  $\mu_\infty$ ,  $p$ ,  $\rho_\infty V_\infty^2$ ,  $iV_\infty^2$  — соответственно плотность, вязкость, давление и энтальпия газа;  $rr_0$  — расстояние от оси симметрии до образующей тела;  $\sigma$  — число Прандтля;  $\rho_\infty$ ,  $V_\infty$ ,  $\mu_\infty$  — плотность, скорость и вязкость газа в набегающем потоке;  $r_0$  — характерный размер тела (радиус сферического затупления);  $C$  — константа пропорциональности в зависимости произведения плотности на вязкость [4]

$$\rho \mu = C \rho i^{-n}, \quad C = \gamma (\gamma - 1)^{-n} M_\infty^{2(1-n)} \quad (1.2)$$

Здесь  $\gamma$ ,  $M_\infty$  — показатель адиабаты и число Маха в набегающем потоке; в расчетах полагалось  $n = 0.315$ .

Уравнение состояния равновесно диссоциирующего воздуха представлялось в виде [4]

$$p/\rho i = f_1 (iV_\infty^2) + f_2 (iV_\infty^2) \lg (p\rho_\infty V_\infty^2) \quad (1.3)$$

где  $f_1$ ,  $f_2$  — таблично задаваемые функции небольшого объема.

Ранее уже отмечалось, что число Прандтля в расчетах полагалось постоянным. Такое предположение, как показали отдельные расчеты с изменяющимся в зависимости от энтальпии эффективным числом Прандтля для равновесно диссоциирующего воздуха, практически не сказывается на распределении тепловых потоков и эффекте вихревого взаимодействия, но существенно упрощает расчеты.

Система (1.1) решалась численно при следующих граничных условиях на стенке;

$$u = 0, \quad v_1 = 0, \quad i = i_w = \text{const} \quad \text{при } \eta = 0 \quad (1.4)$$

Для пограничного слоя при больших числах Рейнольдса использовались обычные асимптотические граничные условия

$$u \rightarrow u_e(x), \quad i \rightarrow i_e(x) = i_T \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

где  $u_e, i_e$  — скорость и энтальпия газа на теле при его невязком обтекании.

При малых числах  $R_\infty$ , когда расход газа через пограничный слой становится большим, истинные значения величин на внешней границе пограничного слоя, развивающегося в завихренном потоке, могут отличаться в несколько раз по сравнению со значениями (1.5). Поэтому встает вопрос о правильном учете в завихренных потоках граничных условий. Принципиальная трудность здесь заключается в том, что уравнения пограничного слоя для завихренного внешнего течения не переходят на больших расстояниях от тела в уравнения идеального газа, так как вязкие члены в них, вообще говоря, не стремятся к нулю. Для гладкой стыковки решений необходимо учитывать вязкость и во внешнем течении, т. е. все поле течения считать вязким. Однако для рассматриваемой задачи, как показывают оценки, струйки тока, прежде чем в них существенно скажется влияние вязкости и теплопроводности, поглощаются пограничным слоем.

В этом случае параметры на внешней границе пограничного слоя можно рассчитывать из условия изэнтропичности течения вдоль струйки тока, входящей в пограничный слой.

Для совершенного газа с показателем адиабаты  $\gamma$  из условия изэнтропичности вдоль линии тока и постоянства давления в окрестности тела можно получить

$$i / i_T = f(\psi) \quad (i_T = i_T(p)) \quad (1.6)$$

где  $2\pi r_0^2 \rho_\infty V_\infty \psi$  — расход газа, а вид функции  $f$  определяется по значению параметров на головном скачке уплотнения.

В случае равновесно диссоциирующего газа функция  $f$  будет зависеть также и от давления. Однако эта зависимость довольно слабая, и при проведении расчетов ею пренебрегалось. Зависимости  $i / i_T$  от расхода газа определялись при давлениях, типичных для боковой поверхности конусов ( $p \sim \sin^2 \theta_k$ ), и показаны на фиг. 1.

Цифры на кривых соответствуют следующим условиям:

$$1 - M_\infty = 23, \quad \gamma = 1.4; \quad 2 - V_\infty = 3 \text{ км/сек}; \quad 3 - V_\infty = 5 \text{ км/сек}; \quad 4 - V_\infty = 7.5 \text{ км/сек}$$

Для условия равновесной диссоциации расчеты проводились для высоты полета  $H = 60$  км; высота слабо влияет на результаты расчетов.

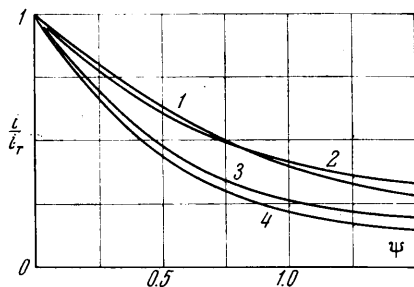
Оценки, подтвержденные проведенными расчетами, показали, что на затупленных конусах толщина пограничного слоя в переменных Доронницына с учетом завихренности внешнего потока близка к толщине обычного асимптотического пограничного слоя. Поэтому при учете вихревого взаимодействия за границу пограничного слоя принимались значения  $\eta_8(x)$ , которые довольно четко определяются для обычного пограничного слоя. Расчеты с увеличенной в 1.5 раза толщиной пограничного слоя не дали ощутимых изменений трения и теплопередачи на стенке. Критерием правильности выбора толщины пограничного слоя может служить гладкость сопряжения внешнего течения с решением пограничного слоя (с точностью до принципиально не устранимого при принятой схеме разрыва производных, зависящего от  $R_\infty$ ). При указанном выше выборе границы пограничного слоя разрыв нормальных производных функций в месте стыковки не превышал 1–3% от их значения.

Таким образом, в случае вихревого взаимодействия принимались следующие условия на внешней границе пограничного слоя:

$$i_8 = i_T(p) f(\psi_8), \quad u_8 = \sqrt{2(i_{00} - i_8)} \quad \text{при } \eta = \eta_8(x) \quad (1.7)$$

Здесь  $2\pi r_0^2 \rho_\infty V_\infty \psi_8$  — расход газа через пограничный слой,  $i_{00} V_\infty^2$  — энтальпия торможения.

§ 2. Результаты расчетов. Используемое в настоящих расчетах распределение давления по поверхности для условий равновесной диссоциации воздуха бралось на основе расчетов [5]. Результаты расчетов по сферической части затупленных конусов показали, что при  $3 \text{ км/сек} \leq V_\infty \leq 8 \text{ км/сек}$  и  $0.01 \leq i_w \leq 0.1$  распределение тепло-



Фиг. 1

вых потоков хорошо описывается зависимостью [4]

$$q/q(0) = 0.55 + 0.45 \cos \theta \quad (2.1)$$

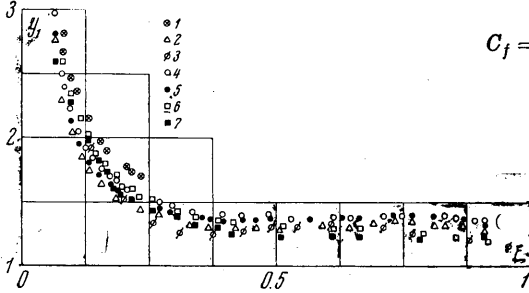
где  $\theta$  — центральный угол.

Для суммарного коэффициента трения по полусфере получена аппроксимирующая формула

$$C_f = 2 \frac{M_\infty^{(1-n)}}{\sqrt{R_\infty}} \sqrt{k} i_w^{0.1n} \quad (2.2)$$

Здесь  $k = \rho_\infty / \rho_1$  — отношение плотностей на прямом скачке уплотнения.

В работах [1,2] были сформулированы условия подобия обтекания тонких притупленных конусов гиперзвуковым потоком вязкого газа. Эти условия могут быть получены непосредственно из системы (1.1) при использовании сформулированного в [4] за-



Фиг. 2

кона подобия распределения давления на притупленных конусах и пренебрежении деталями теплообмена на затуплении. Законы подобия распределения тепловых потоков по боковой поверхности являются приближенными, так как при их установлении пренебрегалось зависимостью скорости и энтальпии от давления на боковой поверхности конусов. В условиях диссоциации, когда эффективный показатель адиабаты близок к единице, эта зависимость становится существенной. Учесть эту зависимость приближенно можно следующим образом. Давление на боковой поверхности конуса с углом полураствора  $\theta_k$  при гиперзвуковых скоростях  $p \sim \sin^2 \theta_k$ , а скорость в условиях равновесной диссоциации воздуха

$$u \sim \sqrt{1 - (\sin^2 \theta_k)^{2k}}$$

Так как тепловой поток  $q \propto u^{1/2}$ , а трение  $\tau \propto u^{1/2}$  то, в соответствии с [1,2], в условиях равновесной диссоциации воздуха комбинации

$$y_1 = \frac{\sqrt[4]{c_x} q}{q_c(0) \sin^2 \theta_k [1 - (\sin^2 \theta_k)^{2k}]^{1/4}}$$

$$y_2 = \frac{\sqrt[4]{c_x} \sqrt{R_\infty} \tau}{\rho_\infty V_\infty^2 \sqrt{c_x} \sin^2 \theta_k [1 - (\sin^2 \theta_k)^{2k}]^{1/4}} \quad (2.3)$$

должны быть близкими к единичным функциям от переменной

$$\xi = x_1 \sin^2 \theta_k / \sqrt{c_x}$$

Здесь  $c_x$  — коэффициент сопротивления носка;  $q_c(0)$  — тепловой поток в критической точке сферы, радиус которой равен радиусу мишени притупления;  $\tau$  —

трение;  $x_1 r_0$  — расстояние от критической точки вдоль оси конуса. О точности выполнения закона подобия можно судить по данным фиг. 2, 3, где в зависимости от  $\xi$  для различных условий движения тела приведены значения  $y_1$  и  $y_2$ ; цифры указывают точки, соответствующие следующим условиям полета

	1	2	3	4	5	6	7
$V_\infty =$	7500	7500	7500	7500	7500	3000	5000 м/сек
$\theta_k =$	5	10	20	10	10	10	10
$i_w =$	0.05	0.05	0.05	0.01	0.1	0.05	0.05

В последнее время появилось много работ, посвященных влиянию завихренности внешнего течения на трение и теплообмен. Наиболее систематическое исследование эффектов второго порядка, к которым, наряду с завихренностью, относятся поперечная и продольная кривизны тела, скольжение, скачок температуры на стенке и др.,

проведено в работе Ван-Дайка [7] при помощи разложения в ряд по малому параметру. Из результатов этого исследования можно заключить, что эффект завихренности намного превосходит остальные и влияние завихренности будет преимущественно возрастать при стремлении показателя адиабаты к единице, что качественно имеет место в условиях равновесной диссоциации воздуха.

Следует отметить, что результаты работы [7] по влиянию завихренности в окрестности критической точки осесимметричного тела не согласуются с экспериментальными данными [8]. Это настораживает в отношении результатов, получаемых разложением в ряды по малому параметру для существенно нелинейной системы уравнений, какой являются уравнения Навье—Стокса, хотя с формальной стороны такое разложение законно. Отметим также, что в ряде задач завихренность внешнего течения будет производить эффект «первого» порядка.

Остановимся на характере влияния показателя адиабаты на вихревое взаимодействие при обтекании затупленных конусов. При постоянном  $\gamma$  для малых значений расхода  $\psi$  и больших чисел Маха  $M_\infty$  можно получить

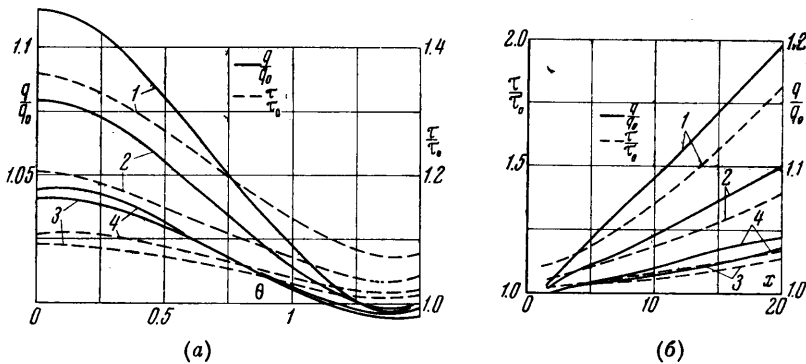
$$\frac{i}{i_T} = 1 - \frac{2}{\gamma R_1^2} \psi \quad (2.4)$$

где  $R_1 r_0$  — радиус кривизны ударной волны на оси симметрии<sup>1</sup>. Отсюда, используя интеграл Бернулли, можно легко найти градиент скорости на теле по нормали к его поверхности

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2p}{\gamma - 1} \frac{r}{R_1^2} \quad (2.5)$$

Из этой формулы видно, что с уменьшением  $\gamma$  завихренность течения во внешнем потоке газа сильно возрастает. В то же самое время средняя завихренность по толщине пограничного слоя (отношение скорости на внешней границе пограничного слоя к его толщине) практически остается неизменной.

Поэтому при диссоциации газа, когда эффективный показатель адиабаты уменьшается, влияние завихренности на характеристики пограничного слоя будет возрастать.



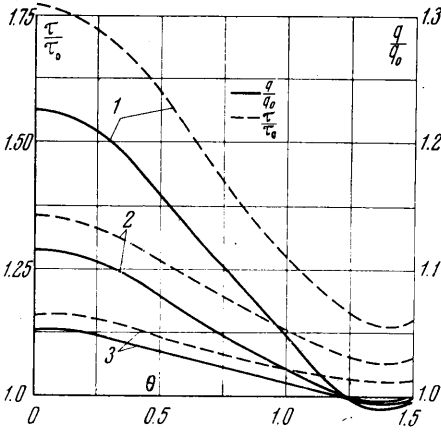
Фиг. 4 а, б

Для иллюстрации этого эффекта на фиг. 4 показано влияние завихренности на трение и теплообмен (здесь представлены отношения тепловых потоков и трения с учетом завихренности к аналогичным величинам без учета завихренности) при обтекании затупленного по сфере конуса с углом полураствора  $\theta_k = 10^\circ$ ,  $R_\infty = 10^4$ ,  $i_w = 0.05$  (кривые 1 —  $V_\infty = 7500$  м/сек; 2 —  $V_\infty = 5000$  м/сек; 3 —  $V_\infty = 3000$  м/сек; 4 —  $M_\infty = 23$ ,  $\gamma = 1.4$ ). Там же для сравнения приведены результаты расчета для случая идеального газа с показателем адиабаты  $\gamma = 1.4$ ; при этом фиг. 4а соответствует сферической части, а фиг. 4б — боковой поверхности конуса. Как видно из данных фиг. 4, влияние завихренности на трение и теплообмен для условий диссоциированного воздуха возрастает в несколько раз по сравнению с совершенным газом при  $\gamma = 1.4$ .

Видно также, что с уменьшением скорости движения влияние завихренности падает. Такое поведение объясняется в основном равной степенью диссоциации воздуха, которая возрастает со скоростью движения. А поскольку с увеличением степени диссоциации воздуха эффективный показатель адиабаты падает, то такой ход кривых находится в соответствии с ранее отмеченным эффектом диссоциации.

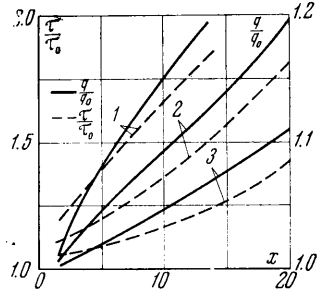
<sup>1</sup> При обтекании сферы равновесно диссоциирующим воздухом на основе данных работы [8] можно в диапазоне  $0.05 \leq k \leq 0.2$  получить  $R_1 = 1.02 + 1.8 k$ .

С уменьшением числа Рейнольдса растет расход газа через пограничный слой. Это значит, что истинные значения параметров газа на внешней границе пограничного слоя с уменьшением числа Рейнольдса будут все сильнее отличаться от обычно используемых в теории асимптотического пограничного слоя. Поэтому влияние завихренности будет расти с уменьшением числа Рейнольдса. Этот эффект можно также связывать с увеличением отношения завихренности во внешнем потоке, которая не зависит от  $R_\infty$ , к средней завихренности в пограничном слое, которая падает с уменьшением числа Рейнольдса.



а

Этот эффект можно также связывать с увеличением отношения завихренности во внешнем потоке, которая не зависит от  $R_\infty$ , к средней завихренности в пограничном слое, которая падает с уменьшением числа Рейнольдса.



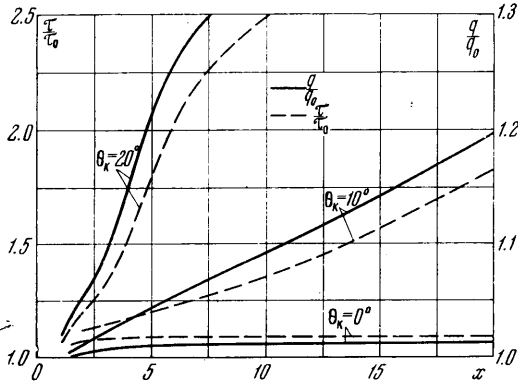
б

Фиг. 5 а, б

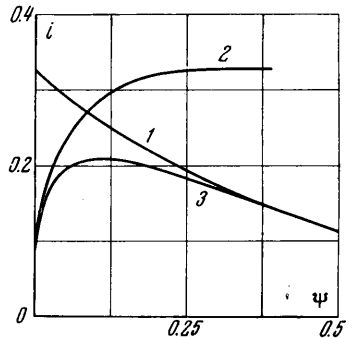
Количественно влияние числа Рейнольдса на вихревое взаимодействие показано на фиг. 5 ( $\theta_k = 10^\circ$ ,  $V_\infty = 7500$  м/сек,  $i_w = 0.05$ ; кривые 1 —  $R_\infty = 2.5 \cdot 10^3$ , 2 —  $R_\infty = 10^4$ , 3 —  $R_\infty = 5 \cdot 10^4$ ).

На фиг. 6 показано влияние угла полураствора конуса на вихревое взаимодействие пограничного слоя с внешним потоком ( $V_\infty = 7500$  м/сек,  $R_\infty = 10^4$ ,  $i_w = 0.05$ ).

На фиг. 7 приведен рассчитанный профиль энтальпии газа в зависимости от  $\psi$  для трех случаев: невязкого течения (1), асимптотического пограничного слоя (2) и с учетом завихренности внешнего потока (3) в условиях равновесной диссоциации воздуха. Из этих данных видно, что профиль энтальпии в асимптотическом пограничном слое существенно отличается от профиля энтальпии с учетом завихренности внешнего течения, хотя градиенты энтальпии на стенке близки. Совершенно различный характер зависимости энтальпии может оказаться существенным при расчетах



Фиг. 6



Фиг. 7

неравновесных течений, где скорости реакций сильно зависят от температуры газа.

Из приведенных данных видно, что рассчитанные с учетом завихренности внешнего течения профили энтальпии в пограничном слое гладко стыкуются с невязким потоком.

Результаты проведенных расчетов по влиянию завихренности в окрестности критической точки хорошо согласуются с приближенным анализом [9] и экспериментальными данными работы [8].

Остановимся, наконец, на характере влияния завихренности на трение и теплообмен вдоль образующей тела. Из приведенных ранее графиков видно, что влияние завихренности максимально в критической точке, падает практически до нуля в месте перехода сферы в конус и возрастает затем вдоль образующей конуса. Такой характер влияния завихренности находится в соответствии с отношением ее величины на внешней границе пограничного слоя к средней завихренности по толщине пограничного слоя. Действительно, если ограничиться малыми расходами  $\psi$  (большими числами  $R_\infty$ , когда справедливо соотношение (2.4)), то из (2.5) следует, что отношение завихренности во внешнем течении к средней завихренности по толщине пограничного слоя (последняя в окрестности критической точки пропорциональна  $x$ ) будет падать вдоль затупления. На боковой поверхности конуса, наоборот, это отношение будет расти.

При больших значениях  $x$  (зависящих от  $R_\infty$ ) газ, прошедший искривленный участок ударной волны, полностью поглотится пограничным слоем, завихренность потока на внешней границе пограничного слоя будет стремиться к нулю, но энтропия газа будет соответствовать конической ударной волне. Это значит, что при больших  $x$  отношения тепловых потоков и трения, вычисленные с учетом и без учета влияния завихренности, будут стремиться к постоянным величинам, зависящим от энтропии газа за прямым и коническим скачками уплотнения.

Поступило 5 IV 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лунев В. В. Гиперзвуковой закон подобия для обтекания тонких притупленных тел вязким газом. ПММ, 1964, т. 25, вып. 6.
2. Cheng H., Hall F., Collian F., Hertzberg A. Boundary-Layer Displacement and Leading-Edge Bluntness Effects in High-Temperature Hypersonic Flow. JAS, 1961, No. 5.
3. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
4. Мурзинов И. Н. Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равновесно диссоциирующего воздуха. Изв. АН СССР, Механика, 1966, № 1.
5. Лунев В. В., Павлов В. Г., Синченко С. Г. Гиперзвуковое обтекание сферы равновесно диссоциирующим воздухом. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1.
6. Черный Г. Г. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
7. Van Dyke M. Second-Order Compressible Boundary Layer Theory with Application to the Blunt Bodies in Hypersonic Flow. Hypersonic Flow Research, Academic Press, N. Y.—London, 1962, p. 37—76.
8. Ferry A., Zakkay V. Measurements of Stagnation Point Heat Transfer at Low Reynolds Numbers. JASS, 1962, No. 7.
9. Мурзинов И. Н. О теплообмене в критической точке тупого тела при малых числах Рейнольдса. ПМТФ, 1963, № 5.

#### ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ДОННОГО ДАВЛЕНИЯ ЗА КОНУСОМ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Ю. А. ПАНОВ, А. И. ШВЕЦ, А. М. ХАЗЕН

(Москва)

При изучении течения в застойных зонах, возникающих при обтекании сверхзвуковым потоком газа тел, имеющих уступы или донные срезы, приходится сталкиваться с колебаниями параметров потока около некоторого среднего значения.

Такие колебания наблюдаются при обтекании сверхзвуковым потоком осесимметричных тел с иглой, укрепленной в носовой части [1,2]. Колебания размеров застойной зоны исследовались при помощи высокоскоростной кинокамеры. В работе [3] измерялись пьезоэлектрическим датчиком колебания давления на стенке в точке отрыва и в застойной зоне перед плоской ступенькой при числе Маха набегающего потока  $M_\infty = 2.9$ . В работе [4] получены данные о колебаниях донного давления за сферой в дозвуковом потоке. Следует упомянуть и работу [5], посвященную изучению колебаний давления на плоской заостренной пластине при наличии на ней турбулентного пограничного слоя. Эти эксперименты дают представление о пульсациях параметров набегающего потока.